



PONTIFICIA  
UNIVERSIDAD  
CATÓLICA DE  
VALPARAÍSO

FACULTAD DE FILOSOFÍA Y EDUCACIÓN  
ESCUELA DE PEDAGOGÍA  
CARRERA EDUCACIÓN BÁSICA



**ESTUDIO DEL TRABAJO GEOMÉTRICO EN LOS TEXTOS  
ESCOLARES MINISTERIALES CHILENOS DE TERCERO Y  
CUARTO BÁSICO, REFERIDO AL OBJETO TRIÁNGULO.**

**TRABAJO DE TÍTULACIÓN PARA OPTAR AL GRADO DE LICENCIADO EN  
EDUCACIÓN Y AL TÍTULO DE PROFESOR DE EDUCACIÓN BÁSICA CON  
MENCIONES PRIMER CICLO Y EN MATEMÁTICAS Y AL TÍTULO DE  
PROFESOR DE EDUCACIÓN BÁSICA CON MENCIONES PRIMER CICLO Y EN  
CIENCIAS NATURALES.**

Profesor/a Guía: Andrea Pizarro Canales.  
Estudiantes: Fernanda Carolina Aguilar Mendoza.  
Fanny Irene Ciudad Bustamante.  
Issa Betzabeth Escobar Salinas.  
María Belén Jaime Bustamante.

Viña del Mar, Agosto del 2018

## Agradecimientos y dedicatorias

*La pedagogía para mí, es la tarea más importante y a la vez la más gratificante, ya que tomamos de la mano a cada niño que pasa por nuestra aula. Es una satisfacción ver su crecimiento, como cada día son mejores aprendiendo de nosotros, de sus compañeros y sobre todo de ellos mismos, superándose y eligiendo libremente su destino.*

*Agradezco a Dios por estar siempre conmigo, por fortalecer mi corazón e iluminar mi mente, por poner en mi camino aquellas personas que han sido mi soporte y compañía durante toda mi vida.*

*A mis padres, abuelos y hermano, por su amor, paciencia y esfuerzo entregado siempre. Gracias por inculcar en mí el ejemplo de esfuerzo, valentía, perseverancia y sobre todo de no temer a las adversidades. Gracias por su apoyo incondicional desde el momento en que decidí estudiar pedagogía, y que me han permitido llegar a cumplir hoy un sueño más.*

*A toda mi gran y bella familia por todas sus oraciones, consejos y palabras de aliento, por su apoyo durante todo mi proceso de formación como docente.*

*A mi Mela querida, quien con su ejemplo de entrega, amor y vocación por la pedagogía me motivo a ser profesora. Sé que desde donde esté se encuentra orgullosa de la persona en la que me he convertido.*

*A mis amigos, por apoyarme cuando más los necesite, por extender su mano en momentos difíciles, por la paciencia y sobre todo por el amor brindado siempre. Especialmente a mis amigas María Belén, Fanny e Issa, por todo el esfuerzo, tiempo y dedicación entregado en este trabajo de investigación.*

*Finalmente, a todas aquellas personas que fueron parte de mi proceso de formación como docente, todos quienes creyeron siempre en mí. Gracias a todos quienes de una u otra forma me acompañan en todos mis sueños y metas.*

*“No persigas a las personas. Sé tú mismo, haz lo tuyo y trabaja duro. Las personas correctas –las que de verdad pertenecen a tu vida- llegarán a ti, y se quedarán” (Will Smith)*

GRACIAS TOTALES...

Fernanda Carolina Aguilar Mendoza

## Agradecimientos y dedicatorias

*Con mucha emoción, nostalgia y orgullo, miro para atrás y agradezco haber recorrido los caminos que recorrí para encontrar mi yo interior. Esa alma de niña, esa mente de mujer y ese corazón de guerrera... No podría decir que soy completamente feliz, sin antes agradecer a todos y cada uno de los que han aportado su granito de arena para construir esta base de amor, que hoy se convierte en una profesional. Primeramente, a Dios, quien ha puesto y hecho en mi vida, todos mis pilares que me sustentan en ella. Los más importantes: mis padres. No existen palabras que describan el inmenso amor, admiración y agradecimiento que tengo hacia ustedes, mis amados. Por sus grandes esfuerzos y dedicaciones; por su contención y paciencia; por entregarme todo su amor, renunciando a ustedes para que, con mis hermanos, saliéramos adelante y fuéramos los hombres y mujeres que hoy somos. Siéntanse orgullosos, que su pequeña niña está cumpliendo todos sus sueños, y que sus enseñanzas, valores, ejemplos y sellos, son las grandes y fuertes raíces que me sustentan para enfrentar esta vida. Papito, Mamita, para ustedes un beso, un abrazo, un te amo con todo mi corazón y lo más importante... MISIÓN CUMPLIDA. A mis hermanos, por motivarme y hacer que jamás renunciara a nada. Por acompañarme y apoyarme en cada paso dado. Mi May, gracias por ser mi contención, brazos y mente cuando ya no veía la salida a las cosas. Por ser ese angelito bueno y malo que me ha enseñado a tomar decisiones. Por ser mi más grande ejemplo, demostrándome que todo lo que propones, puedes lograrlo; y junto con la Susy, siempre recargando mis energías, enseñándome cómo enfrentar la vida; por darme a las tres personitas más importante en mi vida, y por hacerme sentir que son mi segundo hogar. Esteban, gracias por apoyarme siempre y por enseñarme tanto en todo mi caminar, por ser mi ejemplo de esfuerzo y perseverancia; y junto con la Mane, acogerme en su casita cada semana cuando tenía que estudiar para mi mención. Fue muy importante para mí la confianza y ese apoyo. Era mi día de desconexión. A mis tres personas favoritas, mi princesa, mi chinito y mi pollito. Gracias a ustedes, descubrí a que vine a servir este mundo... gracias a ustedes descubrí mi vocación. Por ustedes, TODO. Me dan las fuerzas para seguir cada día y querer ser cada vez mejor, por y para ustedes. Gracias por hacerme la tía más chocha, más feliz, orgullosa y afortunada de poder ser testigo de todos sus pasitos. Espero nunca en la vida fallarles y que se sientan orgullosos ustedes de lo que ha logrado su tía y amiga. Antes que me retes y te pongas melodramática, gracias especiales a la túpida más túpida del mundo mundial... mi ratita de laboratorio... estuviste presente en la motivación de este trabajo y sin ti y tus hermanos, nada de mi vida tendría sentido. Gracias Michy por enseñarme a ser la mezcla perfecta entre hermana-tía-amiga y mamá. Gracias al amor de mi vida, por tantos años caminando a mi lado. Por enamorarme cada día; por enseñarme y demostrarme que no debo rendirme a nada ni nadie, mucho menos a alcanzar mis sueños y que lo más importante es escuchar al corazón, él siempre tiene la respuesta para todo. Gracias por el aguante, la paciencia, el apoyo y recurrir a mí, cada vez que lo necesitaba. Tu eres con quien quiero estar toda mi vida, y que sigamos creciendo juntos tomados de la mano. Por último, pero no menos importante, a todos mis amigos y amigas, la familia que escogí, por todo el apoyo y por compartir mis penas, tristezas y alegrías. Para ustedes, no es necesario que los nombre, cada uno de ustedes saben quiénes son... saben que estaré incondicionalmente para ustedes, y que sus hijos, tendrán a una gran profesora que les enseñe con mucho amor. Partiendo por mi Emi, ahijada hermosa, espero que te sientas orgullosa de tu nina que se ha de convertir en una buena maestra. Para todos ustedes... van las Gracias, porque me han convertido en lo que soy hoy. A ustedes... GRACIAS, TOTALES.*

*Fanny Irene Ciudad Bustamante.*

## **Agradecimientos y dedicatorias**

### **Con amor incondicional y eterna gratitud a mis padres Angélica y Lorenzo.**

*Porque comenzamos este camino juntos, porque aprendimos en el intertanto. Porque son mi pilar, fuerza y vida. Gracias por caminar a mi lado. Por soltarme, pero nunca dejarme. Por enseñarme que caerse esta permitido, pero levantarse es obligatorio. Por enseñarme a amar y tener la dicha de ser tan amada. Por darme alas para volar y razones por las que siempre volver.*

### **A la luz de mis ojos... Mi hermana Nohelia.**

*Porque cuando no tengo fuerzas para seguir, miro tus ojos y comprendo que las fuerzas nunca se fueron. Porque eres mi motor de fuerza y energía. Porque aun siendo tan pequeña en edad, eres enorme en corazón. Porque a tus cortos años, ya me has enseñado tanto de la vida.*

### **A las luces que han iluminado mi camino... mis abuelos, Jorge y Sonia**

*A Jorge, por enseñarme que en cualquier momento de la vida se puede volver a empezar, porque solo se necesita de convicción y de un amor incondicional. Por demostrarme cada día que la juventud no está en los años, sino que en cómo se vive la vida.*

*A Sonia, mi ángel preciado. Por tu legado, por tu manera de ver la vida y de vivirla. Pero por, sobre todo, por enseñarme a luchar empoderada, segura, a paso firme y a mi manera. Por ser Don Quijote en la Marcha, creer en un sueño imposible y con fe una estrella alcanzar.*

### **Al amor de mi vida, Christian**

*Porque decidimos juntos iniciar este viaje. Porque hemos decidido caminar juntos de la mano la aventura de la vida. Por el apoyo incondicional, por no dejar que me rindiera jamás. Y por, sobre todo, por volvernos locos de la risa, pasear sin prisa de la calle y vivir tomados del corazón. Mi pacto contigo está escrito en las estrellas, es mas fuerte que la distancia y el tiempo, es un pacto que vence al destino.*

*{Con los pies en la tierra y los ojos mirando al cielo}*

*Issa Betzabeth Escobar Salinas.*

## Agradecimientos y dedicatorias

*La docencia es una profesión emocionalmente apasionante, profundamente ética e intelectualmente exigente, cuya complejidad solamente es vivida por quienes solemos poner el cuerpo y el alma en el aula. Es por esto que agradezco principalmente a Dios, por guiarme en este camino, por darme la fuerza y la sabiduría necesaria para poder alcanzar uno de mis grandes sueños y por sobretodo poner en mi vida a personas maravillosas.*

*Agradezco a mis padres, mi papá Rodrigo por apoyarme en cada una de mis decisiones y guiarme, a mi mamá Claudia por su apoyo incondicional, por su amor en los momentos más difíciles y por recorrer este camino sin soltarme la mano en ningún momento. Agradezco a mi hermano por su confianza en mí, a mis abuelos Angela y Pedro por estar presente en cada uno de los momentos dándome ánimo y utilizando las palabras necesarias para poder seguir.*

*A mi pololo Branco por su paciencia y amor en todo este tiempo. A mis amigas por llenar cada momento de felicidad, aprendizaje y por saltar juntas cada barrera que se nos presentaba, unidas hemos podido llegar lejos.*

*Les agradezco a cada uno de ustedes por aguantar mis llantos, mis momentos de estrés, por entregarme el amor necesario para ser la persona que hoy soy, por confiar en mí, creer en mis capacidades y por ser el pilar fundamental en mi vida, sin ustedes esto no hubiera sido posible.*

*Ser profesora y poder tomar la mano de miles de niños, de abrir sus mentes y poder tocar cada uno de sus corazones es lo que me llena de felicidad y plenitud.*

*“Ser feliz es una decisión que hay que tomar todos los días, que no depende de las condiciones de vida que uno tenga, sino de la actitud con la cual enfrentar los problemas. La felicidad es eso: decidir ser feliz” (Pilar Sordo)*

*María Belén Jaime Bustamante*

## RESUMEN

La presente investigación, se basa en el estudio y análisis de la Circulación y Progresión del Espacio de Trabajo Geométrico presente en las Actividades de los Textos Escolares de tercero y cuarto básico que distribuye el Ministerio de Educación en torno al objeto matemático triángulo. Este análisis compara el ETMG de referencia e idóneo a partir de las tareas matemáticas declaradas, identificando los componentes epistemológicos y procesos cognitivos que cada actividad moviliza internamente bajo el alero de la teoría de Alain Kuzniak y otros, y su articulación con la transposición didáctica de Chevallard. La metodología empleada se ha de presentar de manera sistemática, empírica y crítica. Bajo un enfoque epistemológico a partir del cual se construye el objeto de investigación, con un paradigma cualitativo, detallando los pasos para llevar a cabo una investigación de tipo documental.

### Palabras claves

Transposición didáctica; Espacio de Trabajo Matemático Geométrico (ETMG); ETMG de referencia; ETMG idóneo; Tarea Matemática.

## ABSTRACT

The present research, it's based on the study and analysis of the Circulation and Progression of Geometric Space Work presented on School books activities from third and fourth grade distributed by the Ministry of Education around the mathematical triangle object. This analysis compares the EMTG of reference and suitable from the stated mathematical works, identifying the epistemological components and cognitive processes which each activity internally mobilizes under the wing of Alan Kuzniak theory and other, and its link with the Chevallard didactic transposition. The methodology employed has been announced in a systematic way, empirical and critical. Under an epistemological approach from which its built the object of research, with a qualitative paradigm, detailing the steps for conducting the investigation to a sort of documentary.

### Keywords

Didactic transposition; Geometric mathematical Space Work ( $ETM_G$ );  $ETM_G$  of reference;  $ETM_G$  suitable; Mathematical works.

## Tabla de contenido

<b>Agradecimientos y dedicatorias</b> .....	<b>2</b>
<b>Agradecimientos y dedicatorias</b> .....	<b>3</b>
<b>Agradecimientos y dedicatorias</b> .....	<b>4</b>
<b>Agradecimientos y dedicatorias</b> .....	<b>5</b>
<b>RESUMEN</b> .....	<b>6</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>7</b>
<b>Tabla de contenido</b> .....	<b>8</b>
<b>Glosario</b> .....	<b>14</b>
<b>Indice de figuras</b> .....	<b>15</b>
<b>Indice de tablas</b> .....	<b>18</b>
<b>Introducción</b> .....	<b>20</b>
<b>CAPÍTULO 1</b> .....	<b>23</b>
<b>PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA</b> .....	<b>23</b>
<b>1.1 Factores que suscitan la investigación</b> .....	<b>23</b>
<b>1.2 Antecedentes internacionales de la educación</b> .....	<b>26</b>
<b>1.3 Antecedentes constitucionales de la educación chilena</b> .....	<b>28</b>
1.3.1 Estructura del sistema educacional chileno .....	29
1.3.1.1 Ministerio de Educación .....	29
1.3.1.2 Consejo Nacional de Educación .....	29
1.3.1.3 Agencia de Calidad de la Educación .....	30
1.3.1.4 Superintendencia de Educación .....	30
<b>1.4 Resultados de aprendizajes de la educación chilena según pruebas estandarizadas</b> ..	<b>30</b>
1.4.1 Resultados de aprendizajes según pruebas internacionales .....	31
1.4.1.2 Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes (PISA) .....	31
1.4.1.3 Estudio Internacional de Tendencias en Matemática y Ciencias (TIMSS).....	33
1.4.2 Resultados de aprendizajes según pruebas nacionales .....	36
1.4.2.1 Sistema de Medición de la Calidad de la Educación (SIMCE) .....	37

1.4.2.1.1 Estándares de Aprendizaje .....	38
<b>1.5 Transposición didáctica .....</b>	<b>44</b>
<b>1.6 Razonamiento matemático .....</b>	<b>48</b>
<b>1.7 Textos escolares.....</b>	<b>49</b>
<b>CAPÍTULO 2 .....</b>	<b>53</b>
<b>MARCO TEÓRICO .....</b>	<b>53</b>
<b>2.1 Tarea Matemática.....</b>	<b>53</b>
<b>2.2 Espacio de trabajo matemático (ETM) .....</b>	<b>54</b>
2.2.1 Componentes.....	55
2.2.1.1 Plano cognitivo y sus componentes.....	55
2.2.1.1.1 Visualización .....	56
2.2.1.1.2 Construcción .....	57
2.2.1.1.3 Prueba .....	57
a) Pruebas pragmáticas.....	58
b) Pruebas intelectuales.....	59
2.2.1.2 Plano epistemológico y sus componentes .....	59
2.2.1.2.1 Representamen.....	60
2.2.1.2.2 Artefactos .....	61
2.2.1.2.3 Referencial .....	61
<b>2.3 Espacio de trabajo matemático geométrico (ETM<sub>G</sub>).....</b>	<b>61</b>
2.3.1 Componentes.....	62
2.3.1.1 Plano cognitivo y sus componentes.....	62
2.3.1.2 Plano epistemológico y sus componentes .....	63
2.3.1.2.1 Espacio real y local .....	63
2.3.2 Paradigmas geométricos.....	63
2.3.1.1 Geometría Natural (GI).....	65
2.3.1.2 Geometría Axiomática Natural (GII).....	65
2.3.1.3 Geometría Axiomática Formal (GIII).....	65

<b>2.4 Génesis</b> .....	<b>66</b>
2.4.1 Génesis semiótica .....	67
2.4.2 Génesis instrumental.....	68
2.4.3 Génesis discursiva .....	69
<b>2.5 Circulación de los planos</b> .....	<b>69</b>
2.5.1 Plano Semiótico-Instrumental [Sem-Ins] .....	72
2.5.2 Plano Instrumental-Discursivo [Ins-Dis].....	72
2.5.3 Plano Semiótico-Discursivo [Sem-Dis].....	72
2.5.4 Semiplano .....	73
<b>2.6 Tipos de ETM</b> .....	<b>73</b>
2.6.1 ETM de referencia.....	74
2.6.2 ETM idóneo.....	74
2.6.3 ETM personal.....	74
<b>CAPÍTULO 3</b> .....	<b>76</b>
<b>MARCO METODOLÓGICO</b> .....	<b>76</b>
<b>3.1 Problema de investigación</b> .....	<b>76</b>
3.1.1 Objetivos de la investigación.....	77
3.1.1.1 Objetivo General.....	77
3.1.1.2 Objetivos Específicos .....	77
3.1.2 Preguntas investigativas .....	77
3.1.2.1 Que se sustentan en el marco teórico .....	77
3.1.2.2 Que guardan correspondencia con los objetivos .....	78
3.1.2.3 Que presentan coherencia interna con la problemática de estudio .....	78
<b>3.2 Metodología de la investigación</b> .....	<b>78</b>
3.2.1 Enfoque de la investigación .....	78
3.2.2 Paradigma de la investigación .....	79
3.2.3 Técnica de la investigación .....	80
<b>3.3 Método de investigación</b> .....	<b>83</b>
3.3.1 Selección del tema .....	83

3.3.2 Recopilación de la información .....	84
3.3.3 Análisis y sistematización de la información .....	87
3.3.4 Integración, redacción y presentación del trabajo .....	94
<b>CAPÍTULO 4 .....</b>	<b>97</b>
<b>ANÁLISIS Y RESULTADOS.....</b>	<b>97</b>
<b>4.1 Análisis de la investigación .....</b>	<b>97</b>
4.1.1 Análisis de las Bases Curriculares .....	97
4.1.1.1 Tercero Básico.....	98
4.1.1.1.1 Análisis Objetivo de Aprendizaje 15.....	99
4.1.1.1.2 Análisis Objetivo de Aprendizaje 17 .....	99
4.1.1.1.3 Análisis Objetivo de Aprendizaje 21 .....	100
4.1.1.1.4 Conclusiones.....	101
4.1.1.2 Cuarto Básico .....	102
4.1.1.2.1 Análisis Objetivo de Aprendizaje 17.....	103
4.1.1.2.2 Análisis Objetivo de Aprendizaje 18.....	104
4.1.1.2.3 Conclusiones.....	105
4.1.2 Análisis de Programas de Estudios.....	105
4.1.2.1 Tercero Básico.....	106
4.1.2.1.1 Análisis de las actividades propuestas para el Objetivo de Aprendizaje 15 .....	106
4.1.2.1.2 Análisis de las actividades propuestas para el Objetivo de Aprendizaje 17 .....	108
4.1.2.1.3 Análisis de las actividades propuestas para el Objetivo de Aprendizaje 21 .....	110
4.1.2.1.4 Conclusión Tercero Básico .....	112
4.1.2.2 Cuarto Básico .....	115
4.1.2.2.1 Análisis de las actividades propuestas para el Objetivo de Aprendizaje 17 .....	116
4.1.2.2.2 Análisis de las actividades propuestas para el Objetivo de Aprendizaje 18 .....	118
4.1.2.2.3 Conclusión cuarto básico .....	121
4.1.3 Análisis de Textos de estudio.....	123
4.1.3.1 Tercero Básico.....	124

4.1.3.1.1 Análisis de las actividades propuestas en los Textos escolares para el Objetivo de Aprendizaje 17 .....	125
4.1.3.1.2 Análisis de las actividades propuestas en los Textos escolares para el Objetivo de Aprendizaje 15 .....	128
4.1.3.2 Cuarto Básico .....	148
4.1.3.2.1 Análisis de las actividades propuestas en los Textos escolares para el OA 17	149
4.1.3.2.2 Análisis de las actividades propuestas en los Textos escolares diferentes a los OA planteados para el curso.....	154
<b>4.2 Resultados .....</b>	<b>167</b>
4.2.1 Resultado de las circulaciones en Tercero Básico .....	168
4.2.1.1 ETM <sub>G</sub> de referencia en los Objetivos de aprendizaje y actividades sugeridas en los programas chilenos para el tratamiento de triángulos .....	168
4.2.1.2 ETM <sub>G</sub> idóneo en las actividades sugeridas en los textos escolares para el tratamiento de triángulos .....	170
4.2.1.3 Resultado total de circulaciones de los análisis de los Programas de Estudios y Textos Escolares.....	171
4.2.2 Resultado de las circulaciones en Cuarto Básico .....	176
4.2.2.1 ETM <sub>G</sub> de referencia en los Objetivos de aprendizaje y actividades sugeridas en los programas chilenos para el tratamiento de triángulos .....	176
4.2.2.2 ETM <sub>G</sub> idóneo en las actividades sugeridas en los textos escolares para el tratamiento de triángulos .....	178
4.2.2.3 Resultado total de circulaciones de los análisis de los Programas de Estudios y Textos Escolares.....	179
4.2.3 Resultado generales.....	184
<b>CAPÍTULO 5 .....</b>	<b>187</b>
<b>CONCLUSIONES Y PROYECCIONES .....</b>	<b>187</b>
<b>5.1 Conclusiones .....</b>	<b>187</b>
5.1.1 Tercero Básico .....	187
5.1.2 Cuarto Básico.....	189
5.1.3 Conclusiones finales .....	191
<b>5.2 Limitaciones del estudio .....</b>	<b>195</b>

<b>5.3 Proyecciones .....</b>	<b>196</b>
<b>Referencias bibliográficas .....</b>	<b>198</b>

## GLOSARIO

- [INS-DIS]:** Plano Instrumental Discursivo.
- [SEM-DIS]:** Plano Semiótico Discursivo.
- [SEM-INS]:** Plano Semiótico Instrumental.
- [SEM-REF]:** Semiplano Semiótico Referencial.
- COPISI:** Concreto, pictórico y simbólico.
- ETM:** Estudio de Trabajo Matemático.
- ETM<sub>G</sub>:** Estudio de Trabajo Matemático Geométrico.
- GDD:** Guía Didáctica del Docente.
- GI:** Geometría Natural.
- GII:** Geometría Axiomática Natural.
- GIII:** Geometría Axiomática Formal.
- IEA:** Asociación Internacional por la Evaluación del Logro Educativo.
- LGE:** Ley General de Educación.
- LOCE:** Ley Orgánica Constitucional de Enseñanza.
- MINEDUC:** Ministerio de Educación.
- NT1:** Nivel de Transición uno.
- OA:** Objetivo de Aprendizaje.
- OAT:** Objetivo de Aprendizaje Transversal.
- OCDE:** Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico.
- PISA:** Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes.
- RAE:** Real Academia Española.
- RDC:** Recursos Digitales Complementarios.
- SIMCE:** Sistema de Medición de la Calidad de la Educación.
- TAD:** Teoría Antropológica de lo Didáctico.
- TIMSS:** Tendencias en el Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias
- UNESCO:** Organización de las Naciones Unidas por la Educación, la Ciencia y la Cultura.
- UNICEF:** Fondo de las Naciones Unidas para la Infancia.

## INDICE DE FIGURAS

<i>Figura 1.</i> Tendencia - Matemática. Extraído del Informe PISA 2015.....	32
<i>Figura 2.</i> Niveles de desempeño en contexto - Matemática. Informe PISA 2015.....	33
<i>Figura 3.</i> Resultados generales Matemática 4° según Niveles de desempeño.....	35
<i>Figura 4.</i> Progresión de los resultados Chile en TIMSS, según tipo de dependencia. ....	36
<i>Figura 5.</i> Evaluaciones de Aprendizaje Simce Matemática 4° Básico. Extraído del Informe Resultados Educativos 2016.....	37
<i>Figura 6.</i> Progresión puntajes SIMCE según Niveles de Logros. Gráfico adaptado del Informe Resultados Educativos 2016.....	40
<i>Figura 7.</i> Diagrama de sistema de enseñanza, stricto sensu. (Fuente: Chevallard, 1991, p.28) ....	46
<i>Figura 8.</i> Diagrama del Espacio de Trabajo Matemático (Fuente: Kuzniak, 2011).....	55
<i>Figura 9.</i> Diagrama del Espacio de Trabajo Matemático Geométrico (Fuente: Kuzniak, 2011) .....	62
<i>Figura 10.</i> Génesis que articulan el ETM (Fuente: Kuzniak 2011) .....	67
<i>Figura 11.</i> Circulación completa del ETM <sub>G</sub> (Fuente: Kuzniak & Nechache, 2015) .....	70
<i>Figura 12.</i> Circulación plano [Sem – Ins] (Fuente: Kuzniak & Nechache, 2015) .....	71
<i>Figura 13.</i> Circulación plano [Ins – Dis] (Fuente: Kuzniak & Nechache, 2015) .....	71
<i>Figura 14.</i> Circulación plano [Sem – Dis] (Fuente: Kuzniak & Nechache, 2015).....	71
<i>Figura 15.</i> Semiplano Semiótico-referencial [Sem-ref] (Fuente: Pizarro,2018) .....	73
<i>Figura 16.</i> Etapas del proceso de investigación documental. ....	82
<i>Figura 17.</i> Ficha: Referencia bibliográfica del texto de estudio utilizado en el análisis de la investigación.....	85
<i>Figura 18.</i> Ficha: Referencia bibliográfica del texto de estudio utilizado en el análisis de la investigación.....	86
<i>Figura 19.</i> Ficha: Referencia bibliográfica del texto de estudio utilizado en el análisis de la investigación.) .....	86
<i>Figura 20.</i> Ficha: Referencia bibliográfica del texto de estudio utilizado en el análisis de la investigación.....	86
<i>Figura 21.</i> Ficha de análisis de las circulaciones presentes en las actividades seleccionadas para cada curso.....	89

<i>Figura 22.</i> Ficha de análisis de las circulaciones presentes en las actividades que poseen más de una circulación, seleccionadas para cada curso. ....	91
<i>Figura 23.</i> Ficha: Objetivos de Aprendizaje que involucran el trabajo de triángulo .....	91
<i>Figura 24.</i> Circulación planos semiótico- instrumental y epistemológico.....	99
<i>Figura 25.</i> Actividad 1.....	106
<i>Figura 26.</i> Actividad 2.....	108
<i>Figura 27.</i> Actividad 3.....	110
<i>Figura 28.</i> Actividad 4.....	116
<i>Figura 29.</i> Actividad 5 .....	119
<i>Figura 30.</i> Actividad 6 del Texto del estudiante.....	126
<i>Figura 31.</i> Actividad 7 del Cuaderno de ejercicios .....	129
<i>Figura 32.</i> Actividad 8 del Texto del estudiante.....	131
<i>Figura 33.</i> Actividad 9 del Texto del estudiante. ....	133
<i>Figura 34.</i> Actividad 10 del Texto del estudiante.....	135
<i>Figura 35.</i> Actividad 11 del Texto del estudiante.....	138
<i>Figura 36.</i> Actividad 12 del Texto del estudiante.....	140
<i>Figura 37.</i> Actividad 13 del Texto del estudiante.....	142
<i>Figura 38.</i> Actividad 14 del Cuaderno de ejercicios. ....	144
<i>Figura 39.</i> Actividad 15 del Cuaderno de ejercicios. ....	149
<i>Figura 40.</i> Actividad 16 del Cuaderno de ejercicios. ....	152
<i>Figura 41.</i> Actividad 17 del Texto del estudiante.....	155
<i>Figura 42.</i> Actividad 18 del Texto del estudiante.....	157
<i>Figura 43.</i> Actividad 19 del Texto del estudiante.....	159
<i>Figura 44.</i> Actividad 20 del Cuaderno de ejercicios. ....	161
<i>Figura 45.</i> Actividad 21 del Cuaderno de ejercicios. ....	163
<i>Figura 46.</i> Porcentaje de las actividades del programa de Estudio según tipo de circulación para tercero básico.....	169
<i>Figura 47.</i> Porcentaje de las actividades de los textos escolares según tipo de circulación para tercero básico.....	170
<i>Figura 48.</i> Similitud entre el ETM <sub>G</sub> de referencia y ETM <sub>G</sub> idóneo para tercero básico .....	174

<i>Figura 49.</i> Porcentaje de las actividades del programa de Estudio según tipo de circulación para cuarto básico.....	177
<i>Figura 50.</i> Porcentaje de las actividades de los textos escolares según tipo de circulación para cuarto básico.....	178
<i>Figura 51.</i> Similitud entre el ETM <sub>G</sub> de referencia y ETM <sub>G</sub> idóneo para cuarto básico. ....	182

## INDICE DE TABLAS

Tabla 1.....	34
<i>Aspectos metodológicos: niveles de desempeño</i>	
Tabla 2.....	38
<i>Descripción de los Niveles de Logros de los puntajes SIMCE</i>	
Tabla 3.....	41
<i>Descripción de los contenidos mínimos abarcados en cada Nivel de Estándares de Aprendizaje.</i>	
Tabla 4.....	43
<i>Requisitos mínimos establecidos por el Ministerio</i>	
Tabla 5.....	52
<i>Comisión evaluadora de selección de textos 2018</i>	
Tabla 6.....	71
<i>Simbología de los diagramas de las circulaciones en el ETM.</i>	
Tabla 7.....	87
<i>Criterios de inclusión y exclusión para seleccionar los recurso de análisis</i>	
Tabla 8.....	92
<i>Verbos de las consignas según circulación</i>	
Tabla 9.....	93
<i>Resumen de las circulaciones</i>	
Tabla 10.....	96
<i>Escala de apreciación para determinar el grado de similitud entre el ETM<sub>G</sub> de referencia y ETM<sub>G</sub> idóneo</i>	
Tabla 11.....	98
<i>Objetivos de Aprendizaje que involucran el trabajo de triángulo en tercer año básico</i>	
Tabla 12.....	101
<i>Verbos de las consignas según circulación</i>	
Tabla 13.....	102
<i>Objetivos de Aprendizaje que involucran el trabajo de triángulo en cuarto año básico</i>	

Tabla 14.....	104
<i>Desglose de la circulación del OA 17</i>	
Tabla 15.....	105
<i>Verbos extraídos de las consignas de cada OA según circulación</i>	
Tabla 16.....	114
<i>Resumen de las circulaciones de tercero básico</i>	
Tabla 17.....	115
<i>Verbos extraídos de las consignas de cada OA según circulación</i>	
Tabla 18.....	122
<i>Resumen de las circulaciones de tercero básico</i>	
Tabla 19.....	123
<i>Verbos extraídos de las consignas de cada OA según circulación</i>	
Tabla 20.....	146
<i>Resumen de las circulaciones de tercero básico</i>	
Tabla 21.....	147
<i>Verbos de las consignas según circulación</i>	
Tabla 22.....	166
<i>Resumen de las circulaciones de tercero básico</i>	
Tabla 23.....	167
<i>Verbos de las consignas según circulación</i>	
Tabla 24.....	172
<i>Resultados de circulaciones de los Programas de Estudio y Textos Escolares de Tercero Básico</i>	
Tabla 25.....	175
<i>Verbos de las consignas según circulación para Tercero Básico</i>	
Tabla 26.....	180
<i>Resultados de circulaciones de los Programas de Estudio y Textos Escolares de Cuarto Básico</i>	
Tabla 27.....	183
<i>Verbos de las consignas según circulación para Cuarto Básico</i>	

## INTRODUCCIÓN

Según investigaciones realizadas por Espinoza, Barbé, Mitrovich y Rojas (2007) se identificaron “una serie de disfunciones de carácter curricular que podrían dificultar la enseñanza de la geometría en las escuelas y, por tanto, el aprendizaje de los niños” (p.1). A lo largo de la historia de la Educación en Chile, el área de las matemáticas ha sido un tema estereotipado y lleno de emocionalidades preconcebidas. Por su parte, el Currículum Nacional Chileno, declara su enfoque en las adquisición de habilidades lógicas matemáticas por sobre la mera adquisición de contenidos repetitivos y memorísticos. Sin embargo, tras los resultados de aprendizajes que proporcionan las pruebas estandarizadas, tanto nacionales como internacionales, los estudiantes chilenos, en un rango de diez años, no han adquirido las habilidades mínimas declaradas por los estándares de aprendizajes internacionales, mientras que en el ámbito nacional, casi la mitad de los estudiantes chilenos no ha desarrollado las competencias básicas (bajo el nivel 2) (Informe PISA, 2015). Por estas razones, es que diversos autores han investigado teorías para buscar los argumentos de estas deficiencias en la adquisición de los contenidos relacionados a las matemáticas y el bajo nivel del desarrollo de las habilidades ligados a ésta.

Kuzniak (2006), establece un marco teórico en respuesta a estas deficiencias y bajos resultados en el área señalada. Esto ha sido, mediante la recopilación de varios autores que la avalan. El Espacio de Trabajo Matemático (ETM) es un proceso complejo y progresivo en el que se articulan todos los elementos matemáticos para el desarrollo del pensamiento que utiliza enfoques existentes en el dominio, y que responde a una manera de utilizar lo ya existente en el campo de las didácticas de las matemáticas, proporcionando una herramienta para el estudio del trabajo matemático de los estudiantes y profesores en el ámbito escolar con el objetivo de comprender mejor, lo que se pone en juego en un marco escolar.

El espacio concebido de esta manera designa un ambiente pensado y organizado que facilita el trabajo de los individuos al resolver problemas matemáticos, es decir,

son todos los elementos que, desde el punto de vista didáctico, se movilizan con el fin de facilitar el trabajo del individuo en la resolución de situaciones problemáticas (Pizarro, 2018).

Además Chevallard (1991), plantea la transposición didáctica como una teoría que estudia los diversos agentes involucrados en el proceso de enseñanza-aprendizaje. “La transposición didáctica, se remite al paso del saber sabio al saber enseñado, y por lo tanto a la distancia eventual, obligatoria que los separa”. (Chevallard, 1991, p.16) Es decir, para que la enseñanza de un determinado elemento de saber sea meramente posible, ese elemento deberá haber sufrido ciertas deformaciones, que lo harán apto para ser enseñado. “El saber-tal-como-es-enseñado, es el saber enseñado, es necesariamente distinto del saber-inicialmente-designado-como-el-que-debe-ser-enseñado, el saber a enseñar”. (Chevallard, 1991, p.16-17). Para ello, establece cinco actos que articulan el sistema educativo: saber sabio, objetos a enseñar, saber a enseñar, saber escolar y saber enseñado.

En consecuencia, la relación existente entre ambas teorías, Kuzniak (2011) citado en Pizarro (2018) señala que los procesos de transposición didáctica realizados en el trabajo matemático, en el ámbito escolar, se encuentran articulados y relacionados con los distintos niveles del espacio de trabajo matemático. En este contexto, es importante estudiar esa articulación en base a los antecedentes que presenta la Educación Chilena, sobre todo en la educación básica, para el área de las matemáticas.

Resulta importante investigar dicha articulación, específicamente en el eje de geometría, en el objeto matemático triángulo. Por esta razón, es que la presente investigación centra su interés en realizar el análisis del Espacio de Trabajo Matemático Geométrico (ETM<sub>G</sub>) del segundo y tercer acto de la transposición didáctica, para tercero y cuarto básico. Es decir, analizar las circulaciones presentes en tres instancias: las consignas de los Objetivos de Aprendizaje, en las actividades propuestas por los Programas de Estudio y por último las actividades presentes en los Textos Escolares de estudio en la muestra y cursos señalados anteriormente. La importancia radica en que es el término del primer ciclo de la enseñanza básica,

donde los estudiantes construyen la base de los contenidos mínimos exigidos por el Ministerio de Educación. Además, este análisis profundiza y se hace cargo de aspectos que no están presente en la investigación de Pizarro (2018) *“El trabajo geométrico en clases de séptimo básico en Chile: un estudio de casos sobre la enseñanza de los triángulos”*.

El presente estudio, posee un paradigma cualitativo, mediante un procedimiento de investigación documental, la cual se define como un “proceso metódico y formal que facilita y apoya el acceso ágil y sistematizado al producto de investigación científicas, reportado en fuentes documentales” (Chong de la Cruz, 2007). A partir de aquello, se estructura en cinco capítulos: planteamiento del problema; marco teórico; metodología; análisis y resultados; y conclusiones y proyecciones.

A continuación, se invita a profundizar sobre el tema señalado, con el fin de ser un aporte para los estudios y mejoramiento en la entrega de calidad de la educación, de parte de todos y cada uno de los agentes involucrados en el Sistema Educativo Chileno.

# CAPÍTULO 1

## PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Los puntos que serán desarrollados a continuación, son fuentes bibliográficas fundamentales que incentivan la realización de la presente investigación, en donde coexisten razones cuantitativas y cualitativas que la sustentan. Cuantitativamente, están los resultados de las pruebas estandarizadas siendo las pruebas Sistema de Medición de la Calidad de la Educación (SIMCE), el Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes (PISA) y Tendencias en el Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias (TIMSS). Estas evaluaciones miden el nivel de calidad de la educación alcanzada por Chile en comparación a otros países del mundo. Las pruebas descritas anteriormente, poseen estándares de aprendizaje similares y comparables. Los organismos encargados de medir estos resultados, son el Ministerio de Educación, el Consejo Nacional de Educación, la Agencia de Calidad de la Educación y la Superintendencia de Educación. Todo lo anteriormente descrito se sustenta bajo la Ley N° 20.370 o, Ley General de Educación (LGE).

### 1.1 Factores que suscitan la investigación

En Chile, existen diversos tipos de pruebas estandarizadas, tanto nacionales como internacionales, que permiten determinar los niveles de calidad de educación alcanzada por los niños y niñas de todos los niveles educacionales existentes. En el ámbito nacional, se realiza mediante la aplicación de la prueba SIMCE, siendo ésta, la primera prueba rendida al terminar el primer ciclo de enseñanza regular, es decir, cuarto año básico. Internacionalmente esta medición se realiza por medio de diferentes pruebas, que para efectos de esta investigación se han seleccionado solo dos. Una de éstas es la prueba PISA, que si bien, no corresponde al rango etario de la investigación, es una evaluación realizada a jóvenes de quince años, donde se evalúa los niveles de aprendizajes adquiridos cuando éstos ya han terminado su

enseñanza básica. Posteriormente la prueba TIMSS, evalúa a niveles escolares correspondientes a 4° y 8° básico.

Independiente de la naturaleza de la evaluación realizada a los niños y jóvenes que están inmersos en el sistema educacional chileno, los resultados obtenidos no son los óptimos ni deseables a los cuales se pretende lograr. Al ser comparados los promedios de los puntajes SIMCE de todas las disciplinas rendidas en la última década una de las áreas más descendidas es la de matemáticas. Lo anteriormente mencionado, lleva a la reflexión del por qué existen estos bajos y continuos resultados. Son años de evaluaciones descendidas que se encasillan en un Nivel de Elemental respecto a los Estándares de Aprendizajes nacionales, y a la categoría “fuera de rango”, es decir, no alcanzando el mínimo de aprendizajes requeridos a nivel internacional.

Según investigaciones realizadas por Espinoza, Barbé, Mitrovich y Rojas (2007) identificaron “una serie de disfunciones de carácter curricular que podrían dificultar la enseñanza de la geometría en las escuelas y, por tanto, el aprendizaje de los niños” (p.1). Por medio de la teoría y observaciones adquiridas en la formación inicial docente, es que estas premisas se hacen más evidentes y son el motivo principal de la presente investigación. Las observaciones cualitativas fueron realizadas a lo largo de las prácticas docentes que comprenden un tiempo de nueve semestres, donde se evidenciaron factores tales como: las Bases Curriculares de matemáticas (2012) sugeridas por el Ministerio de Educación, que está organizada en cuatro unidades divididas en cinco ejes temáticos: números y operaciones; patrones y álgebra; geometría; medición y por último datos y probabilidades. El eje con más objetivos de aprendizajes relacionados es números y operaciones, con un total de diez; le sigue geometría y medición con tres cada uno; luego, patrones y álgebra y, datos y probabilidades con dos cada uno. No obstante, los contenidos del eje de geometría, por decisión de la mayoría de los docentes observados, están planificados para ser entregados en la última unidad, donde el factor tiempo juega en contra, influyendo en la profundidad de los contenidos e importancia del eje.

El segundo factor observado es, la metodología actual utilizada por los docentes para la enseñanza del eje de geometría, puesto que está muy alejada de la teoría existente que pretende generar en los estudiantes un razonamiento matemático pertinente al nivel educacional evaluado en las pruebas estandarizadas existentes. Pero no solamente es la metodología de los profesores, sino que también forma parte de la noosfera, propuesta por Chevallard (1991), donde se desarrollan los conflictos, negociaciones y donde maduran las soluciones del funcionamiento didáctico.

En la noosfera, pues, los representantes del sistema de enseñanza, con o sin mandato (desde el presidente de una asociación de enseñantes hasta el simple profesor militante), se encuentran, directa o indirectamente, (a través del libelo denunciador, la demanda conminatoria, el proyecto transaccional o los debates ensordecidos de una comisión ministerial), con los representantes de la sociedad (Chevallard, 1991, p. 28-29)

El tercer factor observado, se remite a la utilización de los Textos de Estudio, que para el presente año apunta a tres millones ciento veinticinco mil estudiantes beneficiados con éstos. De las prácticas realizadas, cada establecimiento contaba con dicho material de estudio, que sujeto al Decreto N°495:

La política pública del Estado chileno en materia de textos escolares, establece la entrega sistemática y gratuita de textos de calidad, para los sectores prioritarios del currículum, a todos los estudiantes y profesores de los establecimientos educacionales regidos por el decreto con fuerza de ley N° 2, de 1998, del Ministerio de Educación, y por el decreto ley N° 3.166, de 1980 (Decreto N° 495, 2015).

Es por esta razón, que es importante investigar y contrastar con la teoría los niveles en los cuales se enmarcan las actividades de los textos, diseñadas para alcanzar los aprendizajes mínimos obligatorios que exige el Ministerio de Educación.

Al respecto, Espinoza et al. (2007) mencionan lo siguiente:

(...) parte importante de las dificultades en la enseñanza de la geometría en Básica están relacionadas con el tipo de actividad matemática que se propone en los programas oficiales y libros de texto para que los estudiantes realicen, y con las condiciones bajo las cuales los profesores deben gestionar sus procesos de estudio en las escuelas (p.1).

El siguiente factor proviene de un contraste entre la teoría y la realidad, dando origen a una causa - efecto. Si bien, las Bases Curriculares promueven la enseñanza de un razonamiento matemático en los estudiantes, en donde son ellos mismos partícipes de su proceso de enseñanza y construcción de un aprendizaje significativo, éstos, al estar insertos en clases conductistas, repetitivas y memorísticas, sin una transposición adecuada, pierden el interés y el sentido de la enseñanza, cayendo en la estereotipación de la asignatura, repercutiendo en la disposición emocional y psicológica con la que se enfrentan a la asignatura.

En los siguientes puntos, se presentan cada una de las motivaciones que suscita esta investigación, ahondando tanto en aquellos factores que sirven como referentes contextuales del modelo educacional, como también aquellos que presentan pruebas cuantitativas respecto de la implementación del modelo de enseñanza nacional. Así como también, la importancia y responsabilidad de la Noosfera, sus decisiones y por ende, sus repercusiones en los resultados de enseñanza de la educación en Chile, antes del cuarto acto de la transposición didáctica de Chevallard.

## **1.2 Antecedentes internacionales de la educación**

La organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO) fue creada en mil novecientos cuarenta y cinco con la misión de contribuir a la paz, la erradicación de la pobreza, el desarrollo sostenible y el diálogo intercultural, con la educación como uno de los medios primordiales de alcanzar ese fin (UNESCO, 2011). La declaración Universal de Derechos Humanos de 1948 proclama en el artículo 26 que “toda persona tiene derecho a la educación”, mientras que, en la Convención sobre los Derechos del Niño (Unicef, 1989) en su artículo 28

y 29, consagran el derecho a la educación y define los objetivos de ésta, enfatizando la enseñanza primaria obligatoria y gratuita para todos los niños, propiciando el desarrollo de las aptitudes y capacidades, con el fin de prepararlos para la vida adulta.

La UNESCO, es la única organización del sistema de las Naciones Unidas que dispone de un mandato que abarca todos los aspectos de la educación (UNESCO, 2011), manteniendo su compromiso a través de una visión holística y humanista de la educación de calidad en todo el mundo. Por consiguiente, recibir una educación de calidad a lo largo de toda la vida es uno de los derechos congénitos de cada niño, mujer u hombre (UNESCO, 2011). Así, tras la Convención de los Derechos del Niño (Unicef, 1989), Chile ratificó este convenio internacional el 14 de agosto de 1990, el cual se rige por cuatro principios fundamentales: la no discriminación, el interés superior del niño, su supervivencia, desarrollo y protección, así como su participación en decisiones que le afectan (Unicef, 2014). Aprendiendo todo aquello que desarrolle al máximo sus capacidades, tanto intelectuales como físicas y sociales, recibiendo educación, que debiese ser gratuita y obligatoria para todos.

En el Foro Mundial sobre la educación desarrollado por la UNESCO, en abril del año 2000, se realizó una adaptación del Marco de Acción de Dakar - Educación para todos: cumplir nuestros compromisos comunes, incluyéndose la evaluación de los logros, enseñanzas y fracasos del último decenio. Esta evaluación constituye un instrumento de medición de la situación de la educación básica en el mundo.

Los resultados se miden cuantitativamente por medio de niveles de logro, basado en ciertos objetivos mínimos que abarcan las necesidades básicas del aprendizaje y lo expresado en la Declaración Mundial sobre la Educación para Todos. A esto se le conoce mundialmente como educación de calidad.

La calidad es un valor que requiere definirse en cada situación y no se puede entender como un valor absoluto. Los significados que se le atribuyen a la calidad de la educación dependerán de la perspectiva social desde la cual se hace, de los sujetos que la enuncian (profesores o padres de familia o agencia de planificación

educativa, etc.) y desde el lugar en que se hace (práctica educativa o planificación ministerial, por ejemplo). “El concepto de calidad, en tanto significante, es referente de significados históricamente producidos (...), conlleva posicionamiento político, social y cultural frente a lo educativo”. (Edwards, 1991, p 15-16).

La constitución de mil novecientos ochenta de Chile, se refiere al concepto de calidad como “la educación debe propender a asegurar que todos los alumnos y alumnas, independientemente de sus condiciones y circunstancias, alcancen los objetivos generales y los estándares de aprendizaje que se definan en la forma que establezca la ley” (Ley N° 20370, 2009).

### **1.3 Antecedentes constitucionales de la educación chilena**

El derecho fundamental y prerrequisito para el desarrollo humano, es decir, el derecho que toda niña y todo niño tenga acceso a una educación de calidad, está salvaguardado en el artículo 19 de la Constitución Política de 1980 de la República y, sustentada en la Ley N° 20.370 o, Ley General de Educación (LGE), ley chilena que establece la normativa en materia de educación, publicada el 12 septiembre del 2009 en el Diario Oficial.

La LGE deroga la antigua Ley Orgánica Constitucional de Enseñanza (LOCE), conllevando modificaciones en cuanto a proceso de admisión curricular y reconocimiento oficial de los establecimientos educacionales. Por consiguiente, establece las responsabilidades que cada ente de la comunidad educativa conlleva en el proceso de educación. Así, y tal como se explicita en el artículo 6,

Es deber del Estado propender a asegurar una educación de calidad y procurar que ésta sea impartida a todos, tanto en el ámbito público como en el privado. Corresponderá al Ministerio de Educación, al Consejo Nacional de Educación y a la superintendencia de Educación, en el ámbito de sus competencias, la administración del Sistema Nacional de Aseguramiento de la Calidad de la Educación, de conformidad a las normas establecidas en la ley. (Ley N°20.370, 2009)

### **1.3.1 Estructura del sistema educacional chileno**

Según el artículo 7 de la Ley n° 20.370, el sistema educacional chileno, se divide en distintas organizaciones que velan para el cumplimiento de la Ley General de Educación (LGE), con el objetivo de contribuir al mejoramiento de la calidad de educación.

Velando por el buen funcionamiento y apuntando a una educación de calidad resguardado en la constitución, el sistema educativo chileno, se estructura de la siguiente manera.

#### **1.3.1.1 Ministerio de Educación**

El Ministerio de Educación (Mineduc) es el principal encargado de fomentar el desarrollo de la educación en todos sus niveles y de proteger los derechos de los estudiantes, en los distintos tipos de establecimientos, tanto privados como públicos. En estos últimos, se debe otorgar una educación gratuita y de calidad, fundada en un proyecto educativo público, laico, respetuoso y que permita el acceso a toda la población, promoviendo la inclusión social y equidad. Es por esto, que la misión del Mineduc, es garantizar un sistema educativo inclusivo y de calidad que colaboren a una formación integral y permanente a cada uno de sus estudiantes, desde la educación parvularia hasta la superior, para que en un futuro estos puedan ser agentes activos dentro de la sociedad (Ley n° 20.370, 2009).

#### **1.3.1.2 Consejo Nacional de Educación**

El Consejo Nacional de Educación desarrolla sus funciones a través del cumplimiento de su misión, esta consiste en cautelar, promover y asegurar la calidad de educación escolar y superior; la evaluación de variadas propuestas educacionales, ya sea de instituciones y de organismos públicos de educación; como también la entrega oportuna de información a los estudiantes y sus familias, y a toda la comunidad educativa. Finalmente, esta institución es la encargada de avalar los instrumentos evaluativos que presenta el Ministerio de Educación o la Agencia de Calidad para los distintos niveles educacionales.

### **1.3.1.3 Agencia de Calidad de la Educación**

Según el artículo 37 de la Ley n° 20.370, la Agencia de Calidad de la Educación es la institución encargada de diseñar e implementar el Sistema Nacional de Evaluación, que mide el logro de aprendizaje de los contenidos mínimos obligatorios que propone el Ministerio de Educación plasmados en las Bases Curriculares. Para dicho sistema de evaluación, la Agencia debe contar con instrumentos válidos y confiables, que se apliquen de forma periódica, en los niveles de educación básica y media en todos los establecimientos educacionales de enseñanza regular del país, e informar los resultados sobre la calidad y equidad del logro de los aprendizajes alcanzados a nivel nacional.

### **1.3.1.4 Superintendencia de Educación**

La Superintendencia de Educación es el organismo encargado de fiscalizar, de acuerdo a la ley, a los sostenedores de los establecimientos educacionales que están reconocidos de manera oficial por el Estado. Es decir, debe fiscalizar que los sostenedores se ajusten a la leyes, reglamentos e instrucciones que plantea la Superintendencia y la legalidad del uso de los recursos de los establecimientos que reciban aporte estatal. Además, su labor es promocionar, informar y educar, en el ámbito de sus competencias, a todos los miembros de la comunidad educativa y a la ciudadanía sobre las normativas educacionales. (Ley N° 20.529, 2011).

## **1.4 Resultados de aprendizajes de la educación chilena según pruebas estandarizadas**

La calidad de la educación en Chile al entenderse de forma cuantitativa, se evalúa por medio de la realización de diferentes pruebas, tanto nacional como internacionalmente. Para efectos de la presente investigación se consideran tres tipos de pruebas: dos internacionales: Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes (PISA) y Estudio Internacional de Tendencias en Matemática y Ciencias (TIMSS) y además una nacional, llamada Sistema de Medición de la Calidad de la Educación (SIMCE). Dichas pruebas han sido escogidas debido a que

dentro de sus objetivos está la medición de adquisición de aprendizajes y habilidades relacionadas al área de las Matemáticas.

#### **1.4.1 Resultados de aprendizajes según pruebas internacionales**

Estudiar los resultados internacionales de las pruebas permite observar los resultados de Chile en una perspectiva comparada, identificando semejanza y diferencias con otros sistemas educativos. Además, las trayectorias que han seguido los países, identificando casos exitosos que puedan servir como referencia para Chile, inspirando caminos de mejora y, finalmente, sirve para monitorear de manera externa el sistema y retroalimentar las políticas educativas (OCDE & Agencia de Calidad de la Educación, 2015).

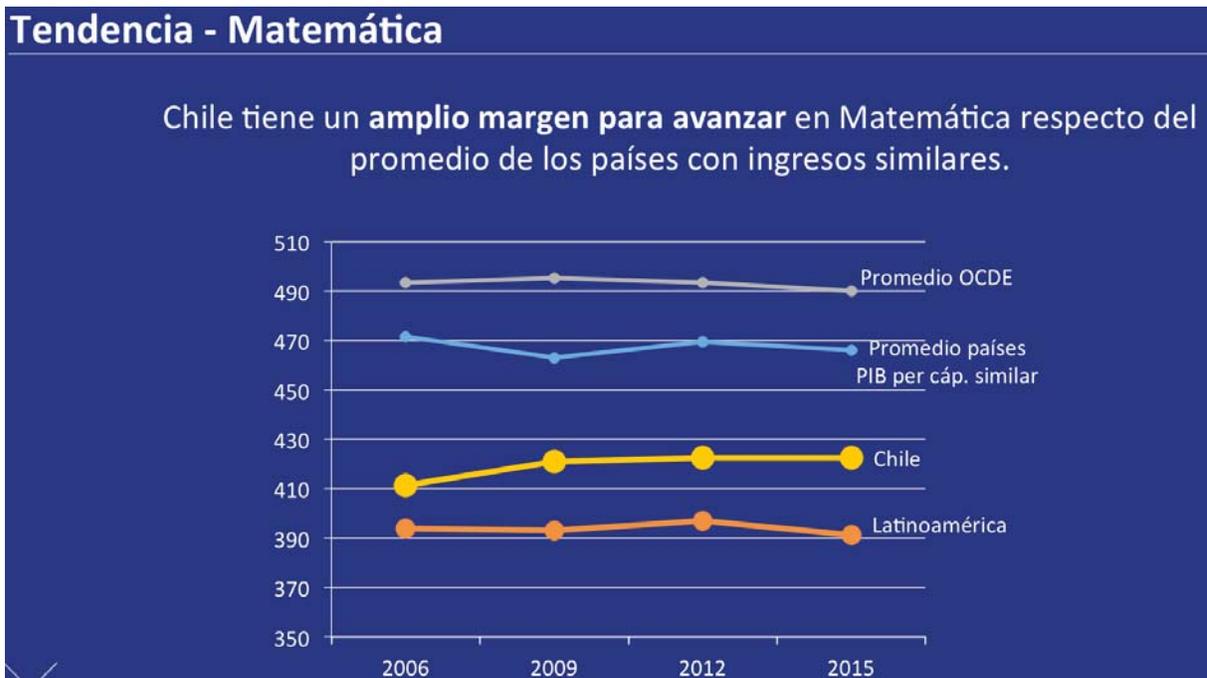
Las pruebas que se describen a continuación, corresponden a evaluaciones internacionales aplicadas a estudiantes que cumplen, entre otros requisitos, con un rango etario específico y un nivel de educación formal cursado. Por consiguiente, y si bien, ninguna de las pruebas presentadas a continuación, corresponde al rango etario desarrollado en esta investigación, pero sí representa una realidad internacional.

##### **1.4.1.2 Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes (PISA)**

El programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes (PISA) corresponde a la prueba internacional realizada por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) que evalúa las áreas de Lectura, Ciencias Naturales y Matemáticas, en aquellos estudiantes de quince años, que están llegando al final de su enseñanza formal obligatoria y que, por ende, han adquirido una gama de competencias esenciales para involucrarse de manera responsable en la sociedad que están insertos.

El programa se aplica cada tres años (desde el 2000) y, hace énfasis en cada ciclo de medición en una de las áreas anteriormente señaladas, siendo el año dos mil doce el énfasis en Matemáticas.

Chile, ha participado en PISA en los años 2001, 2006, 2009, 2012 y 2015 en sus distintos tipos de modalidades, connotando avances significativos a nivel latinoamericano. Chile es uno de los mejores resultados en Latinoamérica en Lectura, Matemáticas y Ciencias Naturales (OCDE & Agencia de Calidad de la Educación, 2015). Así como también denota un margen de promedio de resultados superiores a latinoamérica, pero inferior al margen promedio de la OCDE (ver figura 1)



*Figura 1. Tendencia - Matemática. Extraído del Informe PISA 2015.*  
 Fuente: (OCDE & Agencia de Calidad de la Educación, 2015) Disponible vía web en:  
[http://archivos.agenciaeducacion.cl/Resultados\\_PISA2015.pdf](http://archivos.agenciaeducacion.cl/Resultados_PISA2015.pdf)

Los resultados que entrega esta evaluación reportan en puntaje promedio y niveles de desempeño. Categorizando, estos últimos, en seis niveles, siendo nivel 6 el más alto y, bajo nivel 2, el más bajo. Los estudiantes que se encuentran entre el nivel 2 y nivel 6, son aquellos que tienen las competencias mínimas requeridas para participar completamente en una sociedad moderna. Mientras que, los estudiantes que se encuentran bajo el nivel 2, no alcanzan las competencias mínimas requeridas para participar completamente en una sociedad moderna (OCDE & Agencia de Calidad de la Educación, 2015).

La mirada significativa que realiza la prueba PISA respecto a las competencias alcanzadas por los estudiantes de quince años es que, casi la mitad de los estudiantes chilenos no ha desarrollado las competencias básicas (bajo el nivel 2).

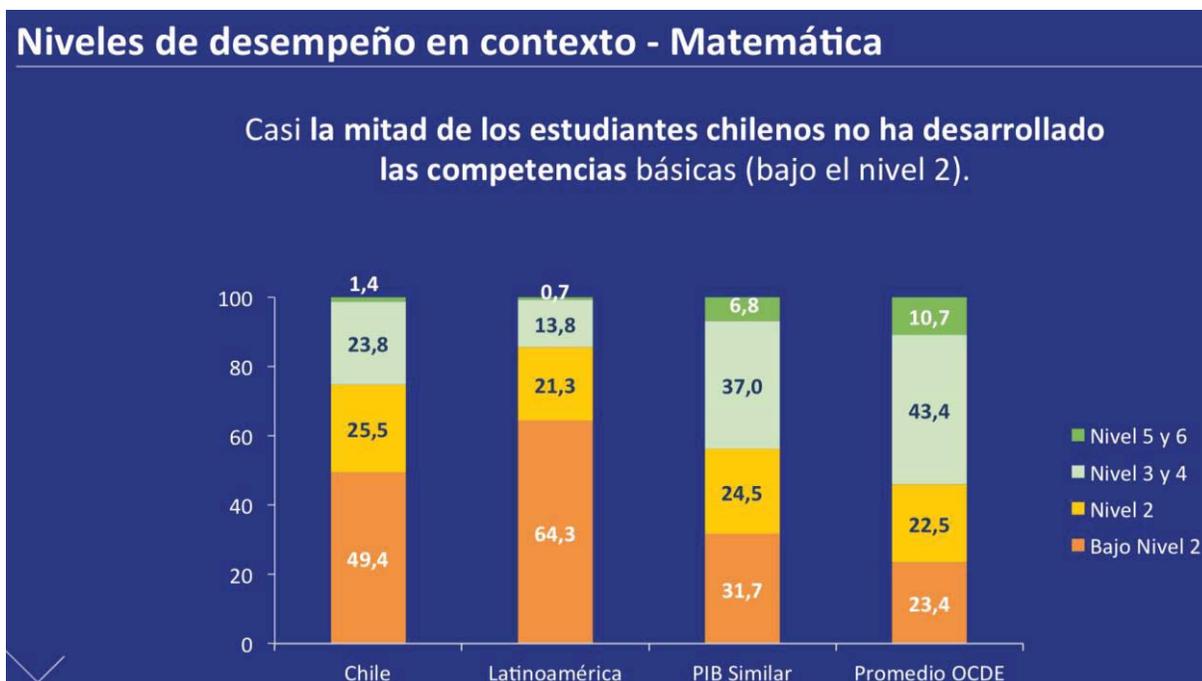


Figura 2. Niveles de desempeño en contexto - Matemática. Informe PISA 2015.  
Fuente: ([http://archivos.agenciaeducacion.cl/Resultados\\_PISA2015.pdf](http://archivos.agenciaeducacion.cl/Resultados_PISA2015.pdf))

### 1.4.1.3 Estudio Internacional de Tendencias en Matemática y Ciencias (TIMSS)

Esta evaluación, corresponde al estudio realizado por la Asociación Internacional para la Evaluación del Logro Educativo (IEA) desde el año mil novecientos noventa y cinco, siendo aplicada cada cuatro años a estudiantes de los niveles 4° y 8° básico en las áreas de Matemáticas y Ciencias Naturales. Con la finalidad de proveer información sobre el logro de la calidad alcanzada de los estudiantes en dichas áreas considerando los contextos educacionales en los cuales se desenvuelven y alcanzan dichos aprendizajes. Estos contextos educacionales son evaluados mediante cuestionarios referidos a la organización y contenidos del currículo nacional (siendo respondido por el centro encargado del estudio de cada país

participante, en el caso de Chile, por la Agencia de Calidad de la Educación) y otros que son respondidos por los establecimientos educacionales participantes.

Chile ha participado en la medición de esta prueba desde su segunda aplicación, es decir, desde el año mil novecientos noventa y nueve, incluyendo solo a los estudiantes de 8° básico. En el año dos mil once se aplica ésta medición a estudiantes de 4° básico. La última aplicación de la TIMSS fue realizada en el año dos mil quince, participando cincuenta y siete países, incluyendo a Chile. El TIMSS 2015, se aplicó a diez mil estudiantes de diferentes tipos de establecimientos educacionales a lo largo de todo el país, durante los meses de noviembre y diciembre del dos mil catorce.

Los resultados TIMSS se reportan en una escala de puntajes con un mínimo de 0 puntos y un máximo de 1000, estratificados en cuatro niveles de desempeño.

**Tabla 1**

*Aspectos metodológicos: niveles de desempeño*

<b>NIVEL</b>	<b>UMBRAL DE PUNTAJE</b>
Avanzado	Sobre 625
Alto	Sobre 550
Intermedio	Sobre 475
Bajo	Sobre 400

Fuente: ([http://archivos.agenciaeducacion.cl/TIMMS\\_presentacion\\_BAJA.pdf](http://archivos.agenciaeducacion.cl/TIMMS_presentacion_BAJA.pdf))

Los resultados generales de la evaluación TIMSS 2015 en el área de las matemáticas fueron los siguientes:

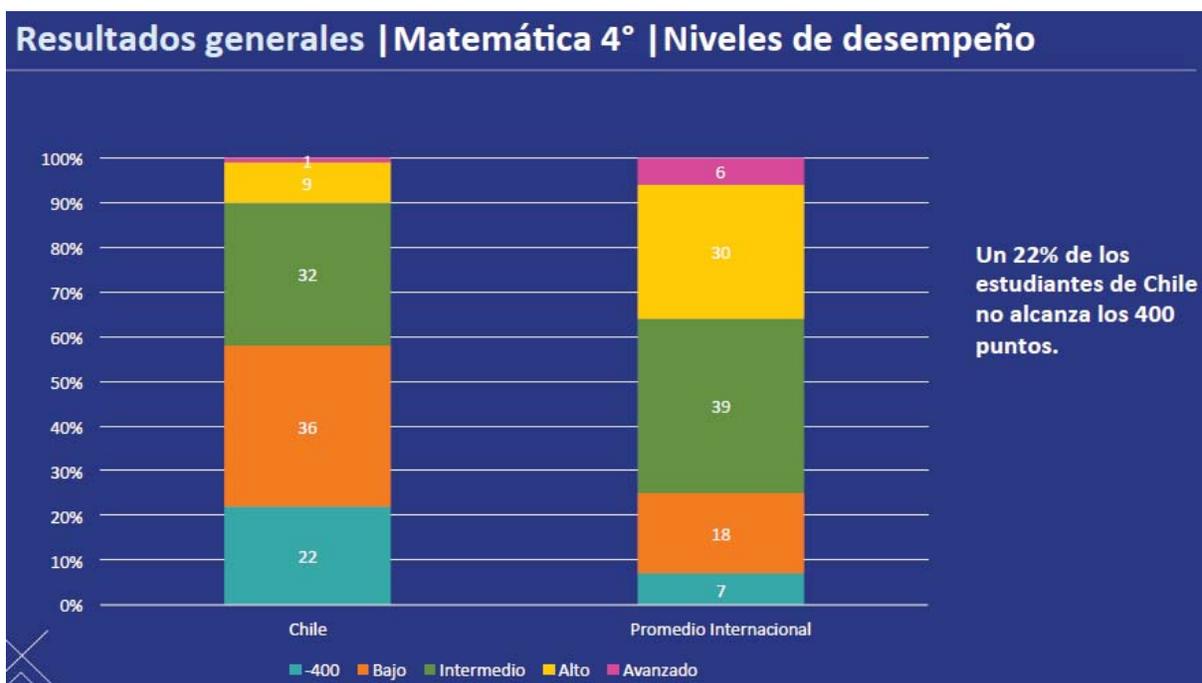
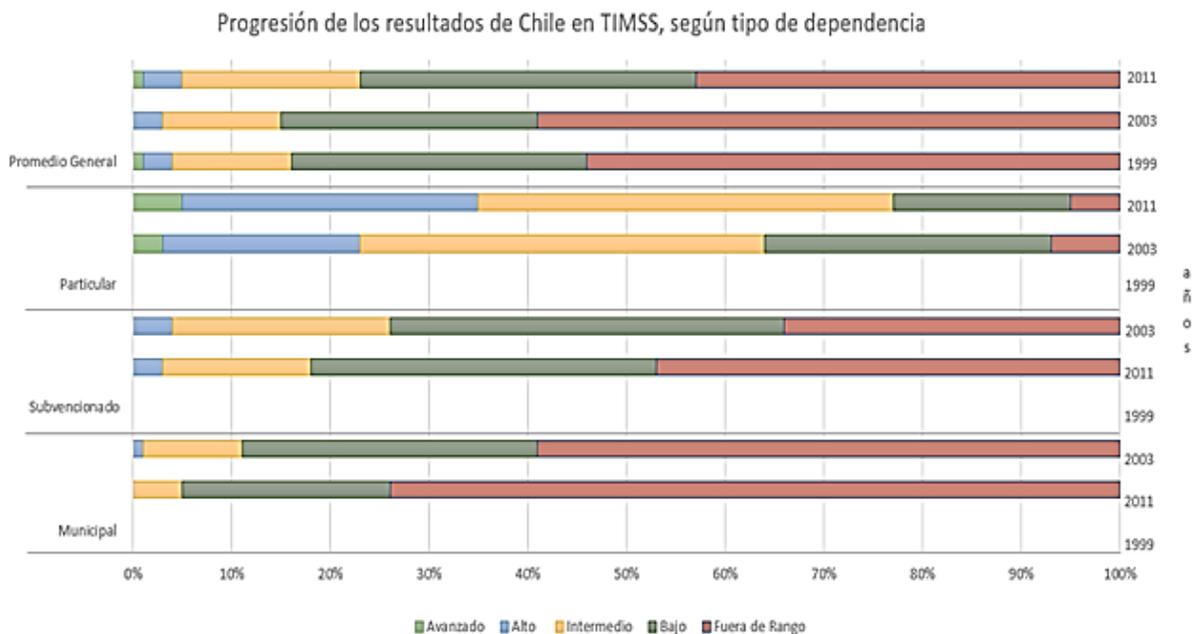


Figura 3. Resultados generales Matemática 4° según Niveles de desempeño  
 Fuente: ([http://archivos.agenciaeducacion.cl/TIMMS\\_presentacion\\_BAJA.pdf](http://archivos.agenciaeducacion.cl/TIMMS_presentacion_BAJA.pdf))

No obstante, la progresión de estos resultados no denota una mejoría significativa respecto a los años. Esto es posible de observar en la figura 4, en el cual, la cantidad de estudiantes que alcanzan el nivel “fuera de rango”, es alarmante.



*Figura 4.* Progresión de los resultados Chile en TIMSS, según tipo de dependencia. Gráfico a partir de la recopilación de información entregada en los informes TIMSS 1999, 2003 y 2011 Fuente: (Pizarro A. (2018). El trabajo geométrico en clases de séptimo básico en Chile: un estudio de casos sobre la enseñanza de los triángulos)

### 1.4.2 Resultados de aprendizajes según pruebas nacionales

La Ley General de Educación (Ley N°20.370, 2009) establece evaluaciones nacionales periódicas de carácter obligatorio, en las que se deberán someter todos los establecimientos educacionales de enseñanza regular del país.

Así, los establecimientos cuentan con información más detallada de los logros que han alcanzado los estudiantes y, a partir de ella, los docentes pueden responder preguntas del tipo: ¿Qué porcentaje de nuestros estudiantes no son capaces de enfrentarse a las tareas descritas para alcanzar el Nivel de Aprendizaje Adecuado?, ¿Qué debo reforzar para que los estudiantes que se encuentran en el Nivel de Aprendizaje Insuficiente puedan avanzar al siguiente nivel? (Ministerio de Educación, 2013, p.6).

### 1.4.2.1 Sistema de Medición de la Calidad de la Educación (SIMCE)

El Sistema de Medición de la Calidad de la Educación (SIMCE), contempla como su principal objetivo contribuir al mejoramiento de la calidad y equidad de la educación. A partir del año dos mil doce, el SIMCE pasó a ser el sistema utilizado por la Agencia de Calidad de la Educación, para medir el logro de los contenidos y habilidades del currículum vigente, en diferentes asignaturas o áreas de aprendizaje.

Para temas administrativos de esta investigación, el rango etario de estudio contempla a los estudiantes que hayan cursado el cuarto año básico durante el periodo dos mil dieciséis en colegios de dependencia municipal.

La variación del promedio de los puntajes, en un rango de doce años, contiene una variación de catorce puntos en la última década. Siendo, el promedio de los puntajes mayor alcanzado durante el año dos mil dieciséis.

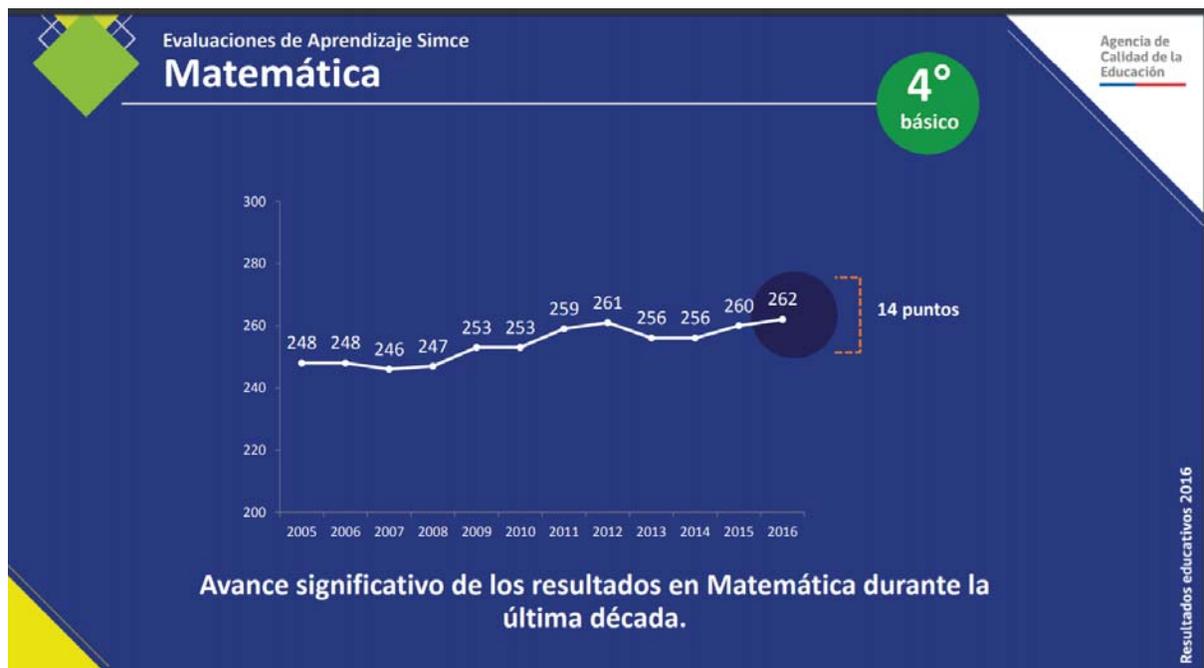


Figura 5. Evaluaciones de Aprendizaje Simce Matemática 4° Básico. Extraído del Informe Resultados Educativos 2016

(Fuente: Agencia de Calidad de la Educación, 2016) Disponible vía web en [http://archivos.agenciaeducacion.cl/ResultadosNacionales2016 .pdf](http://archivos.agenciaeducacion.cl/ResultadosNacionales2016.pdf)

### 1.4.2.1.1 Estándares de Aprendizaje

Los Estándares de Aprendizaje son una herramienta que permite determinar qué tan adecuados son los aprendizajes de los y las estudiantes en relación con los objetivos planteados en el currículum nacional (Ministerio de Educación, 2017, p.3). Éstos están compuestos por Niveles de Aprendizaje para los que se definen requisitos mínimos para alcanzarlos y sus correspondientes puntajes de corte en las pruebas (Ministerio de Educación, 2017, p.4). Dichos niveles, son entendidos como escalones que permiten determinar qué tan cerca o lejos están de alcanzar los objetivos de aprendizaje declarados en los programas de estudio.

En la siguiente tabla, se muestran los Niveles de Logros presentes en los Estándares de Aprendizaje vigentes actualmente.

**Tabla 2**

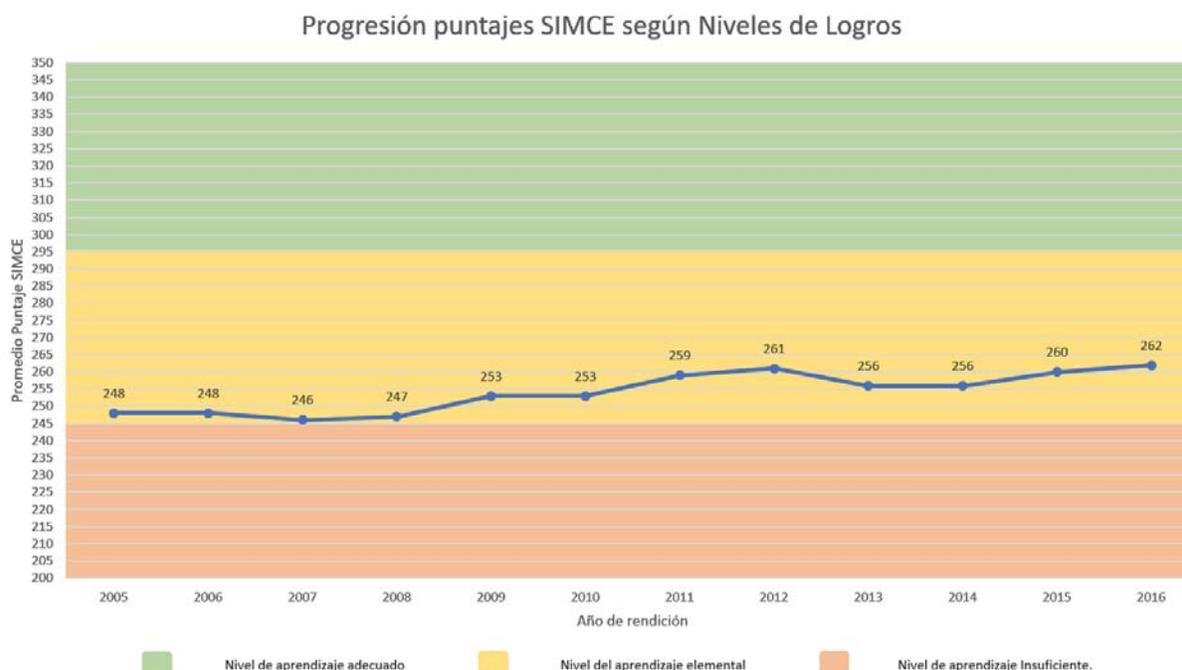
*Descripción de los Niveles de Logros de los puntajes SIMCE*

Nivel de aprendizaje adecuado	
	Los y las estudiantes, han logrado lo exigido en el currículum de manera satisfactoria . Demostrando que se han adquirido las habilidades y los conocimientos básicos estipulados en el currículum.
Puntaje SIMCE	mayor o igual a 295 puntos.
Nivel del aprendizaje elemental	
	Los y las estudiantes, han logrado lo exigido por el currículum de manera parcial. Han adquirido las habilidades y los conocimientos más elementales estipulados en el currículum.
Puntaje SIMCE	mayor a 245 puntos y menor que 295.
Nivel de aprendizaje Insuficiente.	

	<p>Los y las estudiantes, no han logrado demostrar consistentemente que han adquirido las habilidades y los conocimientos más elementales estipulados en el currículum.</p>
<p>Puntaje SIMCE</p>	<p>menor a 245 puntos.</p>

Tabla en base a la información proporcionada por el Ministerio de Educación, en los Estándares de aprendizaje. Fuente: (Ministerio de Educación. (2017). Estándares de aprendizaje Matemática sexto básico. Santiago, Chile) (Ministerio de Educación. (2013). Estándares de aprendizaje Matemática sexto básico. Santiago, Chile)

Como se señala en la tabla 2, cada uno de los Niveles de Logro es asociado a un puntaje en las pruebas SIMCE. “Es decir, hay un puntaje de corte (puntaje mínimo) que debe obtener un o una estudiante en la prueba SIMCE para alcanzar el Nivel de Aprendizaje Adecuado y un puntaje de corte para alcanzar el Nivel de Aprendizaje Elemental” (Ministerio de Educación, 2017, p.5). Esto permite ubicar los resultados de las y los estudiantes en los Niveles de logros descritos anteriormente. En la figura 6, se evidencia la progresión del promedio de puntajes SIMCE de los últimos doce años, y su ubicación dado el Nivel de Logro alcanzado tras cada aplicación, denotando el estancamiento en el Nivel de Logro Elemental.



*Figura 6.* Progresión puntajes SIMCE según Niveles de Logros. Gráfico adaptado del Informe Resultados Educativos 2016.

Fuente:(Elaboración propia grupo de trabajo).

Los Estándares de Aprendizaje están elaborados para todos aquellos cursos y asignaturas en los que se aplica la batería de pruebas SIMCE a nivel nacional. Los Estándares de aprendizaje de 4° básico se elaboraron basándose en el Marco Curricular 2002 (Decreto Supremo de Educación N° 40 de 1996, modificado por el Decreto Supremo de Educación N° 232 de 2002, y Decreto Supremo de Educación N° 439 de 2012) y en las Bases Curriculares 2012 (Ministerio de Educación, 2013, p.8). Se declara, por parte del Ministerio, que los Estándares fueron elaborados con una exigencia desafiante y, a la vez, alcanzable para servir de referentes a todos los establecimientos del país, siendo aprobados por el Consejo Nacional de Educación (Ministerio de Educación, 2013, p.9).

La presente tesis, se enmarca en el término del primer ciclo básico, comprendido entre primer y cuarto año de educación formal o regular del país y, correspondiente al primer grado en el que, actualmente, se rinde permanentemente la batería completa de pruebas SIMCE, en las disciplinas de Matemáticas, Lenguaje y Comunicación. De las disciplinas mencionadas anteriormente, y según lo declarado

hasta ahora, se presentan los Niveles de Estándares de Aprendizajes que se declaran para el área de geometría.

**Tabla 3**

*Descripción de los contenidos mínimos abarcados en cada Nivel de Estándares de Aprendizaje.*

<b>Nivel de Estándares de Aprendizaje</b>	<b>Descripción del los contenidos mínimos manejados por los estudiantes por cada Nivel</b>
<b>Nivel de Aprendizaje Adecuado</b>	<p>Los estudiantes que alcanzan el Nivel de Aprendizaje Adecuado demuestran que han adquirido las nociones geométricas y de ubicación espacial básicas propias del ciclo y que las aplican en situaciones directas y de resolución de problemas. En este sentido, son capaces de seguir y describir trayectorias en el plano con dos o más cambios de desplazamiento; reconocer una figura 3D e integrar sus vistas de frente, de lado y desde arriba; e identificar, describir y comparar figuras 2D de acuerdo con el número de sus lados y vértices, y figuras 3D, de acuerdo con la forma de sus caras, números de aristas y vértices, así como identificar sus redes. Además, logran identificar el resultado de una reflexión, una traslación y una rotación de una figura 2D en el plano; y reconocer ángulos rectos y no rectos en una representación que incluye una cuadrícula. (Ministerio de Educación, 2013, p.15)</p> <p>Entre los estudiantes que se encuentran en el Nivel de Aprendizaje Adecuado, hay un grupo que demuestra un mayor dominio de los objetivos de aprendizaje estipulados en el currículum vigente para el periodo evaluado y que sobrepasa significativamente el puntaje mínimo exigido para alcanzar el Nivel Aprendizaje Adecuado. Estos estudiantes aplican las habilidades matemáticas relativas al razonamiento matemático, específicamente, resolver problemas, modelar,</p>

	<p>argumentar y comunicar en situaciones que les son conocidas y en problemas no rutinarios que se alejan de lo practicado en la sala de clases.</p> <p>En geometría, logran estimar medidas de ángulos usando como referente ángulos de <math>45^\circ</math> y <math>90^\circ</math>; reconocer y realizar una rotación, traslación o reflexión a figuras 2D; y utilizar la imaginación espacial para anticipar y constatar formas que se generan basándose en otras, mediante procedimientos como separar diversas formas geométricas. Además, pueden percibir lo que se mantiene constante en formas geométricas de dos dimensiones sometidas a transformaciones que conservan su forma, su tamaño o ambas características. (Ministerio de Educación, 2013, p.22)</p>
<p><b>Nivel de aprendizaje Elemental</b></p>	<p>Los estudiantes que alcanzan el Nivel de Aprendizaje Elemental demuestran una adquisición parcial de las nociones geométricas y de ubicación espacial propias del ciclo, en situaciones directas o de resolución de problemas. Son capaces de identificar la localización de un objeto en un plano, usando coordenada de letra-número, e identificar representaciones de figuras 3D y reconocer en ellas vistas desde arriba o desde el frente. Además, pueden identificar y describir figuras 2D y 3D según algunas de sus propiedades, como el número de lados en las figuras 2D, y la forma de sus caras y el número de vértices en figuras 3D. Junto con lo anterior, pueden distinguir figuras simétricas y no simétricas, y el resultado de la traslación de una figura 2D. (Ministerio de Educación, 2013, p.29)</p>
<p><b>Nivel de aprendizaje Insuficiente</b></p>	<p>Los estudiantes que se encuentran en el Nivel de Aprendizaje Insuficiente, por lo general, logran identificar figuras 2D y 3D trabajadas en reiteradas ocasiones en la sala de clases, asociando su nombre con su correspondiente representación gráfica o con un objeto que posee dicha forma, cuando se las presentan en una posición habitual. (Ministerio de</p>

	Educación, 2013, p.36)
--	------------------------

Información declarada en los Estándares de Aprendizaje Matemáticas Cuarto básico 2013. Fuente: (Ministerio de Educación, 2013)

En términos tácitos, el Ministerio plantea requisitos mínimos en el dominio de la geometría.

#### Tabla 4

*Requisitos mínimos establecidos por el Ministerio*

<b>Requisitos mínimos para alcanzar el nivel de aprendizaje adecuado</b>	<b>Requisitos mínimos para alcanzar el nivel de aprendizaje elemental</b>
<p>Para alcanzar el Nivel de Aprendizaje Adecuado, los estudiantes de cuarto básico deben demostrar evidencia consistente de que comprenden los conocimientos propios del periodo evaluado y aplican dichos conocimientos y las habilidades matemáticas en situaciones directas y en problemas rutinarios de uno o dos pasos en los que se requiere seleccionar datos, organizar la información o establecer un procedimiento apropiado; de manera que pueden al menos.</p>	<p>Para alcanzar el Nivel de Aprendizaje Elemental, los estudiantes de cuarto básico deben demostrar evidencia consistente de que comprenden los conocimientos más elementales propios del periodo evaluado y aplican dichos conocimientos y las habilidades matemáticas en situaciones directas y en problemas rutinarios de un paso, con enunciados breves, en que los datos, conceptos y operación a utilizar se presentan de forma directa; de manera que pueden al menos:</p>
<ul style="list-style-type: none"> <li>•• Identificar en un plano la localización de un objeto usando coordenadas de letra-número. Seguir y describir trayectorias.</li> <li>•• Reconocer e integrar vistas de figuras 3D de frente, de lado y desde arriba.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•• Identificar en un plano la localización de un objeto usando coordenadas de letra-número.</li> <li>•• Identificar representaciones de figuras 3D y reconocer en ellas vistas desde arriba y de frente.</li> </ul>

<ul style="list-style-type: none"> <li>•• Identificar, describir y comparar figuras 2D de acuerdo al número de lados y vértices, y figuras 3D de acuerdo a la forma de sus caras, el número de aristas y vértices.</li> <li>•• Identificar redes (plantillas) de figuras 3D.</li> <li>•• Identificar el resultado de la reflexión de una figura 2D con respecto a un eje de simetría determinado.</li> <li>•• Identificar el resultado de la rotación de una figura 2D.</li> <li>•• Reconocer ángulos rectos y no rectos en una representación.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>•• Identificar y describir figuras 2D de acuerdo al número de lados, y figuras 3D de acuerdo a la forma de sus caras y el número de vértices.</li> <li>•• Distinguir figuras simétricas y no simétricas, y el resultado de la traslación de una figura 2D.</li> </ul>
--	--

Fuente: (Ministerio de Educación, 2013. Estándares de Aprendizaje Matemáticas Cuarto Básico. Santiago, Chile. p.41)

El grado en que los estándares de aprendizaje forman un todo internamente coherente y consistente con los propósitos de la Ley General de Educación, en que permiten verificar el nivel en que se logran los objetivos de las bases curriculares, en que presentan una formulación clara y un énfasis acorde con una visión actualizada de aprendizaje de calidad en las respectivas disciplina. (Acuerdo N°075, 2012, p.2)

La relevancia de los estándares radica en que, por medio de estos, no solo se evalúa el contexto nacional a nivel país, sino que además los estándares revelan aprendizajes que son valorados en estándares a nivel internacional, tanto a nivel de aprendizaje y competencias que reflejan una visión contemporánea de que lo que constituye un aprendizaje de calidad en cada disciplina (Acuerdo N°075, 2012).

### **1.5 Transposición didáctica**

La transposición didáctica, concepto desarrollado por Chevallard (1991), impulsa un traspaso equilibrado de aquel saber sabio al saber enseñado, manteniendo el equilibrio armonioso entre los entes y factores que se ven involucrados en el proceso de enseñanza y aprendizaje. “La transposición didáctica, se remite al paso

del saber sabio al saber enseñado, y por lo tanto a la distancia eventual, obligatoria que los separa”. (Chevallard, 1991, p.16) Es decir, para que la enseñanza de un determinado elemento de saber sea meramente posible, ese elemento deberá haber sufrido ciertas deformaciones, que lo harán apto para ser enseñado. “El saber-tal-como-es-enseñado, es el saber enseñado, es necesariamente distinto del saber-inicialmente-designado-como-el-que-debe-ser-enseñado, el saber a enseñar”. (Chevallard, 1991, p.16-17)

“El funcionamiento didáctico del saber es distinto del funcionamiento académico, porque hay dos regímenes del saber, interrelacionados, pero no superponibles”. (Chevallard, 1991, p.5), por ello, es capaz de proveer a sus propias necesidades en cuanto al saber que se va a enseñar.

Concretamente, los sistemas didácticos son formaciones que aparecen alrededor de un saber (designado ordinariamente por el programa) se forma un contrato didáctico que toma ese saber como objeto de un proyecto compartido de enseñanza y aprendizaje y que une en un mismo sitio a docentes (P) y alumnos (E). El entorno inmediato de un sistema didáctico está constituido inicialmente por el sistema de enseñanza, que reúne el conjunto de sistemas didácticos y tienen a su lado un conjunto diversificado de dispositivos estructurales que permiten el funcionamiento didáctico y que intervienen en él en diversos niveles.

En el funcionamiento didáctico, es donde interactúan el sistema y el entorno social, es donde se encuentran todos aquellos factores que ocupan un puesto trascendental en él y,

se enfrentan los problemas que surgen del encuentro y sus exigencias; allí se desarrollan los conflictos, se llevan a cabo las negociaciones, allí maduran las soluciones. En resumen, estamos aquí, en la esfera donde se piensa, según modalidades tal vez diferente (Chevallard, 1991, p.28).

El sistema didáctico son las formaciones que aparecen alrededor de un saber (designado por el programa) se forma un contrato didáctico que toma es

saber como objeto de un proyecto compartido de enseñanza y aprendizaje que une en un mismo sitio docente y alumnos (Chevallard, 1991, p.27).

El sistema está representado por tres lugares, el enseñante (P), los alumnos (E), el saber enseñado (S) y, las relaciones entre ellos. No obstante, el entorno inmediato de cada sistema didáctico está constituido inicialmente por el sistema de enseñanza (Chevallard, 1991, p.27).

Para esta instancia sugerí el nombre paródico de noosfera. En la noosfera, pues, los representantes del sistema de enseñanza, con o sin mandato (desde el presidente de una asociación de enseñantes hasta el simple profesor militante), se encuentran, directa o indirectamente, (a través del libelo denunciador, la demanda conminatoria, el proyecto transaccional o los debates ensordecidos de una comisión ministerial), con los representantes de la sociedad (padres de los alumnos, los especialistas de la disciplina que militan en torno de su enseñanza, los emisarios del órgano político ) (Chevallard, 1991, p.28-29)

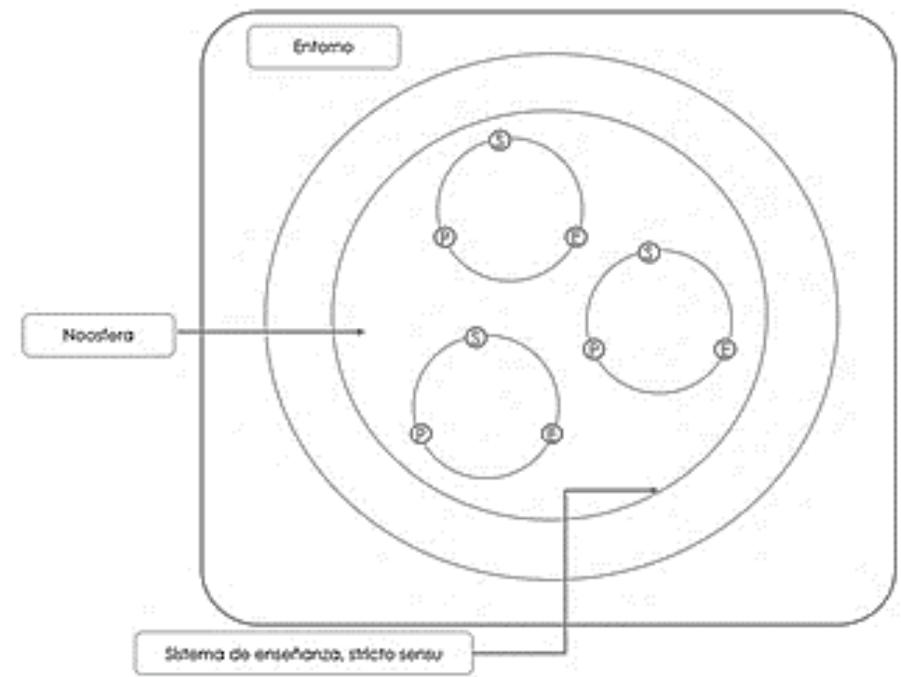


Figura 7. Diagrama de sistema de enseñanza, stricto sensu. (Fuente: Chevallard, 1991, p.28)

En la figura, el sistema de enseñanza, stricto sensu, es posible encontrar a todos aquellos que, en tanto ocupan los puestos principales del funcionamiento didáctico, se enfrentan con los problemas que surgen del encuentro con la sociedad y sus exigencias. Es decir, estamos en la esfera donde se piensa el funcionamiento didáctico. En su alrededor, la noosfera, se encuentran directa o indirectamente con los representantes de la sociedad. La noosfera es el centro operacional del proceso de transposición, que traducirá en los hechos la respuesta al equilibrio creado y comprobado (Chevallard, 1991, p.28).

De lo descrito anteriormente, y por ende, en concordancia con la teoría planteada por Chevallard (1991), el sistema educativo está articulado en estadios o “actos” que se relacionan de una manera equilibrada entre los distintos factores que actúan e interfieren en este esquema representado en la figura 7, ya descrito.

En esta transformación debe existir una coherencia. Para esto, Chevallard (1991), plantea que dentro de la transposición didáctica existen cinco actos. El primer acto es el saber sabio, los responsables de este acto son los matemáticos, quienes tienen por misión crear nuevos conocimientos que les permita resolver nuevos problemas. El segundo acto son los objetos a enseñar, es decir, los contenidos mínimos obligatorios que deben adquirir los estudiantes, los cuales están planteados en los programas de estudio. El tercer acto es el saber a enseñar y los objetos de enseñanza, este acto es la elaboración del saber escolar, para esto los docentes ocupan los textos escolares. El cuarto acto es el saber escolar, para el cual el principal responsable es el profesor, ya que él debe tomar ciertas decisiones, porque éstas incidirán en el aprendizaje de los estudiantes, también es llamada transposición interna. Por último el quinto acto es el saber enseñado, el cual es el aprendizaje que retienen los alumnos, que no necesariamente debe ser el mismo que el profesor enseña, por ende los protagonistas de este acto son los mismos estudiantes.

Antes, de que el docente interfiera in situ en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, a través de su saber, de su metodología y de sus prácticas, “El

saber-tal-como-es-enseñado, es el saber enseñado, es necesariamente distinto del saber-inicialmente-designado-como-el-que-debe-ser-enseñado, el saber a enseñar”. (Chevallard, 1991, p.17), puesto que ha pasado por tres actos previos, en donde las competencias de un docente, no necesariamente están insertas en cada toma de decisiones ni, en el encuentro de soluciones. Por consiguiente, tal como declara Chevallard (1991), el primer problema que debe ser resuelto para que exista el sistema de enseñanza, es decir, para que la enseñanza sea posible, es el de la compatibilidad del sistema con su entorno. Esa compatibilidad debe realizarse en múltiples y diferentes planos hasta llegar al aula.

## **1.6 Razonamiento matemático**

Como bien señala Duval (1999), el razonamiento se considera a través de dos posturas: la primera son las inferencias explícitas y la segunda actos de exploración. La primera está adherida a un lenguaje, a lo propiamente discursivo, en donde una proposición se deriva de otra. Por otra parte, “los actos de exploración están ligados a las acciones, manipulaciones que mueven la experiencia y operaciones concretas, esta postura no está ligada a un lenguaje” (Citado en Henríquez, 2014, p. 64). También señala que el razonamiento puede estar asociado a procedimientos diferentes, por una parte, a los actos de exploración (acción) y otras ligadas a la utilización del lenguaje.

De las diferentes formas de razonamiento vinculadas al lenguaje, se distinguen: el silogismo aristotélico, deductivo, el razonamiento por el absurdo, las inferencias semánticas y la argumentación, entendida como toda justificación o refutación espontánea de una declaración en una discusión o un debate. El razonamiento deductivo y el absurdo son las formas de razonamiento que se utilizan para la demostración, el silogismo aristotélico se diferencia del deductivo por dos razones: primero debido a que el pasaje de las premisas a las conclusiones se hace sin usar el tercero excluido, el otro motivo es debido a que las premisas no pueden ser independientes, deben tener un término en común.

Debido a la profundización en los tipos de razonamiento se distingue y reconoce el razonamiento matemático el cual es el pilar fundamental cuando se habla de demostraciones. El razonamiento necesita de un aprendizaje, debido a esto es que la enseñanza debe encontrar condiciones apropiadas para ellos, a diferencia de la argumentación o lo que se conoce como razonamiento natural, el cual es espontáneo e intuitivo donde se profundiza con práctica y experiencia.

Para afirmar que se trata de un razonamiento y no de un relato, de una descripción o explicación es necesario percibir dos características según Duval (1999), “la primera debe estar orientada a un enunciado-objeto (hacia una proposición que se quiere justificar) y la segunda es que debe estar enfocado en el valor, lógico o epistémico, de esta proposición y no en su contenido” (Citado en Henríquez, 2014, p. 66).

## **1.7 Textos escolares**

Los textos escolares son un recurso pedagógico, utilizado por los docentes con el fin de apoyar sus prácticas y lograr el aprendizaje de los contenidos mínimos que establece el Ministerio de Educación (2013): “Texto Escolar es un sistema de tres instrumentos integrados en fusión de potenciar el aprendizaje de las y los estudiantes sobre la base del Currículum Nacional”.

La política del Estado chileno en materia de textos escolares establece la entrega gratuita de libros de texto para los sectores prioritarios del currículum, a todos los estudiantes y profesores de los establecimientos educacionales municipales y subvencionados. (Ministerio de educación, s/a).

Para escoger dichos textos, se ha diseñado un sistema de operación compuesto por cinco procesos de licitación interrelacionados, con el fin de entregar a todos sus destinatarios, textos de calidad. Ordenados por etapas, estos son: adquisición; evaluación; acta de compromiso y elegibilidad de textos; adjudicación y seguimiento. Estos procesos se realizan anualmente dentro de una línea de acción permanente, por la Unidad de Currículum y Evaluación del MINEDUC.

Adquisición: con el fin de adquirir las ofertas editoriales más adecuadas, se ha implementado un proceso de licitación exigente, equitativo, transparente y eficaz. Las licitaciones se desarrollan a través del portal [www.mercadopublico.cl](http://www.mercadopublico.cl)

Evaluación: El objetivo principal del Proceso de Evaluación es asegurar que los textos adjudicados cumplan con la calidad y los requisitos técnico-pedagógicos definidos por el Ministerio. Con el fin de asegurar la confiabilidad y la imparcialidad del proceso, esta tarea es desarrollada de manera externa por instituciones de reconocida competencia en el campo educativo.

Acta de compromiso y elegibilidad de textos: es el documento a través del cual los establecimientos se comprometen a recibir y luego entregar a sus estudiantes y profesores, los textos escolares que provee gratuitamente el Ministerio de Educación. Este proceso debe ser certificado por el Director (a) del establecimiento.

Adjudicación: textos escolares procede a la adjudicación de los textos según los resultados de los procesos de Evaluación y Elegibilidad, y el Ministerio indica a las editoriales adjudicadas la cantidad de textos que se les comprará.

Seguimiento: textos escolares ha encomendado a varias instituciones especializadas en investigación en el área de la educación, realizar estudios de distintas índoles en vista de retroalimentar su quehacer e indagar sobre posibles nuevas líneas de acción. (Ministerio de Educación, s.f. disponible via [web](http://www.textosescolares.cl) en [http://www.textosescolares.cl/index2.php?id\\_portal=65&id\\_seccion=3749&id\\_contenido=15679](http://www.textosescolares.cl/index2.php?id_portal=65&id_seccion=3749&id_contenido=15679))

Los Textos Escolares que se entregan incluyen un texto para el estudiante, una Guía Didáctica para el docente, y a partir del dos mil dieciséis se incluyen Recursos Digitales Complementarios (RDC) en formato pendrive. En algunas asignaturas, se adjuntan otros recursos tales como: láminas para la sala de clases, cuaderno de escritura, cuadernos de ejercicio, CD de audio.

Según el informe de la Unidad de Currículum y Evaluación (2018) las cifras de distribución de textos escolares son las siguientes: se beneficiarán a más de tres millones ciento veinticinco mil estudiantes (de NT1 a 4° Medio); el promedio de textos por alumnos es de cinco coma siete. Así, para 3° y 4° básico se entregan en total cinco textos regulares y uno complementario. Cabe destacar que esta suministración de textos escolares, no se compra ni puede ser cobrada al apoderado; además son los mismos establecimientos educacionales los que aceptan o rechazan la distribución de los textos a sus estudiantes. Para el presente año dos mil dieciocho, a nivel nacional, once establecimientos educacionales renunciaron a la entrega gratuita de los textos escolares, de los cuales ocho son particulares subvencionados y tres son públicos.

El proceso de licitación de los textos escolares para el año dos mil dieciocho, se llevó a cabo desde abril hasta junio del año dos mil diecisiete. En él, postularon diez proveedores, de los cuales fueron rechazados tres por no entregar muestras de acuerdo a lo requerido en las bases de licitación. Para los niveles 3° y 4° básico, los proveedores a los cuales se les adjudicó la licitación para el presente año en la asignatura de matemáticas, son la editorial Santillana y ediciones SM Chile S.A., respectivamente.

Los textos anteriormente señalados fueron seleccionados por una comisión evaluadora conformada por cinco profesionales, detalladas en el siguiente tabla:

**Tabla 5***Comisión evaluadora de selección de textos 2018*

<b>Nombre</b>	<b>Cargo que desempeña en la UCE</b>	<b>Profesión</b>
Mariela Ivonne Yañez Vasquez.	Profesional Sección Compras	Administrador Público
Mauricio Andrés Contreras Guerra.	Gestor	Ingeniero Civil de Industrias, desarrollo, planificación y gestión
Francisco Alejandro Riveros Ramirez.	Coordinador Nacional de Textos Escolares	Ingeniero Civil Industrial
Fabricio Muñoz Acevedo.	Jefe UPLAG-UCE	Administrador Público
Ximena Soledad Zepeda Harasic.	Profesional Componentes textos escolares	Diseñador (a) con Mención en Comunicación en Visual

Fuente: (Cuadro resumen de elaboración propia del grupo de investigación Tesis, 2018)

## CAPÍTULO 2

### MARCO TEÓRICO

La presente investigación considera como enfoque teórico principal el de los Paradigmas Geométricos y Espacio de Trabajo Matemático Geométrico (ETM<sub>G</sub>), desarrollado por Houdement y Kuzniak (1996, 1999, 2006), el que actualmente se conoce como Espacio de Trabajo Matemático (ETM). A continuación, se ha de describir todos los componentes y características asociadas a este enfoque, partiendo con la definición de una tarea matemática, para luego definir lo que es ETM, contrastándolo con el ETM<sub>G</sub>, estableciendo sus diferencias correspondientes. Esto servirá como base para el análisis de las actividades propuestas por los Textos Escolares de Estudio proporcionados por el Ministerio de Educación.

#### 2.1 Tarea Matemática

La Real Academia Española (RAE) en sus tres acepciones más utilizadas, define tarea como “obra o trabajo”; “trabajo que debe hacerse en tiempo limitado”; y como “deber” (referido al ejercicio que se le encarga al alumno). Así mismo, define matemáticas, usado más en plural con el mismo significado que en singular, como la “ciencia deductiva que estudia las propiedades de los entes abstractos, como números, figuras geométricas o símbolos, y sus relaciones”. Además, Kuzniak & Richard (2014) señalan que “las matemáticas son principalmente una actividad humana. De esta manera, es esencial comprender cómo comunidades de individuos, pero también individuos particulares, utilizan y se apropian de los conocimientos matemáticos en sus prácticas de la disciplina” (p.8). Complementando desde la teoría antropológica de lo didáctico (TAD), Chevallard (1999) concibe tarea como la actividad matemática, y por lo tanto la actividad del estudio en matemáticas, en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales. No obstante, y para efectos del marco teórico abordado por Kuzniak para el Espacio de Trabajo Matemático Geométrico (ETM<sub>G</sub>), se define tarea matemática:

En un sentido amplio del término, para referirse a cualquier problema de matemáticas, los cuales tengan la hipótesis y preguntas que son claramente formuladas, y los cuales se sabe que los estudiantes pueden resolver en un tiempo que se puede prever (Sierpiska citado en Pizarro, 2018, p. 53)

Por consiguiente, para efectos de la presente investigación y en concordancia a lo señalado por Pizarro (2018), una tarea matemática es, un trabajo que busca la estructura lógica racional de la acción humana o de instituciones sociales, siendo más precisa que una tarea en lenguaje cotidiano, la cual debe ser expresada por medio de un verbo en una oración.

## **2.2 Espacio de trabajo matemático (ETM)**

El Espacio de Trabajo Matemático (ETM), se define como un ambiente organizado para permitir el trabajo de las personas que resuelven tareas matemáticas. (Henríquez, 2014). La noción general de ETM amplía la noción de espacio de trabajo para la geometría, introducida por Kuzniak y Houdement (Kuzniak, 2006) en el estudio de la didáctica de este ámbito. Es un proceso complejo y progresivo en el que se articulan todos los elementos matemáticos para el desarrollo del pensamiento que, utiliza enfoques existentes en el dominio, y que responde a una manera de utilizar lo ya existente en el campo de las didácticas de las matemáticas, proporcionando una herramienta para el estudio del trabajo matemático de los estudiantes y profesores en el ámbito escolar con el objetivo de comprender mejor, lo que se pone en juego en un marco escolar.

El espacio concebido de esta manera designa un ambiente pensado y organizado que facilita el trabajo de los individuos al resolver problemas matemáticos, es decir, son todos los elementos que, desde el punto de vista didáctico, se movilizan con el fin de facilitar el trabajo del individuo en la resolución de situaciones problemáticas (Pizarro, 2018). En el caso de las matemáticas escolares, estos individuos generalmente no serán expertos, sino alumnos o estudiantes, bien a nivel de principiantes o avanzados. (Kuzniak & Richard, 2014)

## 2.2.1 Componentes

El ETM se construye por dos planos, cognitivo y epistemológico, en relación directa con los conocimientos matemáticos del dominio en juego. En cada plano hay tres componentes; en el cognitivo están presentes los procesos de visualización, construcción y prueba. Mientras que en el epistemológico, el representamen, los artefactos y el referencial. Los componentes de los planos, se articulan mediante tres génesis: semiótica, instrumental y discursiva (Hernández, 2014). Estos componentes se relacionan tal como se muestra en la figura 8.

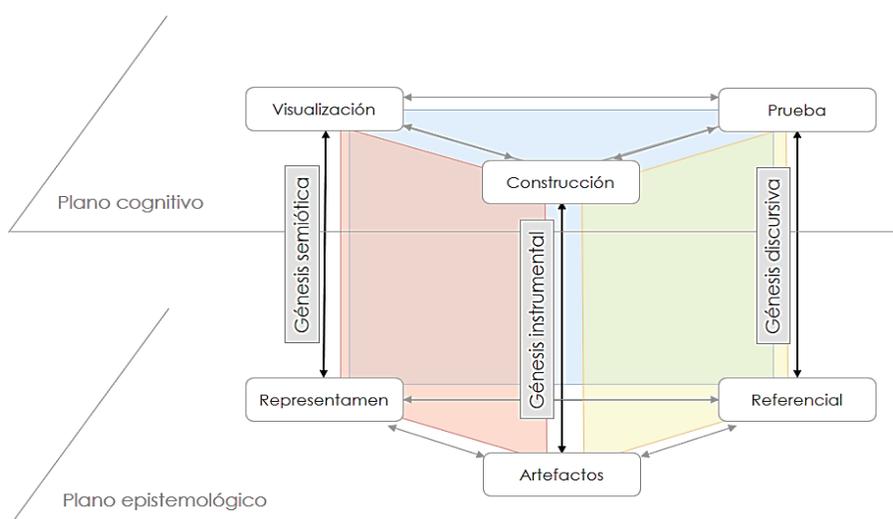


Figura 8. Diagrama del Espacio de Trabajo Matemático (Fuente: Kuzniak, 2011)

### 2.2.1.1 Plano cognitivo y sus componentes

Las matemáticas no son un cuerpo desprovisto de propiedades y objetos reducidos a sistemas formales, sino que, corresponden a una de las principales actividades lógica-racional humana. No obstante, es necesario que el individuo se apropie de los conocimientos matemáticos en sus prácticas disciplinares, dando sentido a los signos y objetos tangibles. Por ello, el plano cognitivo es aquel que se centra en el pensamiento del sujeto que resuelve tareas matemáticas, y que a su vez, se contempla como sujeto cognitivo. Para ello, se han de describir tres procesos que son inherentes al sujeto, un proceso de visualización (Duval, 2005), es decir, la conexión entre lo que se percibe desde su representación y la imagen construida

mentalmente a partir de esta. La construcción como proceso orientado por el uso de herramientas materiales (regla, compás, software...) y/o conceptuales (construir, medir, contar...) (Anastasiadis y Nikolantonakis, 2016), para elaborar una representación. Finalmente, la prueba como el proceso donde se generan argumentaciones para la resolución de la tarea. Existen dos tipos de pruebas: las pragmáticas, que requieren de la acción sobre los objetos para justificar afirmaciones y las intelectuales, que recurren a la formulación de propiedades y relaciones entre los objetos en cuestión (Balacheff, 2000).

Para dar apertura hacia el campo cognitivo, se debe de realizar una estrecha relación con los componentes del plano epistemológico, denotando la existencia de un proceso complejo y progresivo en el que se articulan todos los elementos matemáticos para el desarrollo del pensamiento.

#### **2.2.1.1.1 Visualización**

“El proceso de visualización debe ser asociado a esquemas y operaciones de uso de los signos, de los que nada nos prueba que dependan, a priori, de la visualización en sí, incluso en una concepción extensa de ésta” (Kuzniak & Richard, 2014, p.8). Duval (1999) diferencia, desde un punto de vista psicológico, las nociones de visión y visualización. La primera noción está asociada a la percepción visual que provee un directo acceso al objeto, mientras que la segunda está basada en la producción de una representación semiótica. Por ello se debe de distinguir de la simple visión o percepción de los objetos y, se puede considerar entonces como el proceso de reestructuración de la información aportada por los diagramas y los signos.

Además, este proceso alimenta la intuición de las propiedades y, a veces, fundamenta cognitivamente la validez de estas propiedades. Bajo ciertas condiciones, puede emparentarse con un razonamiento de tipo discursivo-gráfico (Richard, 2004) y podrá expresarse al interior de registros de representación semiótica determinados. (Kuzniak & Richard, 2014, p.9)

No obstante, debe de ser distinguido, entonces, “la simple visión o la percepción de los objetos” (Chacón, Kuzniak & Vivier, 2016, p.8) con el proceso en cuestión.

Para Duval (1999), éste proceso está basado en la producción de una representación semiótica (figuras geométricas, gráficos cartesianos) de un objeto. Por ello, es que se han de distinguir, concordante a Duval (2005), dos modos de visualizar dependiendo del tipo de operaciones y las propiedades movilizadas, distinguiéndose así un modo icónico y otro no icónico. La visualización icónica, se asocia con el reconocimiento de percepción de las formas. El segundo, visualización no icónica, está relacionada con una interpretación más abstracta de los signos, con la idea principal de figura como un objeto simbólico.

De esta manera, la visualización corresponde al proceso cognitivo mediante las operaciones mentales-visuales del sujeto y que es inherente a él, y que por el cual establece la conexión de la representación y la imagen construida que puede ser de modo icónico o no icónico.

#### **2.2.1.1.2 Construcción**

El proceso de construcción responde al resultado que se obtiene con el trabajo de instrumentos y técnicas utilizadas. Lo que para Anastasiadis y Nikolantonakis (2016), está determinado por la utilización de instrumentos materiales (regla, compás entre otro) y/o conceptuales (construir, medir, contar) para elaborar una representación, que puede ser de tipo mecánica o geométrica.

#### **2.2.1.1.3 Prueba**

Balacheff (1987) concibe al razonamiento como una actividad intelectual que intenta modificar y producir nuevas informaciones. Por su parte Duval (1995) presenta dos posturas ante el razonamiento, una con inferencias explícitas y otra con actos de exploración. La primera vinculada con el lenguaje y la otra ligada a las acciones. No obstante, la importancia del razonamiento radica en que las interacciones entre alumnos con diferentes niveles de razonamiento, desde Balacheff (1987), desencadenan obstáculos, falta de consenso y conclusiones erróneas al convencer al otro con argumentos inconsecuentes o carentes de veracidad. Siendo desde allí, donde nace, la relevancia de que frente a una tarea matemática, y dependiendo de

su naturaleza y medios que se ponga en práctica, se asegure la validez de la respuesta.

Balacheff (1987) sitúa a la prueba en una dimensión social, ya que ésta, requiere de una comunidad que acepte un razonamiento, o no. Y aunque en variadas situaciones, el concepto de prueba, es utilizado de manera coloquial o carente de su real significado, al momento de ser precisada, entonces, se define a la explicación como un discurso subjetivo, enraizado en los propios conocimientos y en la racionalidad de quien lo expresa, desde sus reglas de decisión de la verdad, siendo la base de la explicación esencialmente el lenguaje natural. Y a la prueba como, una explicación socialmente aceptada, que puede evolucionar con el avance de los saberes en los cuales se apoya y se “designa sobre todo una justificación donde la calidez puede ser modificable a dependencia de la experiencia de la comunidad y del tiempo” (Henríquez, 2014, p.61). Así, la prueba es el proceso donde se generan argumentaciones para la resolución de la tarea matemática (Balacheff, 2000).

No obstante, existen dos tipos de pruebas, las pragmáticas y las intelectuales, que se diferencian por la naturaleza de la justificación subyacente. Las pruebas pragmáticas requieren de la acción sobre los objetos; y las pruebas intelectuales recurren a la formulación de propiedades y relaciones entre los objetos en cuestión.

#### a) *Pruebas pragmáticas*

Las pruebas pragmáticas son aquellas que recurren a la acción sobre los objetos y supone la posibilidad de tener acceso a realización material de una tarea para justificar afirmaciones sobre ellos. [...] Entre las pruebas de carácter pragmáticas se encuentran las siguientes: *empirismo ingenuo* (cuando la persona que valida la afirmación lo hace después de verificarla para algunos casos particulares; el medir o presentar ejemplos sin que estos constituyan una generalización de la propiedad) [...], *experimento crucial* (cuando la persona que valida la afirmación toma en cuenta la problemática de la generalidad y la resuelve mediante el uso de un caso particular que

reconoce como no especial [...], y *ejemplo genérico* (cuando la persona que valida justifica la afirmación considerando al objeto concreto como un representante de todos los pertenecientes al dominio de dicha afirmación)[...]. (Henríquez, 2014, pp.62-63)

#### b) *Pruebas intelectuales*

Las pruebas intelectuales son aquellas que recurren a la formulación de propiedades y relaciones entre los objetos en cuestión, donde se articulan argumentos, cadena de argumentos, con una clara producción en una lengua simbólica, hay un pasaje a lo algebraico, se dejan de lado los objetos materiales y su relación con la experiencia material. Entre las pruebas de carácter intelectual se encuentran las siguientes: *experiencia mental* (cuando el razonamiento de la persona se independiza de un representante particular; sin embargo, se observa un guión que no tiene necesariamente la estructura de demostración) [...], *demostración* (cuando la validación se apoya en conocimientos institucionales, un conjunto de definiciones, teoremas, reglas de deducción, donde la validez es socialmente aceptada y se funda sobre una lógica formal), y *cálculo sobre el enunciado* (Balacheff identifica esta prueba entre la experiencia mental y la demostración; es una prueba que no tiene la característica de conformar una demostración pero que tampoco tiene la característica de la experiencia mental [...]). (Henríquez, 2014, p. 63).

### **2.2.1.2 Plano epistemológico y sus componentes**

El término epistemología, para Ceberio y Watzlawick (1998), significa conocimiento, y yace en aquella rama de la filosofía que procura la adquisición de conocimientos, fundamentos, límites, métodos y validez del mismo. En el segundo plano, se está en presencia de aquellos contenidos matemáticos del ámbito y dominio estudiado. Así, cuando el acento se pone en el proceso de aprendizaje del alumno, en una situación didáctica, este nivel epistemológico se puede considerar también como un medio epistemológico (Coutat & Richard, (2011) citado en Chacón, Kuzniak y Vivier, (2016)).

Para ello, se han de describir tres componentes que están determinados al dominio de la matemática puesto en juego, un componente de representamen (Pierce, 1978), directamente relacionado al objeto matemático, y a la noción de signos planteadas por Pierce donde subyace la noción de iconos, símbolos o índices. Un componente vinculado a los artefactos (Rabardel, 1995), que se presentan como todo aquel objeto hecho por el hombre y que está al servicio del trabajo matemático, y por ende, es un material utilizado como medio para la construcción. Y, finalmente un componente referencial que responde al conjunto de teoremas, definiciones y axiomas, que sostienen el discurso deductivo de la demostración matemática. “Cada uno de estos componentes, no se yuxtaponen, sino que se organizan según un objetivo que depende del ámbito matemático en su dimensión epistemológica” (Kuzniak & Richard, 2014, p.7).

#### **2.2.1.2.1 Representamen**

La noción de representamen (o representante) está relacionada con la noción de Peirce (1978) en donde el signo es algo que representa otra cosa, bien sea un objeto matemático, bajo formas más o menos abstractas (íconos, índices y símbolos), o quizá a él mismo. (Henríquez, 2014). Sin embargo,

a diferencia de los signos de la estructura diádica, tan habituales en matemáticas, la idea de un signo que también es su propia representación invita a considerar otra manera en el proceso semiótico cuando el trabajo matemático está en juego” (Kuzniak & Richard, 2014, p.8)

De acuerdo con una concepción de las matemáticas fundamentada en representaciones semióticas, que va más allá de la pura consideración de sistemas de representación, para Chacón (2016) parece pertinente utilizar la noción de signo o representamen para resumir los componentes relativos a los objetos tangibles y concretos. En función del ámbito matemático en cuestión, los signos podrán ser dibujos geométricos, símbolos algebraicos o gráficas, incluso fichas, maquetas o fotos, en el caso de problemas que abordan la modernización.

### **2.2.1.2.2 Artefactos**

La noción de artefacto utilizada proviene de Rabardel (1995) e incluye todo lo que sufre una transformación, por pequeña que sea, de origen humano. No limitando su significado a objetos materiales, sino que, incluyendo los sistemas simbólicos empleados como un sistema de acción, es decir que están destinados a dar sustento a la actividad matemática en la ejecución de un cierto tipo de tarea (material o simbólica). Además de los artefactos materiales tradicionales (como la regla, el compás o una calculadora, etc.) y de software informáticos (software de geometría dinámica, hojas de cálculo, etc.), se considera como artefactos simbólicos a los algoritmos y rutinas (cálculos técnicos planteados por números, las resoluciones de las ecuaciones de primer o segundo grado, derivación de polinomios...), (Chacón, Kuzniak & Vivier, 2016, pp. 7-8)

Y, por ende, están en directa relación al sistema referencial teórico que construye las definiciones operantes.

### **2.2.1.2.3 Referencial**

Henríquez (2014) señala que el componente referencial alude a los elementos de carácter teórico matemático del dominio en juego (geometría, álgebra, análisis, etc.), está constituido por un sistema teórico de referencia basado en definiciones, teoremas, propiedades y axiomas, las cuales se encuentran involucradas en un razonamiento. Se sostiene un discurso deductivo de la demostración matemática, lo que implica que se organice de forma coherente y adaptada a las tareas propuestas a los estudiantes.

## **2.3 Espacio de trabajo matemático geométrico (ETM<sub>G</sub>)**

El espacio de trabajo matemático geométrico (ETM<sub>G</sub>) se trata de enfoques complementarios específicamente en el dominio de la geometría, del cual a partir de ciertas adaptaciones da origen a el ETM anteriormente descrito. Por

consiguiente, el ETM<sub>G</sub> responde al primer modelo introducido por Kuzniak y Houdement (1998).

Para definir los elementos que constituyen el ETM en geometría, se debe considerar las particularidades del dominio. La diferenciación de los dominios matemáticos (geometría, análisis, álgebra, etc.) está ligada a la naturaleza de los objetos estudiados, pero fundamentalmente es necesario conocer los principios epistemológicos de estas diferencias (Henríquez citando a Kuzniak, 2011).

### 2.3.1 Componentes

La particularidad del dominio de la geometría, conlleva la modificación de un solo componente del modelo presentado anteriormente en el ETM. Así, de la misma manera descrita anteriormente, se organiza mediante dos planos, con tres componentes cada uno (Ver figura 9).

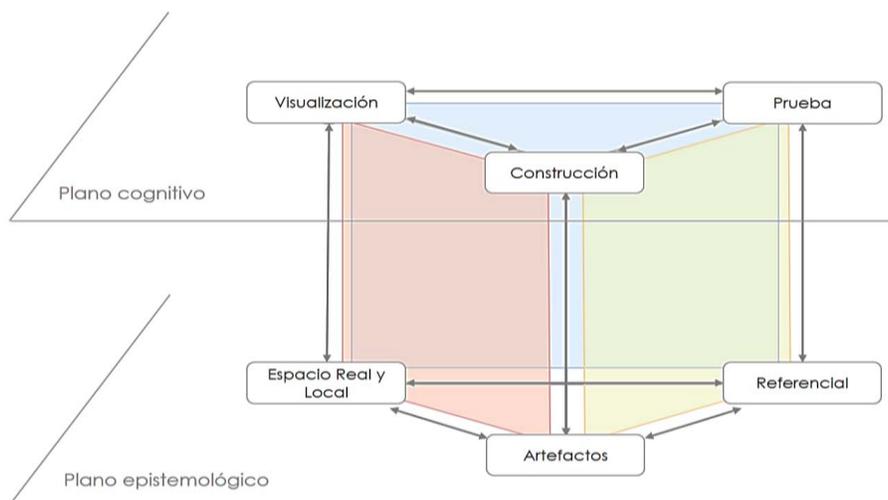


Figura 9. Diagrama del Espacio de Trabajo Matemático Geométrico (Fuente: Kuzniak, 2011)

#### 2.3.1.1 Plano cognitivo y sus componentes

No conlleva ninguna modificación a los componentes antes señalados y definidos en el ETM, conformados por la visualización, construcción y prueba.

### **2.3.1.2 Plano epistemológico y sus componentes**

En lo que concierne a la geometría, hay tres componentes que interactúan según la característica de la tarea matemática puesta en juego. Un conjunto de artefactos como herramientas, descritos anteriormente en ETM; un sistema teórico de referencia basado en las definiciones y propiedades del dominio geométrico; y finalmente, el espacio real y local, que corresponde a la única modificación respecto al componente representamen del ETM, que en geometría corresponde a la cualidad material que está en representación de algo.

#### **2.3.1.2.1 Espacio real y local**

El componente corresponde al soporte material, con un conjunto de objetos concretos y tangibles (Kuzniak & Richard, 2014). Siendo el espacio real el acceso a los objetos como el resultado de la abstracción del modelo y el espacio local a lo que concierne al trabajo como parte del modelo. A diferencia de los signos de la estructura didáctica, tan habituales en matemáticas, la idea de signo que también es su propia representación invita a considerar de otra manera el proceso semiótico cuando el trabajo matemático está en juego. Esto es especialmente visible cuando un dibujo geométrico, que es en sí mismo una forma, es a la vez representamen y modelo de representación (Kuzniak & Richard citando a Coutat, Laborde & Richard, 2013)

### **2.3.2 Paradigmas geométricos**

Henríquez (2014) señala que la noción de paradigma, inspirado en Kuhn (1962), desde la perspectiva filosófica, designa el conjunto de las creencias, técnicas y valores que comparte un grupo de científicos. Por otro lado, desde una perspectiva cognitiva, según Gonseth (1945-1952), paradigma corresponde a los modos de pensamiento como una síntesis dialéctica de los tres tipos de conocimientos: intuitivo, experimental y razonamiento deductivo. Y estos tres pilares ayudan a comprender la relación con el espacio y el mundo sensible.

Es entonces con Houdement & Kuzniak (2006), que se introduce el término de paradigma geométrico, donde concilian la integración de las creencias del saber compartidos por una comunidad científica, con la perspectiva de enseñanza, haciendo referencia a las prácticas que en él se constituyen. A esas prácticas, se les denomina paradigma geométrico.

Se define entonces el paradigma como, una manera de expresar que existen diferentes enfoques que existen en geometría, dado que, a partir de ellos, se da sentido a los espacios de trabajo geométrico. En este sentido, el geómetra debe no confundir una evidencia nacida de la intuición con una información nacida de la experimentación ni, el resultado de una experimentación con la conclusión de un razonamiento, pues así el paradigma repercute aspectos tales como, el de fijar correctamente la manera de plantear y de aprender la resolución de una tarea matemática, si dos o más personas poseen el mismo paradigma, pensarán de la misma manera y podrán resolver sin ningún mal entendido dicha tarea, sin embargo, si no poseen el mismo paradigma, la resolución se verá entorpecida dado que no se pueden entender. Una segunda manera de repercutir es en la entrega significativa de los ejemplos que se les entrega a los estudiantes para aprender, la idea es que un paradigma no sea enseñado como una teoría axiomática, sino que permite ver cómo funciona la teoría, así, Gomez-Chacón, Kuzniak & Vivier (2016) señalan que gracias a la resolución de problemas los alumnos pondrán en práctica los conocimientos y las técnicas elegidas por cada paradigma.

Henríquez (2014), menciona que en investigaciones realizadas por Houdement & Kuzniak (1996, 1999, 2006) y Kuzniak (2004, 2011), identifican tres tipos de geometrías (paradigmas geométricos) que coexisten en la enseñanza de la geometría y cuya función es permitir que el geómetra construya su propio espacio de trabajo geométrico guiado por el profesor. Es por esto que se identifican tres tipos de paradigmas: Geometría Natural (GI), la que considera los objetos reales y la confusión con la realidad; Geometría Axiomática Natural (GII), la cual se entiende como la geometría aplicada en el esquema de la realidad y Geometría Axiomática Formal (GIII), la que logra la independencia de la geometría y de la realidad. Estas

tres geometrías no son jerarquizadas, sino que el horizonte de trabajo es diferente, mientras que en GI se presenta lo técnico y lo práctico, en GII está el axioma y el modelo, y en GIII lo lógico y formal.

### **2.3.1.1 Geometría Natural (GI)**

En concordancia con lo mencionado por Henríquez (2014) y Pizarro (2018), GI es una geometría estrechamente implicada en el mundo real, ya que corresponde a los objetos reales, los cuales tienen importancia por la aproximación y la medida. Este trabajo es a menudo de tipo material siendo su fuente de validación el mundo real y sensible y con un constante feedback permanente entre el ir y volver entre el modelo y la realidad. En este paradigma geométrico se encuentran los componentes de la intuición, la experiencia y la deducción.

### **2.3.1.2 Geometría Axiomática Natural (GII)**

En concordancia con lo mencionado por Henríquez (2014) y Pizarro (2018), en esta GII los objetos geométricos son descritos por una propiedad, su definición y el razonamiento de validación, este se funda sobre las leyes hipotéticas deductivas del sistema axiomático en juego. En esta es importante la explicación de las acciones efectuadas. Además, se conjugan en esta geometría la realidad, esquema y modelo. En este paradigma se consideran los intentos de axiomatización, ya que a través de ellos, se permite el razonamiento y se prepara el camino para la modelización.

### **2.3.1.3 Geometría Axiomática Formal (GIII)**

En concordancia con lo mencionado por Henríquez (2014) y Pizarro (2018), en este paradigma se logra la independencia de la geometría y la realidad. El razonamiento matemático se rige por lo hipotético deductivo ya que, axiomatiza todo de manera completa, rigurosa y formal. El razonamiento de validación se realiza a través del sistema de modelos subyacente.

Los paradigmas, no son cerrados, pues existe un deslizamiento o pasaje entre ellos. Así, y en base a Kuzniak (2006), los paradigmas que se articulen, se simbolizan de

manera tal que G1/g11, denotando con mayúscula el énfasis en el que se encuentra el individuo y en minúscula al cual se dirige, o en defecto en el cual posee menos dominio.

## 2.4 Génesis

Con el fin de garantizar un enfoque coherente y completo del trabajo matemático, el nivel epistemológico y cognitivo tienen que ser articulados mediante dimensiones verticales, que serán llamadas génesis, con el fin de estructurar el ETM y ayudar a comprender la circulación de los conocimientos en el seno del trabajo matemático (Kuzniak & Richard, 2014). Éstas no son independientes la una de la otra, y tampoco se deben considerar como una biyección entre dos polos, sino más bien como relaciones que participan en las génesis del ETM global, donde el rol de la tarea es fundamental (Gómez-Chacón & Kuzniak, 2011).

Se ha introducido la idea de génesis, según Kuzniak (2011), porque es una dimensión en la que desde un punto de vista cognitivo transforma elementos y se apropian de éstos desde un nivel epistemológico. Este proceso supone algunas transformaciones que es posible identificar a través de tres génesis (ver figura 10). La primera corresponde a la *génesis semiótica*, en la que se proporciona los objetos tangibles con su funcionamiento como objetos matemáticos; la segunda corresponde a la *génesis instrumental* que transforma los artefactos en herramientas dentro del proceso de construcción; y finalmente la *génesis discursiva* que da cuenta del proceso de la prueba en sentido de las propiedades utilizadas dentro del razonamiento matemático.

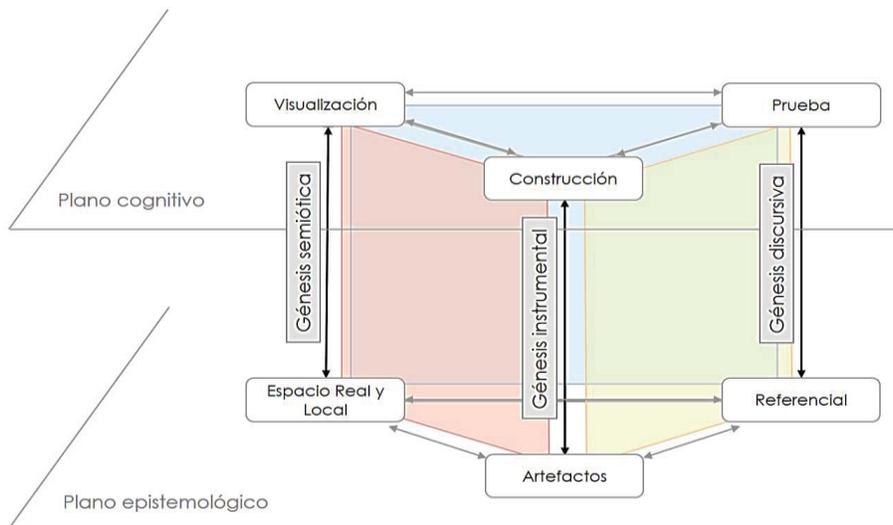


Figura 10. Génesis que articulan el ETM (Fuente: Kuzniak 2011)

### 2.4.1 Génesis semiótica

Kuzniak (2011) se refiere a esta génesis como la entrada perceptiva. Esta dimensión particular usada para el ETM<sub>G</sub> permite describir el proceso semiótico que está asociado al pensamiento visual que se opera en geometría es lo que se denomina proceso de visualización. Gómez-Chacón, Kuzniak y Vivier (2016) la definen como el proceso asociado con signos y representamen que permite pasar de una perspectiva sintáctica a una perspectiva semántica de objetos matemáticos organizada en la representación semiótica. La génesis semiótica proporciona el estado de los objetos tangibles y sus operaciones. De esta manera, se han de asegurar las relaciones entre la función y estructura en los signos. Además ratifica el establecimiento de las relaciones entre sintaxis, semántica, función y estructura de los signos vehiculados (Kuzniak & Richard, 2014). En cuanto a los objetos matemáticos estos no son accesibles físicamente, sino a través de signos y representaciones semióticas, por lo tanto, en matemática no existe un solo sistema semiótico sino varios sistemas para el estudio de un contenido (Duval, 1999). Asimismo, Duval (1993) afirma que no es posible acceder a un objeto matemático sin tener una representación del mismo debido a su alto nivel de abstracción y donde la distinción entre un objeto y su representación es entonces un punto estratégico para la comprensión de las matemáticas. Por lo tanto, un mismo objeto

matemático posee diversas maneras de ser representado. En cuanto a las representaciones, existe un tipo de representación mental, es decir, aquellas que cubren el conjunto de imágenes y concepciones que un individuo puede tener sobre el objeto y otro tipo de representaciones semióticas, en donde éstas están constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica, etc.).

### **2.4.2 Génesis instrumental**

La génesis instrumental corresponde al plano vertical que articula el componente de artefacto, del nivel epistemológico, con el proceso de construcción del nivel cognitivo (ver figura 10). Así, según lo señalado por Kuzniak & Richard (2014), la génesis instrumental hace funcional los artefactos en el proceso constructivo que contribuye al trabajo matemático, considerando al artefacto como una entidad mediadora entre el sujeto y el objeto sobre el cual se dirige la acción, y además como una entidad mixta, que comprende el artefacto y componentes cognitivos relacionados con los esquemas de uso (Henríquez, 2014).

En la concepción del ETM, para Chacón, Kuzniak & Vivier (2016), la palabra herramienta se refiere a los componentes del plano epistemológico, cuyo potencial de uso en la resolución de un problema generaliza la noción de instrumento de Rabardel. Por ende, el proceso de construcción está determinado por los instrumentos utilizados. La génesis instrumental, para el modelo, debe darse de manera bidireccional. No obstante, existe la posibilidad de que exista un proceso hacia arriba, de los artefactos a la construcción, llamada instrumentación. Y un proceso hacia abajo, llamado instrumentalización.

Para Kuzniak (2011), la génesis instrumental es considerada como la entrada experimental al modelo, ya que la manipulación y uso de los artefactos en el proceso de construcción no es transparente ni inmediato.

### **2.4.3 Génesis discursiva**

La génesis discursiva (Kuzniak, 2011) es la articulación vertical, entre el componente prueba, ubicado en el plano cognitivo y el componente referencial ubicado en el plano epistemológico (ver figura 10). Esta génesis tiene como propósito, proceder a la validación del proceso bidireccional, el cual es un razonamiento discursivo apoyado en las propiedades del referencial teórico, la identificación de propiedades y definiciones que se deben incluir en el marco de referencia después de ser realizado un tratamiento instrumental o semiótico.

Las propiedades del sistema de referencia teórico son empleadas por la génesis discursiva de la prueba matemática, para ponerlas al servicio del razonamiento matemático y la validación no exclusivamente icónica, gráfica o instrumental.

En esta génesis, el razonamiento está ligado al proceso de prueba, la cual en el ETM se considera desde el trabajo de Balacheff (1987) quien considera que la interacción social del individuo es un instrumento potente debido a que es el contexto que posibilita la discusión entre los alumnos con la intención de convencerse a sí mismo y de convencer al otro con los argumentos de cada uno. Finalmente, “la génesis discursiva de la prueba no agota todo lo relativo a las operaciones discursivas en matemáticas, donde es necesario distinguir tres niveles: la denominación de los objetos, el enunciado de propiedades y por último la deducción” (Chacón, I., Kuzniak, A. & Vivier, L. 2016, p.10).

## **2.5 Circulación de los planos**

Dada una tarea matemática, si se moviliza internamente el ETM, y en concordancia con Kuzniak & Richard (2014) y Coulat & Richard (2011), se estará en presencia de una circulación. Movilizar internamente al ETM, es describir las interacciones específicas de enfoque geométrico caracterizando los tres planos verticales que aparecen en el diagrama del ETM<sub>G</sub>. Los planos verticales introducidos, de este modo, se podrían conectar con las diferentes fases del trabajo matemático implementado en la ejecución de una tarea: descubrimiento y exploración; justificación y razonamiento; presentación y comunicación. De hecho, la ejecución

efectiva de estas fases definirá un cierto número de competencias matemáticas cognitivas fundamentadas en la coordinación de las génesis en sus relaciones con el plano epistemológico (Gómez-Chacón & Kuzniak, (2015) citado en Gómez-Chacón, Kuzniak y Vivier (2016))

Una circulación será completa, y por ende, un ETM<sub>G</sub> circulará completo cuando se movilicen sus seis componentes por medio de las tres génesis verticales. Tal como se puede observar en la figura 11.

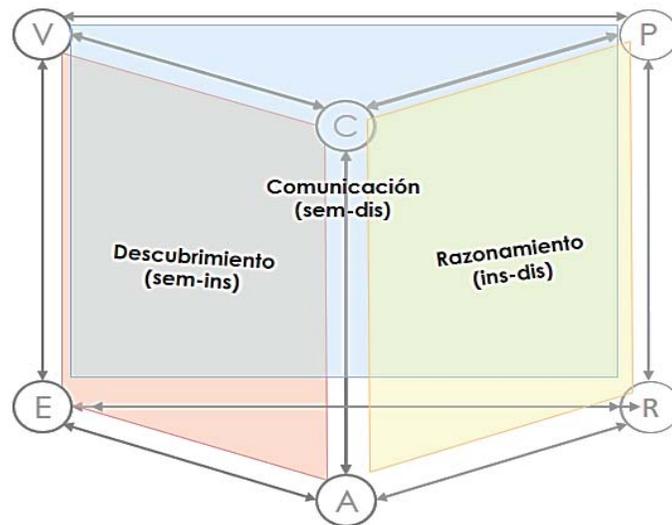
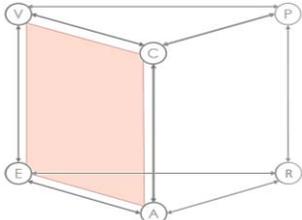
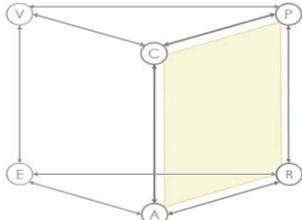
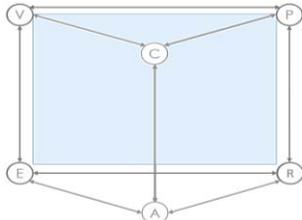


Figura 11. Circulación completa del ETM<sub>G</sub> (Fuente: Kuzniak & Nechache, 2015)

A continuación, se despliega la tabla 6, que presenta de manera gráfica los planos existentes según Kuzniak y Nechache (2015).

**Tabla 6**

Simbología de los diagramas de las circulaciones en el ETM<sub>G</sub>.

Plano [Sem - Ins]	Plano [Ins- Dis]	Plano [Sem-Dis]
 <p data-bbox="240 617 610 705"><i>Figura 12. Circulación plano [Sem – Ins] (Fuente: Kuzniak &amp; Nechache, 2015)</i></p>	 <p data-bbox="638 617 1008 705"><i>Figura 13. Circulación plano [Ins – Dis] (Fuente: Kuzniak &amp; Nechache, 2015)</i></p>	 <p data-bbox="1037 617 1408 705"><i>Figura 14. Circulación plano [Sem – Dis] (Fuente: Kuzniak &amp; Nechache, 2015)</i></p>
<p data-bbox="240 737 610 940">Implica la circulación completa de los elementos y procesos asociados a la génesis semiótica e instrumental privilegiando la identificación y exploración de los objetos.</p>	<p data-bbox="638 737 1008 1003">Implica la circulación completa de los elementos y procesos asociados a la génesis instrumental y Discursiva, desarrollando el razonamiento matemático fundado en la justificación de descubrimientos</p>	<p data-bbox="1037 737 1408 972">Implica la circulación completa de los elementos y procesos asociados a la génesis semiótica y discursiva, orientado hacia la comunicación matemática de los resultados.</p>

Fuente: (Kuzniak & Nechache, 2015)

En síntesis, una circulación interna dará origen a un plano, si moviliza a lo menos cuatro componentes de los niveles verticales. Por consiguiente,

La definición exacta de los planos y la descripción de sus interrelaciones depende del dominio matemático que se estudia y permanece como punto central en el estudio del trabajo matemático a través del modelo de ETM<sub>G</sub> (Gómez-Chacón & Kuzniak, 2015). El término fibración (Recio; Richard; Vivier, 2015) se sugirió para etiquetar movimientos y transiciones entre los diferentes elementos del modelo. De esta manera, tendríamos fibraciones internas (entre planos, entre las componentes, entre registros semióticos de representación...) y las fibraciones externas entre ETM<sub>G</sub> asociados con diferentes dominios de matemáticas (Montoya Delgadillo, Vivier, 2014). Estas fibraciones visibilizan estas interdependencias y favorecen la descripción del edificio y la circulación del trabajo matemático en el modelo. Así mismo, favorecen la deconstrucción de todos estos vínculos cuando las

componentes se muestran fusionadas en el pensamiento confuso de los alumnos (Gómez-Chacón, Kuzniak & Vivier, 2016, p.12)

### **2.5.1 Plano Semiótico-Instrumental [Sem-Ins]**

El plano [Sem-Ins] está asociado a la circulación entre la génesis semiótica y a la génesis instrumental con la interacción de los cuatro componentes de la ETM: espacio real y local, visualización, artefacto y la construcción. Gómez-Chacón, Kuzniak & Vivier (2016) señalan que este plano ha recibido más importancia debido a la aparición del software digital, ya que las herramientas digitales aumentaron la capacidad de explorar configuraciones y descubrir nuevas propiedades. Antes de esto, solo se tomaba en cuenta la experiencia de los estudiantes. Además, señalan que se pueden observar dos formas de trabajar: la que está orientada hacia la construcción de los resultados (figuras y gráficos) y otra hacia la interpretación de los datos aportados por los artefactos.

### **2.5.2 Plano Instrumental-Discursivo [Ins-Dis]**

El plano [Ins-Dis] está asociado a la circulación entre la génesis instrumental y la génesis discursiva, interactuando los cuatro componentes del ETM: artefacto, construcción, referencial y prueba. Estas interacciones privilegian la justificación de la técnica de construcción y el desarrollo del razonamiento matemático. Gómez-Chacón, Kuzniak & Vivier (2016) señalan que el punto crucial de este plano es la cuestión de la prueba que se basa en experimentos o en la argumentación deductiva pura. Si las conclusiones provienen de los datos dados por los artefactos, se hablará de prueba experimental. Por otro lado, si la prueba se basa en un referencial teórico, los instrumentos se utilizarán para ilustrar o construir las configuraciones geométricas.

### **2.5.3 Plano Semiótico-Discursivo [Sem-Dis]**

El plano [Sem-Dis] está asociado a la circulación entre la génesis semiótica y la génesis discursiva de la prueba, siendo ésta crucial para el desarrollo del trabajo matemático que supera una visión simple icónica de los objetos. En ella interactúan

los siguientes componentes del ETM: espacio real y local, visualización, referencial y prueba. Gómez-Chacón, Kuzniak & Vivier (2016) señalan que, de acuerdo a la prioridad dada a la dimensión semiótica y discursiva, se encuentran dos tipos de enfoque: razonamiento perceptivo y razonamiento hipotético y deductivo. El razonamiento perceptivo centra la atención en el lado semiótico, en las transformaciones visuales estructurando la descripción de los signos. Por el contrario, el razonamiento hipotético y deductivo centra su atención en una prueba, basándose en las propiedades, signos y visualización que desempeña el papel heurístico.

### 2.5.4 Semiplano

Los hallazgos de esta investigación, indican la presencia de nuevas relaciones entre los componentes del plano epistemológico con el plano cognitivo. Estas nuevas relaciones emergen cuando se articulan solo tres componentes de uno de los planos verticales del  $ETM_G$ , es decir, se está en presencia de una génesis y un componente del  $ETM_G$ . A esta nueva relación se le ha dado el nombre de semiplano. (Pizarro, 2018, p.100)

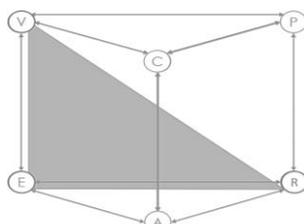


Figura 15. Semiplano Semiótico-referencial [Sem-Ref] (Fuente: Pizarro, 2018)

### 2.6 Tipos de ETM

Kuzniak (2011) citado en Pizarro (2018) señala que los procesos de transposición didáctica realizados en el trabajo matemático, en el ámbito escolar, se encuentran articulados y relacionados con los distintos niveles del espacio de trabajo matemático. Es posible identificar tres tipos de ETM, los cuales dependen de la forma en que el sujeto se enfrenta a un problema determinado. Los tres tipos de ETM son, el ETM referencial el cual define de manera ideal los criterios

matemáticos, el ETM idóneo es un espacio previamente establecido por una institución con la función definida en términos de enseñanza y finalmente el ETM personal que busca un espacio propio el cual nace de la reflexión entre los conocimientos matemáticos y de las que se utilizan para resolver una tarea.

### **2.6.1 ETM de referencia**

En concordancia con Henríquez (2014) y Pizarro (2018), el espacio de trabajo matemático referencial es definido de manera ideal en función solo de criterios matemáticos, esto fue ampliado por Kuzniak (2011) considerando que esta referencia es entregada en cada país, por los Ministerios de educación quienes tienen la responsabilidad de exponer cuales son las competencias y contenidos mínimos y obligatorios que cada alumno debe lograr durante su formación escolar, para esto el Ministerio debe entregar un marco curricular, el cual será posiblemente trabajado por los profesores en cada nivel de escolaridad.

### **2.6.2 ETM idóneo**

En concordancia con Henríquez (2014) y Pizarro (2018). Este ETM permite la organización del alumno para que pueda comprometerse en la resolución de problemas, este ETM idóneo debe cumplir indispensablemente con dos condiciones, en primer lugar, debe posibilitar el trabajo en el paradigma que corresponda a la problemática considerada, por otra parte debe estar bien constituida, es decir que sus diversos componentes estén con criterios organizados y validados, como por ejemplo lo debe ser un texto escolar. Se debe considerar que este ETM idóneo no es fijo y podrá ser modificado para ajustarse a las condiciones del ETM personal del profesor.

### **2.6.3 ETM personal**

En concordancia con Henríquez (2014) y Pizarro (2018) el ETM personal se define como el espacio propio de cada utilizador, fruto de la reflexión entre sus conocimientos matemáticos y los que utiliza para resolver una tarea (Henríquez, 2014). Pizarro (2018) señala, además, que el ETM<sub>G</sub> personal pone en juego los

conocimientos y procesos cognitivos de cada individuo, ya sea del profesor o de los estudiantes. Éste puede irse enriqueciendo y tal como su nombre lo indica, cada individuo desarrolla su propio ETM<sub>G</sub> personal.

Explicado de otra forma, en la construcción del ETM<sub>G</sub> el individuo pasa a ser un diseñador que desempeña un rol parecido al del arquitecto que bosqueja un espacio de trabajo para usuario potenciales. En el aula, el diseño de este espacio va a depender del ETM<sub>G</sub> personal del profesor, por lo que no es fijo y necesita continuamente de modificaciones para ajustarse a las restricciones locales. Este espacio requiere posibilitar el trabajo geométrico en el paradigma correspondiente a la problemática considerada y sus diferentes componentes deben estar organizados de manera efectiva para la realización de la tarea matemática deseada.

## CAPÍTULO 3

### MARCO METODOLÓGICO

La investigación científica se concibe como un proceso. Término dinámico, cambiante y evolutivo (Hernández, Fernández & Baptista, 2004), pero a su vez, rigurosa, organizada y cuidadosamente llevada a cabo (Hernández, Fernández & Baptista, 2004). El capítulo tres se enmarca en la presentación de la construcción teórica del proceso por el cual se lleva adelante el procedimiento de investigación científica de cuatro etapas (Chong de la Cruz, 2007). Y, tal como señala F.N. Kerlinger (2012) se ha de presentar de manera sistemática, empírica y crítica. Bajo un enfoque epistemológico a partir del cual se construye el objeto de investigación, con un paradigma cualitativo, detallando los pasos para llevar a cabo una investigación de tipo documental que permita dar respuesta a las preguntas y por ende, a los objetivos investigativos.

#### **3.1 Problema de investigación**

Desde lo abordado en el capítulo “planteamiento del problema”, en el cual se presentan cada una de las motivaciones que suscita esta investigación, y se ahonda tanto en los factores que sirven como referentes contextuales del modelo educacional, como también aquellos que presentan pruebas cuantitativas respecto de la implementación del modelo de enseñanza nacional. Y así, la importancia y responsabilidad de la Noosfera, sus decisiones y por ende, sus repercusiones en los resultados de enseñanza de la educación en Chile, antes del cuarto acto de la transposición didáctica de Chevallard. Para todo lo anterior, se ha de presentar los objetivos de investigación, junto con las preguntas que guían el proceso para poder alcanzarlos.

### **3.1.1 Objetivos de la investigación**

Un objetivo de investigación es el fin o meta que se pretende alcanzar en un proyecto, estudio o trabajo de investigación. También indica el propósito por el que se realiza una investigación.

#### **3.1.1.1 Objetivo General**

Analizar el Espacio de Trabajo Matemático Geométrico de referencia e idóneo entorno al objeto matemático triángulo en tercero y cuarto básico en la educación chilena.

#### **3.1.1.2 Objetivos Específicos**

- Comparar el grado de similitud entre las circulaciones que provocan las tareas matemáticas propuestas en los programas de estudio y las presentes en los textos escolares ministeriales de tercero básico.
- Comparar el grado de similitud entre las circulaciones que provocan las tareas matemáticas propuestas en los programas de estudio y las presentes en los textos escolares ministeriales de cuarto básico.

### **3.1.2 Preguntas investigativas**

La función de las preguntas de investigación es concretar la incógnita que se quiere desvelar. Tan importante es saber identificar bien el problema cómo especificar qué no forma parte de este, para evitar confundir conceptos parecidos.

#### **3.1.2.1 Que se sustentan en el marco teórico**

- ¿Qué tareas matemáticas se privilegian en los Programas de estudio respecto al objeto matemático triángulo?
- ¿Qué tareas matemáticas se privilegian en los Textos Escolares ministeriales respecto al objeto matemático triángulo?.

### **3.1.2.2 Que guardan correspondencia con los objetivos**

- ¿Cuál es el grado de similitud entre las circulaciones de las tareas matemáticas propuestas en los programas de estudio y las presentadas en los textos escolares ministeriales de tercero básico, en el año 2018?
- ¿Cuál es el grado de similitud entre las circulaciones de las tareas matemáticas propuestas en los programas de estudio y las presentadas en los textos escolares ministeriales de cuarto básico, en el año 2018?

### **3.1.2.3 Que presentan coherencia interna con la problemática de estudio**

- ¿Qué actos de la noosfera están correctamente articulados (anterior al cuarto acto), en el sistema educacional chileno para generar habilidades lógicas matemáticas en los estudiantes de tercero y cuarto básico?

## **3.2 Metodología de la investigación**

En un proceso investigativo, la metodología es donde se explicita el conjunto de técnicas y métodos que se han de emplear para llevar a cabo las tareas vinculadas a la investigación. Así, se determina la manera en que se ha de recabar, ordenar y analizar los datos obtenidos otorgándole validez y rigor científico.

La metodología, como tal, es aplicable a variadas disciplinas de estudio, científicas, sociales, humanísticas, educativas, entre otras. Todo ha de depender de la materia y el tema de estudio.

### **3.2.1 Enfoque de la investigación**

“En lo que concierne al enfoque de investigación podemos decir que ello implica ante todo una postura epistemológica a partir de la cual se va a ir construyendo el objeto de investigación” (Gómez, 2011, p.229).

La epistemología se interroga, entre otros, acerca de: a) cómo la realidad puede ser conocida, b) la relación entre quien conoce y aquello que es

conocido, c) las características, los fundamentos, los presupuestos que orientan el proceso de conocimiento y la obtención de los resultados, y d) la posibilidad de que ese proceso pueda ser compartido y reiterado por otros a fin de evaluar la calidad de la investigación y la confiabilidad de esos resultados. (Vasilachis de Gialdino, 2009, p.2)

La epistemología está centrada en el sujeto que conoce, y que se ubica en un espacio-temporal, en una sola dirección, basado en sus fundamentos teóricos y en su instrumental metodológico (Vasilachis de Gialdino, 2007) “para abordar al sujeto que está siendo conocido y a la situación en la que se halla” (Vasilachis de Gialdino, 2007, p.5).

En este proceso de conocimiento el sujeto cognoscente queda como actor primordial manteniendo la distancia necesaria como para asegurar la objetividad de su conocimiento y suponiendo una diferencia que lo separa del sujeto conocido y que lo preserva de ser, él también, transformado durante dicho proceso (Vasilachis de Gialdino, 2007, p.5).

### **3.2.2 Paradigma de la investigación**

A lo largo del desarrollo de la Historia de la Ciencia, se han levantado diferentes corrientes de investigación, las cuales han intentado buscar el conocimiento desde varias perspectivas. Existen dos grandes paradigmas en los cuales éstas corrientes se posicionan: cuantitativo y cualitativo. Para efectos de la presente investigación, ésta se sustenta en un enfoque cualitativo.

La investigación cualitativa abarca distintas orientaciones y enfoques, diversas tradiciones intelectuales y disciplinarias que se fundan, muchas veces, en diferentes presupuestos filosóficos y que despliegan renovadas estrategias de recolección y de análisis de los datos. Esta multiplicidad de concepciones acerca de aquello que se conoce, de lo que se puede conocer, de cómo se conoce y de la forma en la que se han de transmitir los resultados obtenidos, habla de la necesidad de señalar que no hay una sola forma legítima de hacer investigación cualitativa. (Vasilachis de Gialdino, 2009, p.5)

Hernández (2004), denota la investigación cualitativa como aquel enfoque que aporta profundidad a los datos, la dispersión, la riqueza interpretativa, la contextualización del ambiente o entorno, los detalles y las experiencias únicas.

Una sistematización de los cada vez más nutridos aportes que han intentado definir y, a la vez, caracterizar a la investigación cualitativa, permite agrupar esas características según refieran a: quién y qué se estudia (...), las particularidades del método (...) y la meta de la investigación (...). (Vasilachis de Gialdino, 2009, p.5)

No obstante, coexiste la posibilidad de que un estudio se desarrolle bajo la perspectiva de un enfoque cualitativo, que prevalece durante toda la investigación, pero en algún momento, presenta un componente del otro enfoque. La ventaja de este modelo Hernández citando a Ginnell (1997), “consiste en que presente un enfoque que en un ningún caso considera inconsistente y se enriquecen tanto la recolección de los datos como su análisis” (p.23).

“La triangulación es complementaria en el sentido de que traslapa enfoques y en una misma investigación mezcla diferentes facetas del fenómeno de estudio. Dicha unión o interpretación añade profundidad a un estudio”. (Hernández et al., 2004, p.17)

### **3.2.3 Técnica de la investigación**

La técnica de investigación consiste en la observación detallada del fenómeno en estudio. Para efectos de esta investigación se ha de emplear como técnica la investigación documental. “Proceso metódico y formal que facilita y apoya el acceso ágil y sistematizado al producto de investigación científicas, reportado en fuentes documentales” (Chong de la Cruz, 2007). Bajo ciertas normas de convención internacional, éste tipo de investigación, permite citar y referir fuentes que informan sobre las investigaciones realizadas en todo el mundo, en diferentes contextos y lenguas, con la finalidad, descritas por Chong de la Cruz (2007), de que puedan ser conocidas por todos.

En consecuencia de lo anteriormente estipulado es que, la investigación documental,

se ocupa del estudio de los documentos que se derivan del proceso de la investigación científica y de la información preexistente antes de empezar la investigación, y que se publican tanto en fuentes documentales tradicionales (libros, revistas, periódicos, etcétera) y de otro tipo, como lo son los diferentes recursos audiovisuales, multimedia y digitales. (Chong de la Cruz, 2007, p.183)

“Para saber en dónde se inserta la investigación documental, es necesario considerar que ésta se sustenta en los cuatro métodos generales de la investigación científica, a saber: analítico, sintético, inductivo y deductivo” (Chong de la Cruz citando a Rojas Soriano, 1990) “todo esto dentro de un proceso dialéctico” (Chong de la Cruz, 2007, p.183)

Uno de los objetivos de la investigación documental es coadyuvar en la sistematización, asimilación, comparación, organización y clasificación de los elementos del conocimiento (Chong de la Cruz, 2007), indagando en lo que específicamente se lee en los distintos documentos o fuentes, que pudo, según Gómez (2001) en algún momento, haber sido inclusive escrito con otra intención distinta a ésta de la cual se intenta comprenderlos.

En el paradigma de la investigación (3.2.2) se ha declarado de tipo cualitativa. Sin embargo, en este caso, y a modo de precisión, que el tipo de paradigma de una investigación, no le da el hecho de ser en sí documental. Sino que, es la manera en cómo el investigador aborda la información que guía el tema central de estudio. Por ello, y para efectos de éste, se ha de desarrollar bajo la perspectiva de un enfoque cualitativo, que prevalece durante toda la investigación, pero en algún momento, presenta un componente del otro enfoque (cuantitativo). Sin embargo,

“El hecho de adoptar la perspectiva cualitativa no es para eludir cualquier tipo de manejo de datos o similares, sino por qué el interés es más de carácter interpretativo y comprensivo buscando captar exhaustivamente lo que dicen

los textos. Además la lógica de la construcción del conocimiento se orienta justamente hacia lo interpretativo-comprensivo” (Gómez, 2011, p. 230)

Chong de la Cruz (2007) define fases del proceso de investigación documental. Desde las cuales es posible identificar:

- a) Investigación: Etapa que desarrolla la búsqueda e identificación de las fuentes de investigación, localización, obtención y otras características.
- b) Sistematización: Posterior al análisis y cuantificada la información, es necesario organizar el conjunto de elementos que respondan al objeto de estudio.
- c) Exposición: Corresponde al momento en el cual se determina la modalidad en la que se ha de exponer y comunicar los resultados de la investigación. Que para efectos de este trabajo investigativo, corresponde a una tesis.

El proceso de investigación documental por su parte, presenta cuatro etapas para su óptimo desarrollo. En la figura 16, se muestran las etapas concretas con sus diferentes elementos. Cabe señalar que cada uno de estos elementos tienen a su vez diversos componente.

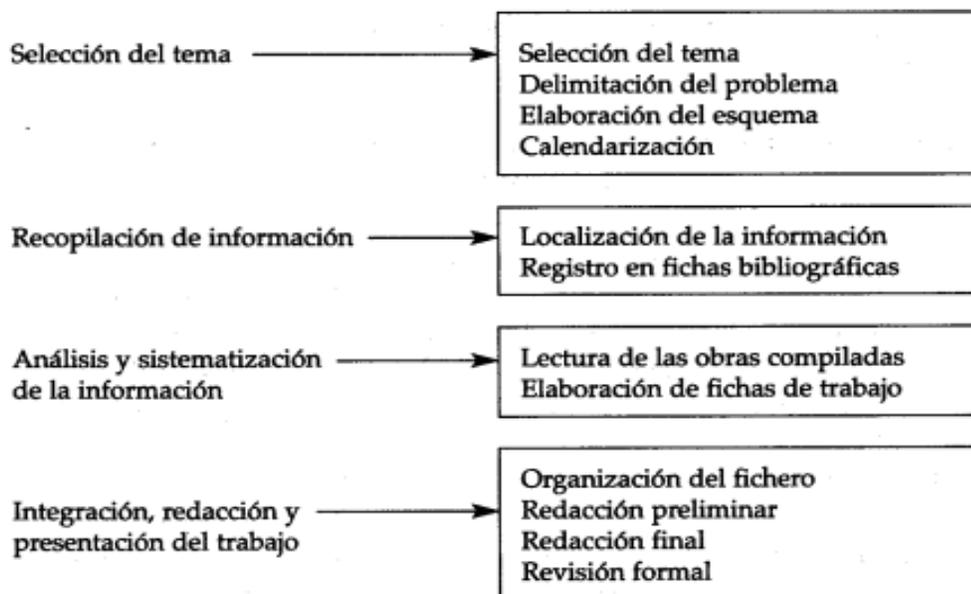


Figura 16. Etapas del proceso de investigación documental.  
Fuente: (Chong de la Cruz (2007), p.189)

Los referentes bibliográficos que avalan en la actualidad la investigación documental se presentan como escasos, y desde las perspectivas de expertos como Gómez (2011), esta investigación es un proceso complejo y delicado que amerita una posición de vanguardia en el marco de la investigación y en sus procedimientos.

### **3.3 Método de investigación**

Como se ha sido mencionado anteriormente, la presente investigación se basa en la técnica denominada investigación documental. A continuación se detallan los procedimientos llevados a cabo en cada una de las etapas del proceso.

#### **3.3.1 Selección del tema**

En esta primera etapa, se realiza una profundización de la investigación de Pizarro (2018) *“El trabajo geométrico en clases de séptimo básico en Chile: un estudio de casos sobre la enseñanza de los triángulos”*. En ella, se presentan los análisis realizados a partir de las observaciones de la forma de implementar el proceso de enseñanza-aprendizaje del área de geometría, específicamente en el objeto triángulo, para séptimo básico. Por ende, esta profundización se centra en los cursos de tercero y cuarto básico, continuando con dos de los elementos presentes en la investigación citada: área de geometría y objeto matemático triángulo; con la diferencia de que en dicho estudio, se ha de realizar mediante el análisis de los textos escolares de la asignatura de matemáticas utilizados por los estudiantes de los cursos señalados.

Los cursos mencionados para la presente investigación, fueron seleccionados en base al término del primer ciclo de la enseñanza básica. Esto quiere decir, que los contenidos entregados de primero a cuarto básico, son evaluados mediante pruebas estandarizadas, como el SIMCE.

### 3.3.2 Recopilación de la información

Una vez planteado el problema, el primer paso consiste en proveerse de toda la documentación posible, o de aquella que se considere la más importante para obtener una sólida base en la argumentación de las hipótesis. A esta técnica se le denomina sistema de sustentación documental. (Robledo, s.f, p. 63)

Es por ello, que la segunda etapa, localiza la información que guía esta investigación. Esto se realizará a través de un registro de fichas bibliográficas, que muestran las fuentes que se han de utilizar para el análisis (ver figura 17, figura 18, figura 19 y figura 20)

“Las técnicas de investigación documental incluyen todos los procedimientos y los instrumentos que permiten el uso óptimo y racional de los recursos documentales disponibles de información” (Robledo, s.f, 63)

Para ello se delimitó la población del estudio que abarca los cuatro textos escolares, entregados por el Ministerio de Educación, para los cursos de tercero y cuarto básico del año 2018, los cuales se obtuvieron mediante la donación proveniente de un centro de práctica, a las integrantes del grupo tesis. Para cada curso existen dos textos: el texto del estudiante y el cuaderno de ejercicios. De cada texto escolar mencionado, se toma la muestra. El muestreo consiste en tomar un subgrupo de esa población, que para esta investigación corresponde a las actividades que contengan como enfoque principal, el trabajo con el objeto triángulo.

En el proceso de la investigación científica, es imprescindible la sustentación documental, independiente del tipo de investigación de que se trate, por lo tanto, para el acopio y manejo de la información pertinente, se hace necesario la utilización de distintos instrumentos, entre los cuales tenemos las fichas (Robledo, 2003, p 63)

Una de las funciones que presentan las fichas en el proceso de investigación documental corresponde, en base a lo señalado por Robledo (2003), es facilitar el

registro de información, facilitar la organización y clasificación de la información de manera eficiente a través de los ficheros, permite el procesamiento de la información, entre otros (Robledo, 2003)

<b>Curso</b>	<b>Referencia Bibliográfica</b>
Tercero Básico	Ministerio de Educación (2018). Texto del estudiante. Santiago, Chile: Santillana.
<b>Descripción</b>	
El libro presenta diferentes actividades con el fin de desarrollar y potenciar las habilidades referidas al área de matemáticas y enseñar los contenidos mínimos establecidos por el Ministerio de Educación para tercero básico. Estos contenidos son números, operaciones, patrones, geometría, mediciones y datos.	

*Figura 17.* Ficha: Referencia bibliográfica del texto de estudio utilizado en el análisis de la investigación. Fuente: (Elaboración propia grupo tesis, 2018)

<b>Curso</b>	<b>Referencia Bibliográfica</b>
Tercero Básico	Ministerio de Educación (2018). Cuaderno de ejercicios. Santiago, Chile: Santillana.
<b>Descripción</b>	
El cuaderno de ejercicios presenta diferentes actividades con el fin de extender y complementar el proceso de aprendizaje llevado a cabo en el texto del estudiante, mediante el refuerzo y ejercitación de ellas.	

*Figura 18.* Ficha: Referencia bibliográfica del texto de estudio utilizado en el análisis de la investigación. Fuente:(Elaboración propia grupo tesis, 2018)

<b>Curso</b>	<b>Referencia Bibliográfica</b>
Cuarto Básico	Ministerio de Educación. (2018). Texto de estudiante. Santiago, Chile: SM.
<b>Descripción</b>	
El libro presenta diferentes actividades con el fin de desarrollar y potenciar las habilidades y actitudes referidas al área de matemáticas y enseñar los contenidos mínimos establecidos por el Ministerio de Educación para cuarto básico. Estos contenidos son números, álgebra, patrones, geometría, mediciones y datos.	

*Figura 19.* Ficha: Referencia bibliográfica del texto de estudio utilizado en el análisis de la investigación. Fuente:(Elaboración propia grupo tesis, 2018)

<b>Curso</b>	<b>Referencia Bibliográfica</b>
Cuarto Básico	Ministerio de Educación. (2018).Cuaderno de ejercicios. Santiago, Chile: SM.
<b>Descripción</b>	
El cuaderno de ejercicios presenta diferentes actividades con el fin de extender y complementar el proceso de aprendizaje llevado a cabo en el texto del estudiante, mediante el refuerzo y ejercitación de ellas.	

*Figura 20.* Ficha: Referencia bibliográfica del texto de estudio utilizado en el análisis de la investigación. Fuente:(Elaboración propia grupo tesis, 2018)

La tabla 7 presentada a continuación, señala los criterios de inclusión y exclusión que son utilizados para la selección de los recursos analizados llevados a cabo en esta investigación.

**Tabla 7**

Criterios de inclusión y exclusión para seleccionar los recurso de análisis

Criterios de Inclusión	Criterios de Exclusión
Textos Escolares entregados por el Ministerio de Educación.	Textos Escolares complementarios que son adquiridos de manera particular.
Cursos de tercero y cuarto básico.	Todos aquellos cursos que no están dentro de los criterios de inclusión.

### 3.3.3 Análisis y sistematización de la información

En esta tercera etapa, se realiza una lectura de las obras compiladas y la elaboración de fichas de trabajo que ayudarán a realizar el análisis y sistematización de las actividades seleccionadas de los textos de estudio para los cursos señalados. Los instrumentos utilizados para la recolección de datos fueron:

- Investigación Pizarro (2018) *“El trabajo geométrico en clases de séptimo básico en Chile: un estudio de casos sobre la enseñanza de los triángulos”*. Desde ella, se extrae el análisis de los Objetivos de Aprendizaje (OA) presentes en las Bases Curriculares y el análisis de las actividades propuestas en los Programas de Estudios en tercero y cuarto básico.
- Textos de Estudios entregados por el Ministerio de Educación. De ellos, se seleccionan las actividades correspondientes al trabajo del objeto matemático triángulo, para luego analizarlas en base al tipo de circulación que éstas poseen, según el Espacio de Trabajo Matemático (ETM), planteado por Kuzniak (2011). Estos análisis serán elaborados y presentados mediante la creación de fichas de trabajo. Dichas fichas, serán de tipo mixto, en donde se “mezcla partes de resumen, partes textuales, y partes de

comentario personal, procurando respetar la idea expuesta por el autor”  
(Chong de la Cruz, 2007, p.198)

A continuación, se presentarán las fichas utilizadas en los análisis. La primera de ellas (figura 21), se utilizará en aquellas actividades donde las tareas matemáticas contengan un solo tipo de circulación de  $ETM_G$ . La segunda (figura 22), en aquellas actividades donde las tareas matemáticas contengan dos o más tipos de circulaciones de  $ETM_G$ .

FICHA N°	
DATOS	
Curso	
Texto escolar	
Página	
Actividad	
Descripción de la actividad	
ANÁLISIS	
Circulación	Componentes
	Visualización:
	Espacio Real y Local / Representamen:
	Construcción:
	Artefacto:
	Prueba:
	Referencial:
OBSERVACIONES	

Figura 21. Ficha de análisis de las circulaciones presentes en las actividades seleccionadas para cada curso. Fuente:(Elaboración propia grupo tesis, 2018)

<b>FICHA N°</b>	
<b>DATOS</b>	
<b>Curso</b>	
<b>Texto escolar</b>	
<b>Página</b>	
<b>Actividad</b>	
<b>Descripción de la actividad</b>	
<b>ANÁLISIS</b>	
<b>Circulación</b>	<b>Componentes</b>
<b>Tarea "x<sup>1</sup>"</b>	
	<b>Visualización:</b>
	<b>Representamen:</b>
	<b>Construcción:</b>
	<b>Artefacto:</b>
	<b>Prueba:</b>
	<b>Referencial:</b>
<b>Tarea "x"</b>	

---

<sup>1</sup> "X" hace referencia al valor con el cual se ha de etiquetar el ítem de la tarea analizada. En general, los textos de estudio declaran las tareas bajo el nombre correlativo del abecedario.

	<b>Visualización:</b>
	<b>Representamen:</b>
	<b>Construcción:</b>
	<b>Artefacto:</b>
	<b>Prueba:</b>
	<b>Referencial:</b>
<b>OBSERVACIONES</b>	

Figura 22. Ficha de análisis de las circulaciones presentes en las actividades que poseen más de una circulación, seleccionadas para cada curso. Fuente:(Elaboración propia grupo tesis, 2018)

Además se ha de crear una ficha de tipo textual, “en esta modalidad, el texto que se ha seleccionado de la fuente documental se transcribe fielmente. Es muy útil cuando se desea expresar exactamente lo que afirmó un autor, sin deformar su sentido” (Chong de la Cruz, 2007, p.196).

<b>Curso</b>	<b>Objetivo de Aprendizaje</b>	<b>Descripción</b>

Figura 23. Ficha: Objetivos de Aprendizaje que involucran el trabajo de triángulo  
Fuente:(Elaboración propia grupo tesis, 2018)

Para la sistematización de los análisis realizados se han de crear dos tablas de doble entrada. La primera de ellas (tabla 8) para comparar los verbos utilizados en las consignas de los Objetivos de Aprendizajes y las actividades seleccionadas de

los textos de estudios. La segunda (tabla 9), presenta el resumen del total de las circulaciones que posee cada curso analizado. Cabe mencionar además, que los gráficos contruidos para mostrar los resultados tabulados serán plasmados mediante imágenes.

**Tabla 8**

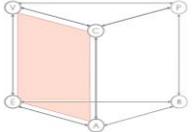
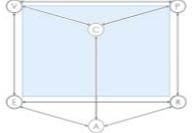
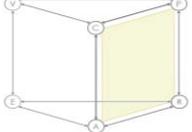
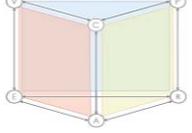
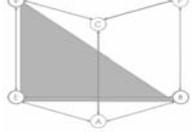
*Verbos de las consignas según circulación.*

Circulación	Verbos extraído de las consignas de cada OA

Fuente:(Elaboración propia grupo tesis, 2018)

**Tabla 9**

*Resumen de las circulaciones*

Tipo de Circulación	Cantidad de actividades en (curso)
 <p data-bbox="248 527 508 646"><i>Figura 12. Circulación plano [Sem – Ins] (Fuente: Kuzniak &amp; Nechache, 2015)</i></p>	
 <p data-bbox="248 831 508 951"><i>Figura 14. Circulación plano [Sem – Dis] (Fuente: Kuzniak &amp; Nechache, 2015)</i></p>	
 <p data-bbox="248 1136 508 1255"><i>Figura 13. Circulación plano [Ins – Dis] (Fuente: Kuzniak &amp; Nechache, 2015)</i></p>	
 <p data-bbox="248 1440 508 1497"><i>Figura 11. Circulación completa del ETM<sub>G</sub></i></p>	
 <p data-bbox="248 1682 508 1801"><i>Figura 15. Semiplano Semiótico-referencial [Sem-ref] (Fuente: Pizarro,2018)</i></p>	
<p data-bbox="280 1829 472 1856"><b>Total de tareas</b></p>	

Fuente:(Elaboración propia grupo tesis, 2018)

### **3.3.4 Integración, redacción y presentación del trabajo**

En esta cuarta y última etapa, se realiza la organización de las fichas creadas, la redacción preliminar y final de la investigación realizada para terminar con su revisión formal. Para ello, el capítulo de análisis y resultado ha de ser estructurado y redactado con ciertos criterios, con el fin de organizar la información estudiada.

Los análisis serán presentados mediante tres instancias. Las dos primeras, han sido extraídas en base a la investigación anteriormente citada, ocupada como instrumento.

La primera instancia, se realiza a partir del análisis de las Bases Curriculares elaboradas por el Mineduc, en donde se encuentran los Objetivos de Aprendizajes (OA). Se organiza mediante la división del análisis realizado por curso, primero presentando tercero básico y luego cuarto básico. Esta estructura ha sido utilizada en la redacción de cada una de las tres instancias a analizar. El orden presentado en los objetivos de aprendizaje se basó en la numeración establecida en dichas Bases Curriculares (orden correlativo). Al final de cada análisis, se expone la conclusión que se extrae de él.

La segunda instancia, desde los Programas de Estudios, donde se encuentran las actividades sugeridas para el logro de dichos OA. Se presenta el análisis de cada una de ellas, mediante la ficha n°1 mencionada en el punto 3.3.3. Al igual que en la primera instancia, se ha de presentar las conclusiones pertinentes para cada objetivo, terminando con una conclusión general de cada curso que permita englobar todo el análisis realizado. Para sistematizar la información, se presenta la tabla 9 resumen de las circulaciones.

Finalmente, la tercera instancia ha de presentar los análisis de las actividades que se abordan en los textos escolares de estudio, para tercero y cuarto básico, entregados por el Ministerio de Educación a los establecimientos educacionales para el periodo 2018. Para poder contextualizar el análisis realizado, se ha de elaborar una breve descripción sobre la organización y visión que posee el texto sobre los contenidos que abordan cada curso señalado. Luego, se ha de presentar

las fichas de análisis por actividad referidas a cada OA del área de geometría. Dichas fichas, han sido ordenadas en la medida que aparecen en los textos escolares, no en orden correlativo de numeración de los OA. Al término de esto, como en las instancias anteriores, se extraen las conclusiones para cada uno de ellos. Para tercero básico, los objetivos aparecen de la siguiente manera: OA 17, OA 15 y OA 21; en cuarto básico solo se analizará el OA 17, ya que el OA 18 queda fuera del rango de estudio de esta investigación, debido a que el triángulo se usa como componente artefacto. Sin embargo, se han encontrado algunas actividades que tienen como centro de estudio al objeto triángulo, pero no concuerdan con las consignas presentes en los OA planteados para el curso en cuestión. Estas se desarrollaron en un punto posterior a las conclusiones extraídas del OA 17.

Al término de los análisis y conclusiones especificadas, se ha de presentar el cuadro resumen de las circulaciones que sirve de sistematización de la información presentada.

La metodología de la sistematización consiste en la redacción, por un lado, del ETM<sub>G</sub> de referencia de los objetivos de aprendizajes y la muestra de estudio; y por otro el ETM<sub>G</sub> idóneo de las actividades. Esto es aplicado de igual manera en tercero y cuarto básico. Se termina luego con el análisis y presentación de los grados de similitud y diferencia entre los ETM<sub>G</sub> mencionados para cada curso en cuestión. Para ello, se han creado rangos de comparación para determinar qué tan lejano o cercano se encuentran los ETM<sub>G</sub> estudiados.

La tabla 10, presenta los intervalos que han sido diseñados y creados por el grupo tesis, a través de los siguientes pasos estadísticos:

1) *Calcule el Rango (R)*: También se llama recorrido o amplitud total. Es la diferencia entre el valor mayor y el menor de los datos.

$$R = x_{m\acute{a}x} - x_{m\acute{i}n}$$

Se ha considerar, que el valor mayor de la muestra de datos ha de ser cien (en porcentual) y, el menor valor, ha de ser cero (en porcentual).

2) Seleccione el Número de Intervalos de Clase (ni): No debe ser menor de 5 y mayor de 12, ya que un número mayor o menor de clases podría oscurecer el comportamiento de los datos.

Se ha de considerar, que el número de intervalos corresponde a cinco, para no modificar el comportamiento de los datos.

3) *Calcule el Ancho del Intervalo (i)*: Se obtiene dividiendo el Rango para el número de intervalos

$$i = \frac{R}{ni}$$

El ancho de cada intervalo, a través de la fórmula matemática presentada anteriormente, resulta de un valor de veinte.

**Tabla 10**

*Escala de apreciación para determinar el grado de similitud entre el ETM<sub>G</sub> de referencia y ETM<sub>G</sub> idóneo*

Rangos de similitud (RS)	Escala de apreciación
[ 0 - 20 [	Semejante
[ 20 - 40 [	Aproximado a semejante
[ 40 - 60 [	Aproximado
[ 60 - 80 [	Aproximado a diferente
[ 80 - 100 ]	Diferente

Para obtener el rango de similitud en que se ha de mover los tipos de ETM<sub>G</sub>, se ha de presentar la siguiente fórmula matemática.

$$RS = | ETM_G \text{ de referencia} - ETM_G \text{ idóneo} |$$

# CAPÍTULO 4

## ANÁLISIS Y RESULTADOS

El cuarto capítulo aborda el estudio del espacio del trabajo matemático de referencia de los triángulos presentes en el currículum nacional chileno. Para ello, el capítulo se constituye a partir de tres instancias: la primera, está realizada a partir del análisis de las Bases Curriculares elaboradas por el Mineduc, en donde se encuentran los objetivos de aprendizajes; la segunda, desde los programas de estudios, donde se encuentran las actividades sugeridas para el logro de dichos OA.

Ambas extraídas de la investigación<sup>2</sup> “El trabajo geométrico en clases de séptimo básico en Chile: un estudio de casos sobre la enseñanza de los triángulos”, Pizarro (2018). Finalmente, la tercera instancia presenta los análisis de las actividades que se aborda en los textos escolares de estudio, para tercero y cuarto básico, entregados por el Ministerio de Educación a los establecimientos educacionales para el periodo 2018.

### 4.1 Análisis de la investigación

A continuación, se ha de presentar los análisis extraídos y realizados en las tres instancias mencionadas anteriormente.

#### 4.1.1 Análisis de las Bases Curriculares

En esta sección del capítulo se detalla de manera explícita, extractos del análisis de la investigación antes citada, que se vincula de manera directa con las Bases Curriculares que definen los Objetivos de Aprendizaje para cada nivel de la educación regular chilena, y que se relaciona al tratamiento del eje de la geometría, específicamente el objeto triángulo.

---

<sup>2</sup> Lo explicitado en este capítulo es posible encontrarlo en los anexos de “El trabajo geométrico en clases de séptimo básico en Chile: Un estudio de casos sobre la enseñanza de los triángulos” (Pizarro, 2018), p.24-37 de manera discontinua.

Es trascendental hacer énfasis en que los Objetivos de Aprendizaje no circulan como las tareas matemáticas. Sin embargo es posible representarlos en un diagrama de circulación, dada la consigna que se plantea a través de sus verbos.

#### 4.1.1.1 Tercero Básico

Este curso posee un total de veintiséis objetivos de aprendizajes que se distribuyen en los cinco ejes que articulan el programa de estudio. A continuación, se presenta los tres OA que abordan el objeto triángulo en los ejes de geometría y medición.

**Tabla 11**

*Objetivos de Aprendizaje que involucran el trabajo de triángulo en tercer año básico*

Curso	Objetivo de Aprendizaje	Descripción
<b>Tercero Básico</b>	15	Demostrar que comprenden la relación que existe entre figuras 3d y figuras 2d. - Construyendo una figura 3d a partir de una red (Plantilla). - Desplegar la figura 3d. (Ministerio de Educación, 2013, p.108)
	17	Reconocer en el entorno figuras 2d que están trasladadas, reflejadas y rotadas. (Ministerio de Educación, 2013, p.109)
	21	Demostrar que comprenden el perímetro de una figura regular e irregular: - Midiendo y registrando el perímetro de figuras del entorno en el contexto de la resolución de problemas. (Ministerio de Educación, 2013, p.109)

Fuente: (Anexos Pizarro, p.24)

#### 4.1.1.1.1 Análisis Objetivo de Aprendizaje 15

El presente OA se divide en dos instancias que se orientan en función de la génesis instrumental movilizada. Así es posible identificar los siguientes planos de manera simultánea en las dos instancias:

Plano semiótico-instrumental: Para este plano, tanto la génesis instrumental como la génesis semiótica están presentes a partir de las figuras y las formas, que cumplen el doble rol de espacio real y local y artefacto. Sin embargo, el proceso de construcción se diferencia entre ambas, ya que en la primera instancia el proceso de construcción se lleva a cabo desde formas presentes en una plantilla para construir los cuerpos. En el otro momento, se solicita “desplegar” la figura, es decir, separar un cuerpo en las partes que las contienen. De esta manera, se espera que puedan “demostrar la relación entre las figuras 3d con las 2d”.

Plano epistemológico: Sumado a los artefactos y el espacio real y local descritos anteriormente, se observa como componente referencial teórico al concepto de triángulo. De tal modo que, al no solicitar proceso de prueba, en la figura 24<sup>3</sup> se presenta la circulación correspondiente al OA 15.

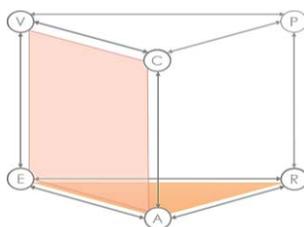


Figura 24. Circulación planos semiótico- instrumental y epistemológico

#### 4.1.1.2 Análisis Objetivo de Aprendizaje 17

Luego del reconocimiento de figuras geométricas, en el OA 17 se incorpora el concepto de transformaciones isométricas, en donde se espera que sean capaces de poder “identificar en el entorno figuras 2D que hayan sido rotadas, reflejadas o trasladadas”. A partir de esto, se constata el siguiente plano.

---

<sup>3</sup> Esta circulación aparece en esta parte de la investigación ya que se desprende desde la circulación de uno de los planos existentes y dos génesis, mencionados en el capítulo de Marco Teórico.



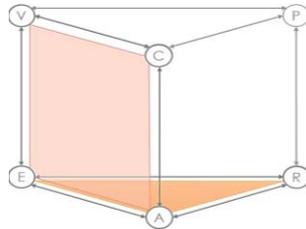


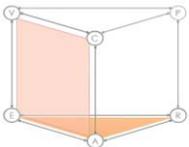
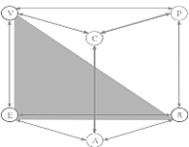
Figura 24. Circulación planos semiótico- instrumental y epistemológico

#### 4.1.1.1.4 Conclusiones

Tercero básico aborda a través de tres objetivos de aprendizaje el eje de geometría en el objeto triángulo. Si bien, los OA no circulan, si poseen potenciales circulaciones en las consignas declaradas bajo los verbos que guían el actuar de los estudiantes. Mediante el análisis expuesto anteriormente, dos de los OA circulan en un plano [Sem-Ins] y plano epistemológico, mientras que el tercero lo hace como semiplano [Sem-Ref]. Para efectos de esta investigación, se despliega la siguiente tabla (tabla 12) que agrupa los diferentes verbos de las consignas de cada OA, según la circulación que potencialmente presentan.

**Tabla 12**

*Verbos de las consignas según circulación.*

Circulación	Verbos extraído de las consignas de cada OA
 <p data-bbox="272 1486 748 1545">Figura 24. Circulación planos semiótico- instrumental y epistemológico</p>	<p data-bbox="1029 1398 1187 1430">Demostrar.</p>
 <p data-bbox="256 1776 764 1835">Figura 15. Semiplano Semiótico-referencial [Sem-Ref]. (Fuente: Pizarro,2018)</p>	<p data-bbox="1029 1703 1187 1734">Reconocer.</p>

Cabe señalar, que en estas circulaciones, el verbo “demostrar” se asocia a la experiencia empírica de constatar, movilizand o entonces cinco de los seis componentes para alcanzar una circulación completa.

#### 4.1.1.2 Cuarto Básico

Este curso posee un total de veintisiete objetivos de aprendizaje que se distribuyen en los cinco ejes que articulan el programa de estudio. A continuación, se presenta los dos OA que abordan el objeto triángulo en el eje de geometría.

**Tabla 13**

*Objetivos de Aprendizaje que involucran el trabajo de triángulo en cuarto año básico*

Curso	Objetivo de Aprendizaje	Descripción
Cuarto básico	17	Demostrar que comprenden una línea de simetría: › identificando figuras simétricas 2d › creando figuras simétricas 2d › dibujando una o más líneas de simetría en figuras 2d › usando software geométrico (Ministerio de Educación, 2013, p.115)
	18	Trasladar, rotar y reflejar figuras 2d. (Ministerio de Educación, 2013, p.115)

Fuente: (Anexos Pizarro,2018, p.33)

#### 4.1.1.2.1 Análisis Objetivo de Aprendizaje 17

El OA 17 se divide en dos grandes acciones en relación a sus verbos, una acción referida a identificar y otra referida a construir. Así, se identifica el semiplano semiótico-referencial y el plano Semiótico-instrumental.

Semiplano Semiótico-referencial: Dada la naturaleza del verbo “identificando figuras 2d”, se observa la presencia de la génesis semiótica por medio de la representación de las formas 2d que permiten la visualización del componente referencial que corresponde al concepto de simetría. En la siguiente figura se observa la circulación para el OA 17:

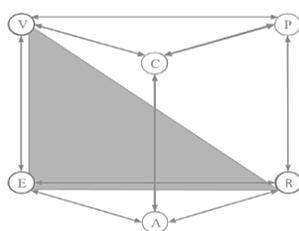


Figura 15. Semiplano Semiótico-referencial [Sem-Ref]. (Fuente: Pizarro,2018)

Plano semiótico-instrumental y epistemológico: Sumado a los componentes descritos en el semiplano anterior, para esta segunda instancia se incorporan los artefactos y el proceso de construcción solicitado (creando, dibujando o utilizando software geométrico). De esta manera, se incorpora para este momento, la génesis instrumental. Por lo tanto, lo único no solicitado es el proceso de prueba. A continuación, se presenta en la siguiente figura la circulación del OA 17:

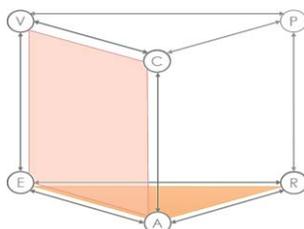
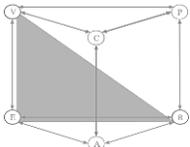
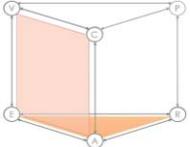


Figura 24. Circulación planos semiótico- instrumental y epistemológico

A continuación, en la tabla 14 se presenta la circulación correspondiente al OA 17:

**Tabla 14**

*Desglose de la circulación del OA 17*

 <p><i>Figura 15. Semiplano Semiótico-referencial [Sem-Ref]. (Fuente: Pizarro,2018)</i></p>	 <p><i>Figura 24. Circulación planos semiótico-instrumental y epistemológico</i></p>
--	---

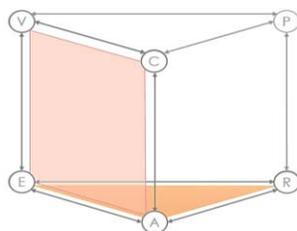
#### 4.1.1.2.2 Análisis Objetivo de Aprendizaje 18

El OA 18 indica “trasladar, rotar y reflejar figuras 2d”. Dado lo anterior es posible identificar el plano semiótico-instrumental y el plano epistemológico.

Plano semiótico-instrumental: A partir de la consigna, se observa que las figuras en este caso permiten determinar de manera simultánea la génesis semiótica, como también la transformación isométrica asociada a la representación de cada una de ellas, es decir, la génesis instrumental está dada en función de la rotación, traslación o reflexión realizada a cada una de las formas.

Plano epistemológico: En conjunto con el componente de espacio real y local, y el artefacto utilizado en la descripción anterior, la incorporación del componente referencial de transformación isométrica permite que se identifique el plano epistemológico.

A continuación, en la siguiente figura 24, se presenta la circulación correspondiente al OA 18:



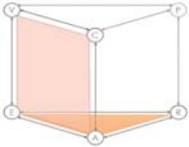
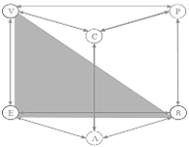
*Figura 24. Circulación planos semiótico-instrumental y epistemológico*

### 4.1.1.2.3 Conclusiones

Por su parte, cuarto básico aborda mediante dos objetivos de aprendizajes el objeto triángulo, de los cuales, y tras sus consignas declaradas bajo los verbos, se desprende una circulación conforme al plano semiótico-instrumental y el plano epistemológico, mientras que un objetivo se secciona en dos partes, provocando dos circulaciones simultáneas. Por un lado un semiplano [Sem-Ref] y, por otro un plano semiótico- instrumental y epistemológico. Para efectos de esta investigación, se despliega la siguiente tabla (tabla 15) que agrupa los verbos de las consignas de cada OA, según la circulación que potencialmente presentan.

**Tabla 15**

*Verbos extraídos de las consignas de cada OA según circulación*

Circulación	Verbos extraídos de las consignas de cada OA
 <p data-bbox="272 1129 748 1205"><i>Figura 24.</i> Circulación planos semiótico-instrumental y epistemológico</p>	<p data-bbox="1036 1010 1187 1192">Demostrar Usar Trasladar Rotar Reflejar</p>
 <p data-bbox="256 1423 764 1499"><i>Figura 15.</i> Semiplano Semiótico-referencial [Sem-ref]. (Fuente: Pizarro,2018)</p>	<p data-bbox="1040 1367 1182 1398">Identificar</p>

### 4.1.2 Análisis de Programas de Estudios

En esta sección del capítulo se detalla de manera explícita, extractos del análisis de la investigación ya citada, que se vincula de manera directa con las actividades propuestas en los Programas de Estudios de tercero y cuarto básico, para el tratamiento del eje de la geometría, específicamente el objeto triángulo. En cada

actividad se han de identificar las tareas matemáticas puestas en juego según las consignas declaradas en sus verbos y, sujetas a análisis mediante la utilización de fichas. Las fichas se han de enumerar de manera correlativa a partir del sistema de numeración.

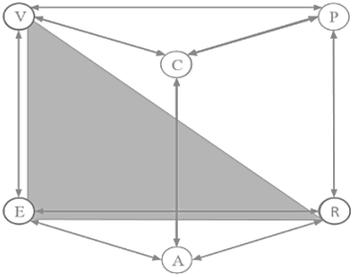
#### 4.1.2.1 Tercero Básico

Este curso posee un total de veintiséis objetivos de aprendizajes que se distribuyen en los cinco ejes que articulan el programa de estudio. A continuación, se presenta los tres objetivos de aprendizaje que abordan el objeto triángulo en los ejes de geometría y medición.

##### 4.1.2.1.1 Análisis de las actividades propuestas para el Objetivo de Aprendizaje 15

El Programa de estudio propone un total de cinco actividades, de las cuales sólo una trabaja el concepto de triángulo.

FICHA N°1	
DATOS	
<b>Curso</b>	3° Básico
<b>Fuente de Análisis</b>	Programa de Estudio de Matemáticas
<b>Página</b>	92
<p><b>Actividad</b></p> <p><b>1</b>  Desdoblan figuras 3D, como cubos, paralelepípedos, pirámides, prismas, cilindros y conos, y describen las figuras 2D que resultan.</p> <p><i>Figura 25. Actividad 1 (Ministerio de Educación, 2012, p.92)</i></p>	

<b>Descripción de la actividad</b>	Esta actividad consta de dos tareas, dentro de las cuáles una de ellas trabaja el concepto de triángulo, ya que luego de desdoblar las “figuras 3D”, deben identificar las formas 2D que están presentes.
<b>ANÁLISIS</b>	
<b>Circulación</b>	<b>Componentes</b>
 <p data-bbox="272 1037 602 1161"> <i>Figura 15. Semiplano Semiótico-referencial [Sem-ref]. (Fuente: Pizarro,2018)</i> </p>	<b>Visualización:</b> Forma 2D de triángulo en la pirámide.
	<b>Representamen:</b> Forma 3D de pirámide.
	<b>Construcción:</b> No presenta.
	<b>Artefacto:</b> No presenta.
	<b>Prueba:</b> No presenta.
<b>Referencial:</b> Concepto de triángulo.	
<b>OBSERVACIONES</b>	
<b>Análisis actividad 1</b> Se espera que, al momento de desdoblar la pirámide, se identifiquen los triángulos que la conforman. Por lo tanto, para esta tarea está presente el espacio real y local, que corresponde a los triángulos junto su respectiva visualización, y el concepto de triángulo corresponde al referencial teórico. Al no solicitar proceso de construcción ni tampoco de prueba, únicamente se está en presencia del semiplano [sem-ref].	

#### 4.1.2.1.1 Conclusión Objetivo de Aprendizaje 15

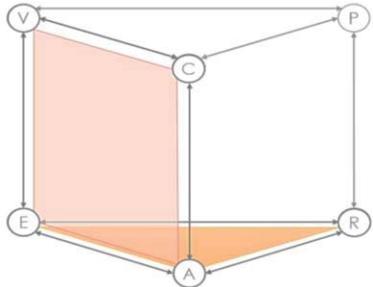
Por lo tanto, para lo que respecta al tratamiento de triángulos en este OA, se encuentra una coherencia parcial entre sus circulaciones, ya que se observa para la actividad la presencia del semiplano [sem-ref], puesto que se espera que el concepto de triángulo emerja por medio del reconocimiento de las formas que

constituyen, en este caso, una pirámide. Sin embargo, en lo que se indica en el OA que puedan medir los perímetros como proceso de construcción, lo cual no es trabajado en la actividad.

#### 4.1.2.1.2 Análisis de las actividades propuestas para el Objetivo de Aprendizaje 17

El Programa de estudio propone un total de diez actividades, de las cuales una aborda el concepto de triángulo, la cual se analiza a continuación

FICHA N°2	
DATOS	
<b>Curso</b>	3° Básico
<b>Fuente de Análisis</b>	Programa de Estudio Matemáticas
<b>Página</b>	150
<p><b>Actividad</b></p> <p><b>10</b>            Construyen figuras 2D reflejadas y trasladadas, en papel cuadriculado y/o papel de croquis, utilizando instrumentos geométricos y otros, rotadas en un cuarto de giro, medio giro y tres cuartos de giro.</p> <p><i>Figura 26. Actividad 2 (Ministerio de Educación, 2012, p.150)</i></p>	
<b>Descripción de la actividad</b>	La actividad 10 solicita que se construyan triángulos en función de distintas condiciones indicadas como tareas. De esta manera se observa que la cantidad de tareas dependerá del proceso de construcción asociado y los artefactos utilizados.

<b>ANÁLISIS</b>	
<b>Circulación</b>	<b>Componentes</b>
 <p><i>Figura 24. Circulación planos semiótico- instrumental y epistemológico</i></p>	<b>Visualización:</b> Forma 2D de triángulo.
	<b>Representamen:</b> Papel cuadriculado y/o papel croquis.
	<b>Construcción:</b> Instrumentos geométricos y/o papel cuadriculado.
	<b>Artefacto:</b> Instrumentos geométricos y papel cuadriculado.
	<b>Prueba:</b> No se presenta.
	<b>Referencial:</b> Concepto de triángulo y transformación isométrica.
<b>OBSERVACIONES</b>	
<p>En la presente actividad, se espera que el estudiante, dibuje y realice las tareas solicitadas a partir de un triángulo, de modo que, la génesis instrumental, a partir de la utilización de los instrumentos geométricos y el papel cuadriculado, variará según sea una reflexión, una traslación, o rotación con los ángulos solicitados. Asimismo, la génesis semiótica se observa a partir del espacio real y local junto a la visualización del triángulo en cada transformación isométrica. Finalmente, el referencial teórico corresponde de manera simultánea al concepto de triángulo y al concepto de transformación isométrica. De esta manera, no se observa proceso de prueba, por lo tanto, se está en presencia del plano semiótico-instrumental y el plano epistemológico. Esta circulación se repite en cada uno de los casos descritos previamente.</p>	

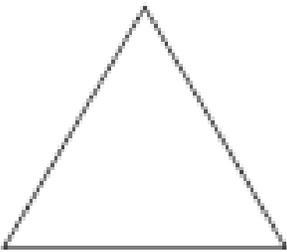
#### **4.1.2.1.2.1 Conclusión Objetivo de Aprendizaje 17**

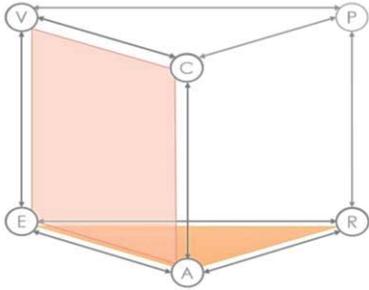
Lo primero que destaca al comparar la naturaleza de los verbos trabajados en la actividad con el presentado en el OA, es que se observa una diferencia significativa en ambos casos, puesto que para la actividad se solicita medir y en el OA identificar.

Lo anterior también refleja el tipo de génesis que están presentes al momento de contrastar las circulaciones. Por un lado, en el OA se está en presencia únicamente de la génesis semiótica, y en la actividad analizada se incorpora la génesis instrumental asociada a la medición de los lados del triángulo para realizar el cálculo de su perímetro.

#### 4.1.2.1.3 Análisis de las actividades propuestas para el Objetivo de Aprendizaje 21

El Programa de estudio propone un total de nueve actividades, de las cuales una aborda el concepto de triángulo, la cual se analiza a continuación.

<b>FICHA N°3</b>	
<b>DATOS</b>	
<b>Curso</b>	3° Básico
<b>Fuente de Análisis</b>	Programa de Estudio Matemáticas
<b>Página</b>	96
<p><b>Actividad</b></p> <p><b>8</b> Calculan el perímetro de un triángulo equilátero. Cada lado mide 4 cm.</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p style="text-align: center;"><i>Figura 27. Actividad 3 (Ministerio de Educación, 2012, p.96)</i></p>	
<b>Descripción de la actividad</b>	La actividad 8 solicita que los estudiantes calculen el perímetro de la figura.

<b>ANÁLISIS</b>	
<b>Circulación</b>	<b>Componentes</b>
 <p><i>Figura 24. Circulación planos semiótico- instrumental y epistemológico</i></p>	<b>Visualización:</b> Concepto de perímetro.
	<b>Representamen:</b> Triángulo equilátero.
	<b>Construcción:</b> Cálculo del perímetro.
	<b>Artefacto:</b> Fórmula del perímetro.
	<b>Prueba:</b> No se presenta.
	<b>Referencial:</b> Concepto de perímetro del triángulo equilátero.
<b>OBSERVACIONES</b>	
<p>Un aspecto que es necesario resaltar, tiene relación con que en esta actividad se aprecia la primera instancia donde se observa que, en primer lugar, la tarea solicita trabajar en un <math>ETM_G</math> a partir de la representación del triángulo equilátero. Sin embargo, al realizar el cálculo de perímetro del triángulo, se presenta un cambio de registro, en donde la suma de los lados se efectúa en un Espacio de trabajo matemático (ETM). A esta transición o cambio de registro de un espacio de trabajo matemático a otro, es lo que se conoce como fibración externa.</p>	

#### 4.1.2.1.3.1 Conclusión Objetivo de Aprendizaje 21

Al comparar la naturaleza de los verbos observados, es posible identificar algunas diferencias significativas en estos. Por ejemplo, el OA presenta el verbo *demostrar* para articular la actividad matemática en torno al concepto de perímetro en triángulos. Sin embargo, al observar el verbo presente en la actividad, nos encontramos con que *calcular* permite realizar el trabajo esperado sobre el perímetro de un triángulo equilátero. Este cálculo permite entonces, identificar por primera vez una fibración externa, ya que, al obtener la medida del perímetro se produce el cambio de registro figural por el numérico. Por lo tanto, nos encontramos

con que la acción de demostrar no corresponde necesariamente a la de una demostración matemática, sino que más bien para este nivel, la demostración está ligada a la de la experiencia empírica que permite dar cuenta del manejo de un procedimiento específico, es decir, el cálculo de un perímetro.

Por otro lado, en lo que respecta a las génesis encontradas, se observa que para el OA y para la actividad, la génesis semiótica es la misma, puesto que se basa solamente en la representación de un triángulo. Sin embargo, esto no ocurre con la génesis instrumental, puesto que para la actividad se solicita exclusivamente realizar el cálculo de perímetro, y para el OA se indica que demuestren, no explicitando el método para llevar a cabo esto. Sumado a esto, se observa el cambio de registro entre las instancias de tratamiento del concepto de perímetro, por lo que es posible observar por primera vez la fibración externa.

Finalmente, cabe destacar que nuevamente volvemos a encontrar que el concepto de figura se utiliza como sinónimo de forma, lo cual queda en evidencia al hablar en el OA sobre las “figuras 2D.”

#### **4.1.2.1.4 Conclusión Tercero Básico**

A través de las tres actividades y los dos OA presentes para este curso, es posible determinar que en términos de las génesis presentes en ambos OA, en el OA 17 se observa solo el semiplano [Sem-Ref], puesto que solicita únicamente que identifiquen perímetros, no así como ocurre con el OA 21 que además solicita que demuestren, por lo tanto se incorpora la génesis semiótica, ya que se ha observado que el verbo “demostrar” se asocia a la experiencia empírica de constatar.

Estos verbos, a su vez, orientan todo el trabajo matemático a lo largo de las actividades presentadas, específicamente por medio de los procesos de construcción, ya sea medir o construir formas.

En esta misma línea, el espacio real y local a lo largo del curso, es representado por medio de formas, y los artefactos no son especificados de manera explícita, aunque se infiere que se deben utilizar herramientas de dibujo o fórmula para realizar el

cálculo de perímetro. Asimismo, el referencial teórico tanto en ambos OA, como en las actividades presentadas, corresponde al concepto de perímetro.

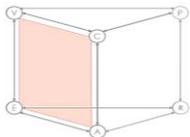
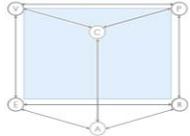
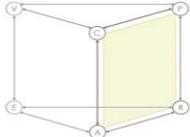
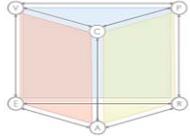
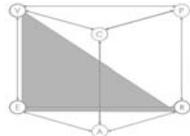
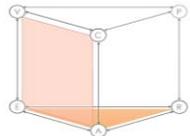
Cabe señalar, que, a lo largo de tercero básico, se observa que se utiliza al concepto de figura, como sinónimo de forma. Como también se observa la ausencia del proceso de prueba, tanto en los OA como en las actividades presentes.

Finalmente, se observa que el trabajo matemático sobre el cálculo de perímetro se realiza por medio de fibraciones externas, cuando se refiere específicamente a medir. Esto se observa cuando se trabaja sobre triángulos con la medida en cada uno de sus lados, y el cálculo y posterior resultado de éste se expresa en términos numéricos.

Para resumir todo lo anterior, se despliega la tabla 16, en la que se especifica la cantidad de actividades total que movilizan los mismo componentes y, por lo tanto pueden ser agrupados bajo el criterio de “tipo de circulación”.

**Tabla 16**

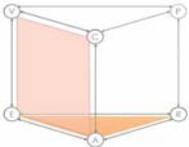
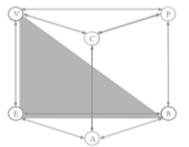
*Resumen de las circulaciones de tercero básico*

Tipo de Circulación	Cantidad de actividades en tercero básico
 <p data-bbox="250 493 727 556"><i>Figura 12. Circulación plano [Sem – Ins]</i> (Fuente: Kuzniak &amp; Nechache, 2015)</p>	0
 <p data-bbox="250 732 727 795"><i>Figura 14. Circulación plano [Sem – Dis]</i> (Fuente: Kuzniak &amp; Nechache, 2015)</p>	0
 <p data-bbox="250 974 727 1037"><i>Figura 13. Circulación plano [Ins – Dis]</i> (Fuente: Kuzniak &amp; Nechache, 2015)</p>	0
 <p data-bbox="250 1215 737 1310"><i>Figura 11. Circulación completa del ETM<sub>6</sub></i> (Fuente: Kuzniak &amp; Nechache 2015, citado en Pizarro 2018)</p>	0
 <p data-bbox="293 1484 683 1579"><i>Figura 15. Semiplano Semiótico-referencial [Sem-ref].</i> (Fuente: Pizarro,2018)</p>	1
 <p data-bbox="250 1755 727 1818"><i>Figura 24. Circulación planos semiótico-instrumental y epistemológico</i></p>	2
<p data-bbox="237 1850 548 1881"><b>Total de Actividades</b></p>	<b>3</b>

Los análisis expuestos anteriormente detallan la circulación de las actividades propuestas por el Programa de Estudio para el tratamiento de los OA. Estas circulaciones poseen sus génesis en los componentes que se movilizan según los verbos declarados en cada una de las consignas. Así, para efectos de esta investigación, se despliega la siguiente tabla (ver tabla 17) que agrupa los diferentes verbos de las consignas de las actividades, según la circulación presentan.

**Tabla 17**

*Verbos extraídos de las consignas de cada OA según circulación.*

Circulación	Verbos extraído de las consignas de cada OA
 <p data-bbox="272 921 748 982"><i>Figura 24. Circulación planos semiótico-instrumental y epistemológico</i></p>	<p data-bbox="1040 842 1179 909">Construir. Calcular.</p>
 <p data-bbox="256 1184 764 1245"><i>Figura 15. Semiplano Semiótico-referencial [Sem-ref]. (Fuente: Pizarro,2018)</i></p>	<p data-bbox="1032 1110 1187 1142">Desdoblar.</p>

#### 4.1.2.2 Cuarto Básico

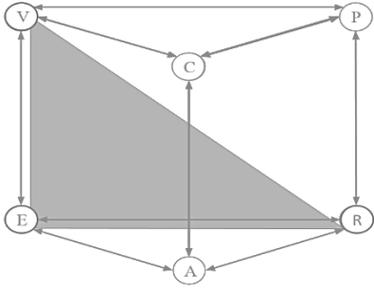
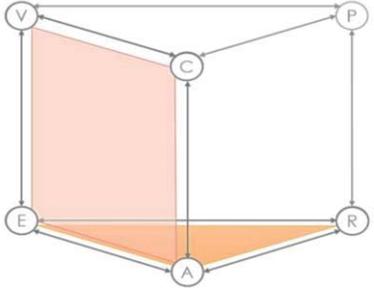
Este curso posee un total de veintisiete Objetivos de Aprendizaje que se distribuyen en los cinco ejes que articulan el Programa de Estudio. A continuación, se presenta los dos OA que abordan el objeto triángulo en el eje de geometría.

#### 4.1.2.2.1 Análisis de las actividades propuestas para el Objetivo de Aprendizaje 17

El Programa de estudio propone un total de once actividades, de las cuales una aborda el concepto de triángulo, la cual se analiza a continuación.

FICHA N°4	
DATOS	
Curso	4° Básico
Fuente de análisis	Programa de Estudio Matemáticas.
Página	113
<p><b>Actividad</b></p> <p><b>15</b>  Identifican la simetría en las señales de tránsito y trazan las líneas de simetría. (Las letras no cuentan.)  (Historia, Geografía y Ciencias Sociales)</p> 	
Descripción de la actividad	Esta actividad solicita que puedan identificar la simetría en las señales de tránsito. De esta forma se identifican dos tareas, primero identificar y luego trazar las líneas de simetría.

Figura 28. Actividad 4 (Ministerio de Educación, 2012, p.113)

<b>ANÁLISIS</b>	
<b>Circulación</b>	<b>Componentes</b>
 <p style="text-align: center;"><i>Figura 15. Semiplano Semiótico-referencial [Sem-ref]. (Fuente: Pizarro,2018)</i></p>	<p><b>Visualización:</b> Simetría de la forma 2D de triángulo.</p>
	<p><b>Representamen:</b> Imagen de la señal del tránsito (ceda el paso).</p>
	<p><b>Construcción:</b> No se presenta.</p>
	<p><b>Artefacto:</b> No se presenta.</p>
	<p><b>Prueba:</b> No se presenta.</p>
	<p><b>Referencial:</b> Concepto de simetría.</p>
<b>Circulación</b>	<b>Componentes</b>
 <p style="text-align: center;"><i>Figura 24. Circulación planos semiótico- instrumental y epistemológico</i></p>	<p><b>Visualización:</b> Simetría de la forma 2D de triángulo</p>
	<p><b>Representamen:</b> Imagen de la señal del tránsito (ceda el paso)</p>
	<p><b>Construcción:</b> trazado línea de simetría</p>
	<p><b>Artefacto:</b> artefacto geométrico o dibujo a mano alzada.</p>
	<p><b>Prueba:</b> No se presenta.</p>
<p><b>Referencial:</b> Concepto de simetría</p>	
<b>OBSERVACIONES</b>	
<p>Las instrucciones propuestas para la tarea dos planteadas por la actividad 5 no explicita la manera en la que el estudiante debe de trazar el eje de simetría, presentando una flexibilidad en cuanto al artefacto que se ha de utilizar al momento de la construcción. Esto, se a de reflejar en que, un estudiante puede utilizar un artefacto geométrico (por ejemplo una regla) o un artefacto no matemático para</p>	

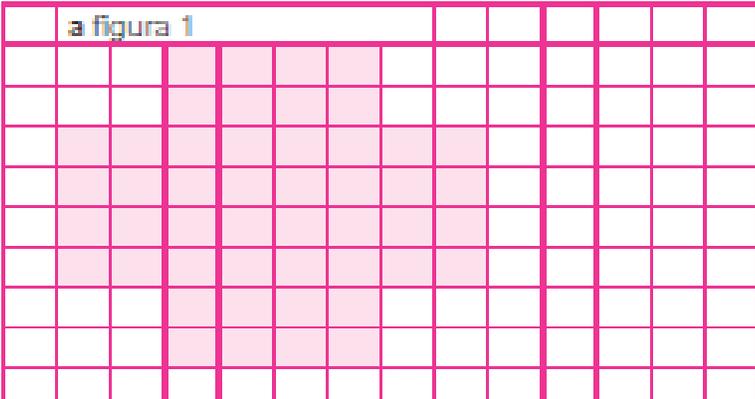
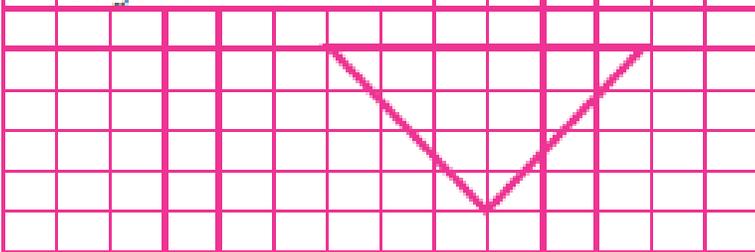
llevar a cabo lo solicitado. Así como también, puede realizar el proceso de construcción mediante un dibujo a mano alzada. No obstante, en todos los casos descritos anteriormente, se presenta el proceso de construcción.

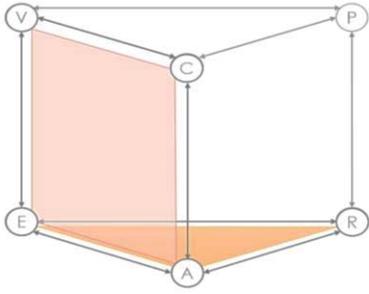
#### **4.1.2.2.1.1 Conclusión Objetivo de Aprendizaje 17**

Al comparar las circulaciones presentes en el OA con la de la actividad es posible observar que ambos casos se orientan a partir de los mismos verbos, es decir, “identificar y construir” la simetría en triángulos semejantes. En esta misma línea, estos verbos también movilizan exactamente las mismas génesis: para el verbo identificar se observa únicamente la génesis semiótica y el referencial, emergiendo entonces el semiplano [Sem-Ref]; y por otro lado, e incorporando los componentes anteriores, emerge la génesis instrumental articulada a partir del verbo “construir”.

#### **4.1.2.2.2 Análisis de las actividades propuestas para el Objetivo de Aprendizaje 18**

El Programa de estudio propone un total de nueve actividades, de las cuales una aborda el concepto de triángulo, la cual se analiza a continuación:

FICHA N°5	
DATOS	
<b>Curso</b>	4° Básico
<b>Fuente de análisis</b>	Programa de Estudio Matemáticas
<b>Página</b>	117
<p><b>Actividad</b></p> <p><b>5</b> Resuelven los siguientes problemas geométricos: trazan ejes de simetría en figuras simétricas.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p><b>a figura 1</b></p>  </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p><b>b figura 2</b></p>  </div>	
<i>Figura 29. Actividad 5 (Ministerio de Educación, 2012, p.117)</i>	
<b>Descripción de la actividad</b>	Para esta actividad, se solicita que los estudiantes puedan trazar ejes de simetría para la resolución de problemas algebraicos. Si bien, se le solicita a los estudiantes poner en juego sus conocimientos a través de dos tareas matemáticas propuestas, para efectos de

	esta investigación, solo se ha de poner énfasis en la figura 2, ya que presenta como forma 2D al triángulo.
<b>ANÁLISIS</b>	
<b>Circulación</b>	<b>Componentes</b>
 <p><i>Figura 24. Circulación planos semiótico- instrumental y epistemológico</i></p>	<b>Visualización:</b> Simetría de la forma 2D de triángulo
	<b>Representamen:</b> Imagen del texto con la ilustración de la figura b
	<b>Construcción:</b> Eje de simetría
	<b>Artefacto:</b> Cuadrícula presente en la imagen
	<b>Prueba:</b> No se presenta
	<b>Referencial:</b> Simetría axial
<b>OBSERVACIONES</b>	
No presenta observaciones relevantes.	

#### 4.1.2.2.2.1 Conclusión Objetivo de Aprendizaje 18

Si bien, tanto la actividad como el OA presentan la misma circulación, estas difieren tanto en la naturaleza de sus génesis, como el componente referencial teórico que moviliza la tarea matemática. Así, en lo que respecta a las génesis, las circulaciones difieren en torno a su génesis instrumental, ya que el OA indica que el trabajo matemático se orienta a partir de la realización de transformaciones isométricas a triángulos. Sin embargo, para la actividad presentada, se indica que la génesis instrumental emerge a partir del trazado de ejes de simetría. Esto a su vez permite identificar que el componente referencial, por lo tanto, en el OA corresponde al de transformaciones isométricas y en la actividad a simetría. Finalmente, nuevamente

encontramos que el concepto de figura y forma se utilizan como sinónimo, lo cual, queda de manifiesto en la descripción del OA al hablar de “figuras 2d”.

#### **4.1.2.2.3 Conclusión cuarto básico**

Al observar ambos OA presentes para este curso, se identifica que existe una progresión en torno a la complejidad presente en el referencial teórico, ya que, para el OA 17 se realiza el trabajo matemático en torno a identificar y construir simetrías en triángulos semejantes. Este trabajo permite posteriormente la incorporación del concepto de transformaciones isométricas en el OA 18, en donde, el trabajo está explícitamente orientado a realizar estas transformaciones a triángulos.

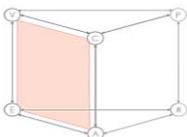
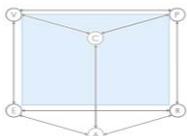
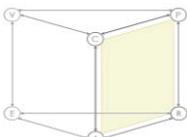
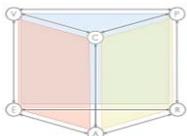
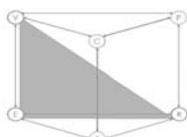
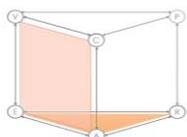
En lo que respecta a las génesis encontradas, existen dos tipos de circulaciones, la primera corresponde al semiplano [Sem-Ref], el cual se hace presente con el verbo “identificar” y con el concepto de simetría de triángulos como referencial teórico; la segunda circulación se orienta a partir de la inclusión de la génesis instrumental, específicamente a lo que refiere a trazar los ejes de simetría para ambas actividades. Dado lo anterior, los verbos identificar y construir son los que orientan el trabajo tanto de las actividades como de los OA.

Por otro lado, el espacio real y local es representado por medio de triángulos, ya sea identificados en el entorno o presentados en una hoja cuadriculada. En esta misma línea, esta hoja cuadriculada corresponde a los artefactos a utilizar, como también a herramientas de dibujo para realizar el trazado de las líneas de simetría. Sumado a lo anterior, también para este curso se utiliza nuevamente el concepto de figura como sinónimo de forma.

Para resumir todo lo anterior, se despliega la tabla 18, en la que se especifica la cantidad de actividades total que movilizan los mismo componentes y, por lo tanto pueden ser agrupados bajo el criterio de “tipo de circulación”.

**Tabla 18**

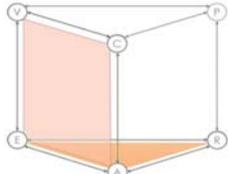
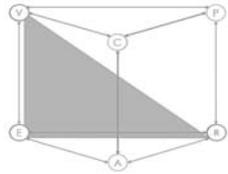
*Resumen de las circulaciones de tercero básico*

Tipo de Circulación	Cantidad de actividades en tercero básico
 <p data-bbox="235 493 714 556"><i>Figura 12. Circulación plano [Sem – Ins]</i> (Fuente: Kuzniak &amp; Nechache, 2015)</p>	0
 <p data-bbox="235 724 714 787"><i>Figura 14. Circulación plano [Sem – Dis]</i> (Fuente: Kuzniak &amp; Nechache, 2015)</p>	0
 <p data-bbox="235 966 714 1029"><i>Figura 13. Circulación plano [Ins – Dis]</i> (Fuente: Kuzniak &amp; Nechache, 2015)</p>	0
 <p data-bbox="235 1207 714 1302"><i>Figura 11. Circulación completa del ETM<sub>G</sub></i> (Fuente: Kuzniak &amp; Nechache 2015, citado en Pizarro 2018)</p>	0
 <p data-bbox="235 1476 714 1575"><i>Figura 15. Semiplano Semiótico-referencial [Sem-ref].</i> (Fuente: Pizarro,2018)</p>	1
 <p data-bbox="235 1749 714 1816"><i>Figura 24. Circulación planos semiótico-instrumental y epistemológico</i></p>	2
<p data-bbox="227 1848 535 1879"><b>Total de Actividades</b></p>	<b>3</b>

Los análisis expuestos anteriormente detallan la circulación de las actividades propuestas por el Programa de Estudio para el tratamiento de los OA. Estas circulaciones poseen sus génesis en los componentes que se movilizan según los verbos declarados en cada una de las consignas. Así, para efectos de esta investigación, se despliega la siguiente tabla (ver tabla 19) que agrupa los diferentes verbos de las consignas de las actividades, según la circulación presentan.

**Tabla 19**

*Verbos extraídos de las consignas de cada OA según circulación.*

Circulación	Verbos extraído de las consignas de cada OA
 <p data-bbox="282 993 756 1052"><i>Figura 24. Circulación planos semiótico-instrumental y epistemológico</i></p>	<p data-bbox="1053 911 1149 940">Trazar</p>
 <p data-bbox="264 1289 774 1348"><i>Figura 15. Semiplano Semiótico-referencial [Sem-ref]. (Fuente: Pizarro,2018)</i></p>	<p data-bbox="1029 1199 1175 1228">Identificar.</p>

### 4.1.3 Análisis de Textos de estudio

La tercera sección corresponde al análisis detallado y sistemático del objetivo mismo de la investigación: los textos escolares. En las siguientes planas se ha de encontrar las actividades aprobadas por el Ministerio de Educación para que, profesores y estudiantes traten el objeto triángulo en las aulas chilenas. Todo lo mencionado anteriormente, se vincula con el Espacio de Trabajo Matemático Geométrico (ETM<sub>G</sub>) idóneo.

### 4.1.3.1 Tercero Básico

El material didáctico Matemática 3° Básico es una obra colectiva, creada y diseñada por el Departamento de Investigaciones Educativas de Editorial Santillana bajo la dirección de Rodolfo Hidalgo Caprile.

Según los datos detallados en los mismos materiales, en su producción, elaboración y publicación han participado al menos dos miembros cuya profesión es pedagogía en matemáticas. Además se adhiere a un enfoque prescrito en el documento Bases curriculares para la Educación Básica (Ministerio de Educación, 2012). En el cual, se busca promover el desarrollo de los conocimientos, de las habilidades y de las actitudes de la asignatura a partir de la implementación de los Objetivos de Aprendizaje (OA), los Objetivos de Aprendizaje Transversales (OAT) y de las actitudes (Santillana, 2017, p.3).

Nuestra propuesta editorial, en consonancia con las Bases Curriculares, tiene como propósito formativo enriquecer la comprensión de la realidad, facilitar la selección de estrategias para resolver problemas y contribuir al desarrollo del pensamiento crítico y autónomo en todos los estudiantes, integrando y articulando los ejes temáticos definidos para la asignatura: Números y operaciones, Patrones y Álgebra, Geometría, Medición y Datos y probabilidades [...] Comprender la matemática y ser capaz de aplicar conceptos y procedimientos en la resolución de problemas reales es fundamental en el mundo moderno. Por esta razón, a lo largo de las actividades propuestas para cada unidad en el Texto del estudiante, Cuaderno de ejercicios, el set de Recursos Digitales Complementarios y la Guía Didáctica del Docente, los alumnos y las alumnas tendrán la oportunidad de trabajar y desarrollar en forma progresiva y articulada los conocimientos, las habilidades y las actitudes en soportes variados y en contextos estimulantes y atractivos. (Santillana, 2017, p.3)

En la fundamentación del diseño instruccional que plantea la Editorial, en primera instancia desarrolla su sustentabilidad en el abordaje de los Objetivos de

Aprendizaje y en el tratamiento de los Objetivos de Aprendizaje Transversales (OAT) definidos en las Bases Curriculares estipuladas por el Ministerio de Educación. En segunda instancia, plantea una secuencia didáctica vinculada a la exploración de situaciones problemas, encontrando una transición entre tres tipos de representaciones semióticas: concreta, pictórica y simbólica, el cual se denomina COPISI. Finalmente, con la metodología propuesta, la editorial pretende que los estudiantes elaboren una representación personal del objeto de aprendizaje, integrando las diferentes menciones del pensamiento lógico matemático, articulando la capacidad de formular conjeturas, resolver problemas, explorar caminos alternativos y modelar situaciones o fenómenos.

El análisis que se expone a continuación, se distribuye en base a los tres objetivos de aprendizajes que propone el Ministerio de Educación por medio de las Bases Curriculares, que se vinculan de manera directa con el objeto matemático triángulo. Se organiza cada actividad según al objetivo al que responde.

#### **4.1.3.1.1 Análisis de las actividades propuestas en los Textos escolares para el Objetivo de Aprendizaje 17**

<b>FICHA N°6</b>	
<b>DATOS</b>	
<b>Curso</b>	3° Básico
<b>Texto escolar</b>	Texto del estudiante matemática
<b>Página</b>	154
<b>Actividad</b>	

## Activo mi mente

1. 🗣️ Observa la imagen y comenta con tu curso.

- ¿Sobre qué tratará el texto?
- ¿Qué relación tendrá el texto con los aprendizajes del Tema 4?

2. Lee el texto.

### ¡Viva el arte!

En clase de Artes Visuales aprendimos que existen muchos artistas que utilizan la geometría para crear sus obras de arte. Por ejemplo, algunos escultores usan cuerpos geométricos y algunos pintores representan diferentes tipos de líneas y figuras geométricas.

En mi colegio tuvimos la oportunidad de promover el arte haciendo **tributos** a grandes artistas nacionales e internacionales y exponiendo nuestras propias creaciones.

A la muestra asistieron nuestras familias y compartimos un grato momento valorando el arte en todas sus expresiones.



3. Responde a partir del texto y de la imagen.

- ¿Cómo puedes darte cuenta de que la geometría está presente en algunas obras de arte?

---

---

- Escribe el nombre de 2 figuras 2D que puedas observar en las pinturas.

▶ 

---

▶ 

---

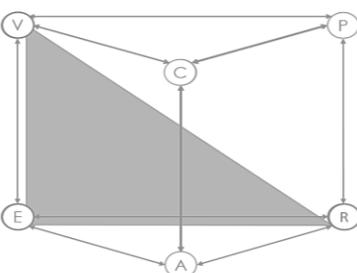
### Vocabulario

**tributar:** demostrar admiración o agradecimiento por algo o alguien.

Figura 30. Actividad 6 del Texto del estudiante. Fuente: (Santillana, 2018, p.154)

**Descripción de la actividad**

La actividad se desglosa en tres ítem. De los cuales, solo se ha de centrar el análisis en el ítem 3, tarea b. En la que, solo se verá una circulación significativa, si el estudiante identifica en la imagen, forma 2D correspondiente a un triángulo.

<b>ANÁLISIS</b>	
<b>Circulación</b>	<b>Componentes</b>
 <p style="text-align: center;"><i>Figura 15. Semiplano Semiótico-referencial [Sem-ref]. (Fuente: Pizarro,2018)</i></p>	<p><b>Visualización:</b> Forma 2D que pudiera ser un triángulo.</p>
	<p><b>Representamen:</b> Compuesto por el triángulo presente en la imagen.</p>
	<p><b>Construcción:</b> No se presenta.</p>
	<p><b>Artefacto:</b> No se presenta.</p>
	<p><b>Prueba:</b> No se presenta.</p>
	<p><b>Referencial:</b> Concepto de triángulo.</p>
<b>OBSERVACIONES</b>	
<p>No presenta observaciones relevantes.</p>	

#### 4.1.3.1.1.1 Conclusiones del Objetivo de Aprendizaje 17

La potencialidad del objetivo de aprendizaje conlleva a que de por sí emerja en él, un semiplano semiótico referencial. Y por lo tanto, que la tarea matemática presentada para el tratamiento de este objetivo circule, por lo menos, a través de un semiplano [Sem-Ref]

El texto escolar expone solo una actividad, y con una tarea matemática específica para el tratamiento de este objetivo. En el caso particular de la actividad propuesta es relevante para la investigación sí y solo si, el alumno identifica el objeto matemático de forma 2D triángulo. De lo contrario, no se consideraría.

Al identificar el alumno el triángulo, la circulación de la tarea matemática se realiza por medio de un semiplano [Sem-Ref]. Es decir, se moviliza la génesis semiótica a partir de la representación del triángulo (referencial).

En conformidad, a partir del análisis del objetivo de aprendizaje, y en consecuencia con lo expuesto en los párrafos anteriores, existe una concordancia en el planteamiento de la tarea matemática propuesta por el texto de estudio para el Objetivo que considera el Ministerio de Educación.

#### **4.1.3.1.2 Análisis de las actividades propuestas en los Textos escolares para el Objetivo de Aprendizaje 15**

<b>FICHA N° 7</b>	
<b>DATOS</b>	
<b>Curso</b>	3° Básico.
<b>Texto escolar</b>	Cuaderno de ejercicios matemáticas.
<b>Página</b>	76
<b>Actividad</b>	

## Relación entre figuras 2D y figuras 3D

1. Marca con un  si la figura 2D corresponde a una de las caras de la figura 3D, de lo contrario marca con una . En aquellas figuras 2D que marcaste con un  escribe la cantidad de caras de la figura 3D que corresponden a dicha figura.

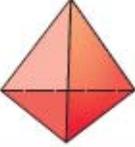
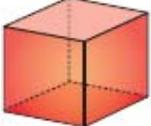
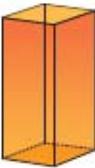
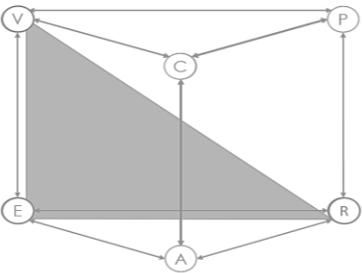
Figura 3D					
a. 					
b. 					
c. 					
d. 					
e. 					
f. 					

Figura 31. Actividad 7 del Cuaderno de ejercicios (Santillana, 2018, p.76)

**Descripción de la actividad**

La actividad posee treinta tareas matemáticas, de las cuales, para efectos de la presente investigación, se considerarán a y d y solo la columna que señala la forma 2D triángulo.

<b>ANÁLISIS</b>	
<b>Circulación</b>	<b>Componentes</b>
 <p><i>Figura 15. Semiplano Semiótico-referencial [Sem-ref] (Fuente: Pizarro,2018)</i></p>	<p><b>Visualización:</b> Forma 2D triángulo.</p>
	<p><b>Representamen:</b> Las formas 3D presentadas en la primera columna específicamente, pirámide de base triangular (a) y pirámide de base cuadrada (d).</p>
	<p><b>Construcción:</b> No se presenta.</p>
	<p><b>Artefacto:</b> No se presenta.</p>
	<p><b>Prueba:</b> No se presenta.</p>
	<p><b>Referencial:</b> Concepto de triángulo.</p>
<b>OBSERVACIONES</b>	
<p>Para esta actividad, se ha de presentar una ficha. Aunque se demanden dos tareas diferentes (a y d) y, que si bien, difieren en el espacio real y local, dado que en la tarea a, corresponde a la forma 3D pirámide de base triangular, mientras que, en la tarea d, corresponde a la forma 3D pirámide de base cuadrada. Éstas circulan de la misma manera (Semiplano c), siendo posible presentarlas en una ficha.</p>	

**FICHA N° 8**

**DATOS**

**Curso**

3° Básico

**Texto escolar**

Texto del estudiante matemática

**Página**

161

**Actividad**

7. Completa la tabla.

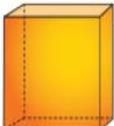
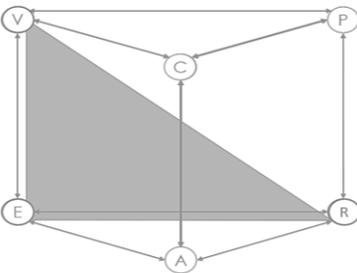
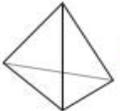
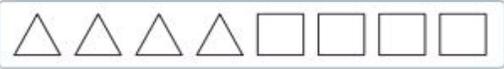
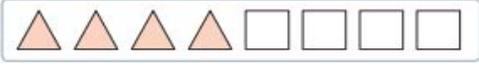
	Figura 3D	Cantidad de caras	Cantidad de vértices	Cantidad de aristas	Figura 2D de sus caras
a.					
b.					
c.					

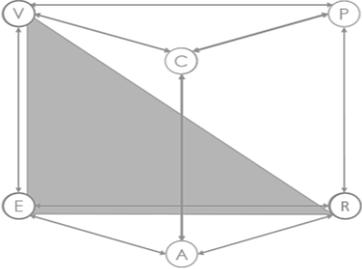
Figura 32. Actividad 8 del Texto del estudiante. Fuente: (Santillana, 2018, p.161)

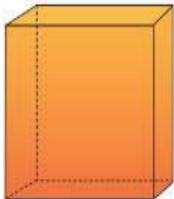
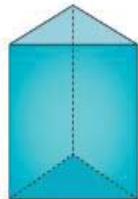
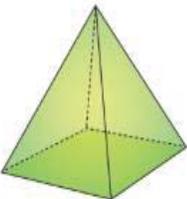
**Descripción de la actividad**

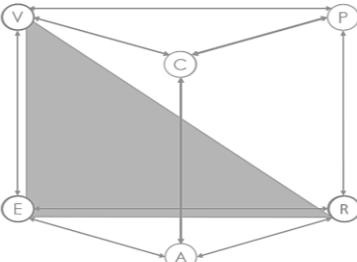
La actividad está contextualizada en un práctico que consta de once ítems. El ítem 7, consta de doce tareas matemáticas, que en vista de la presente investigación, se tomarán en cuenta los puntos a y c, específicamente la columna denominada “forma 2D de sus caras”.

<b>ANÁLISIS</b>	
<b>Circulación</b>	<b>Componentes</b>
 <p>Figura 15. Semiplano Semiótico-referencial [Sem-ref]. (Fuente: Pizarro,2018)</p>	<b>Visualización:</b> Forma 2D triángulo.
	<b>Representamen:</b> Imagen de la forma 3D.
	<b>Construcción:</b> No se presenta.
	<b>Artefacto:</b> No se presenta.
	<b>Prueba:</b> No se presenta.
	<b>Referencial:</b> Concepto de triángulo.
<b>OBSERVACIONES</b>	
<p>Para esta actividad, se ha de presentar una sola ficha. Ya que, aunque se demanden dos tareas matemáticas diferentes (puntos a y c), ambas presentan los mismos componentes y por lo tanto, circulan de la misma manera (Semiplano [Sem-Ref]), siendo posible graficarlas en una ficha.</p>	

<b>FICHA N° 9</b>	
<b>DATOS</b>	
<b>Curso</b>	3° Básico.
<b>Texto escolar</b>	Texto del estudiante matemáticas.
<b>Página</b>	165
<b>Actividad</b>	
<div style="border: 1px solid black; padding: 10px;"> <div style="background-color: #f08080; padding: 2px 5px; display: inline-block; color: white; font-weight: bold;">Aprendo</div> <p>Las <b>caras</b> de algunas figuras 3D corresponden a <b>figuras 2D</b>.</p> <p><b>Ejemplo</b> Pinta las figuras 2D que permiten formar la figura 3D.</p> <div style="display: flex; align-items: center; margin-bottom: 10px;">  <div style="border: 1px solid gray; padding: 5px; display: flex; gap: 10px;"> <span>▶</span>  </div> </div> <p><b>¿Cómo lo hago?</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li><span style="color: red; font-weight: bold;">1</span> Describe la figura 3D según sus caras. Tiene 1 cara basal triangular y 3 caras laterales de forma triangular. Por lo tanto, la figura 3D tiene 4 caras triangulares.</li> <li><span style="color: red; font-weight: bold;">2</span> Pinta las caras de la figura 3D.</li> </ol> <div style="display: flex; align-items: center; margin-bottom: 10px;">  <div style="border: 1px solid gray; padding: 5px; display: flex; gap: 10px;"> <span>▶</span>  </div> </div> <div style="border: 1px solid gray; padding: 5px; margin-top: 10px; display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> <div style="background-color: #8080ff; padding: 2px 5px; display: inline-block; color: white; font-weight: bold;">Razono</div> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Dibuja las caras de la siguiente figura 3D:</li> </ul>  <ul style="list-style-type: none"> <li>• ¿A qué figura 3D corresponden las siguientes caras?</li> </ul>  </div> </div>	
<i>Figura 33. Actividad 9 del Texto del estudiante. Fuente: (Santillana, 2018, p.161)</i>	
<b>Descripción de la actividad</b>	En esta actividad, se pretende modelar a los estudiantes mediante la ejemplificación de la actividad. Por ello, se ha de analizar solo la instrucción señalada.

<b>ANÁLISIS</b>	
<b>Circulación</b>	<b>Componentes</b>
 <p><i>Figura 15. Semiplano Semiótico-referencial [Sem-ref]. (Fuente: Pizarro,2018)</i></p>	<b>Visualización:</b> Triángulo.
	<b>Representamen:</b> Imagen de la forma 3D (pirámide de base triangular).
	<b>Construcción:</b> No se presenta.
	<b>Artefacto:</b> No se presenta.
	<b>Prueba:</b> No se presenta.
	<b>Referencial:</b> Concepto de triángulo.
<b>OBSERVACIONES</b>	
<p>En la instrucción dada, “Pinta las formas 2D que permiten formar la forma 3D”, pintar no corresponde a una tarea matemática propiamente tal. No obstante, matemáticamente, la tarea consiste en que el estudiante reconozca las formas 2D que le permitan construir forma 3D, permitiendo el análisis de la circulación.</p>	

FICHA N° 10	
DATOS	
Curso	3 ° Básico.
Texto escolar	Texto del estudiante matemáticas.
Página	167
<p><b>Actividad</b></p> <p><b>Practico</b></p> <p>1. Dibuja en tu cuaderno las figuras 2D que corresponden a las caras de las figuras 3D que se muestran a continuación:</p> <p>a. </p> <p>b. </p> <p>c. </p> <p></p> <p><i>Figura 34. Actividad 10 del Texto del estudiante. Fuente:(Santillana, 2018, p.167)</i></p>	
Descripción de la actividad	La actividad posee tres tareas matemáticas, de las cuales se considerarán solo b y c.

<b>ANÁLISIS</b>	
<b>Circulación</b>	<b>Componentes</b>
 <p><i>Figura 15. Semiplano Semiótico-referencial [Sem-ref]. (Fuente: Pizarro,2018)</i></p>	<b>Visualización:</b> Triángulos.
	<b>Representamen:</b> Imagen de la forma 3D (Prisma de base triangular y pirámide de base cuadrada).
	<b>Construcción:</b> No presenta.
	<b>Artefacto:</b> No se presenta.
	<b>Prueba:</b> No se presenta.
	<b>Referencial:</b> Concepto de triángulo.
<b>OBSERVACIONES</b>	
<p>Para esta actividad, se ha de presentar una ficha. Aunque se demanden dos tareas diferentes (b y c) y, que difieren en el espacio real y local, dado que en la tarea b, corresponde a la forma 3D prisma de base triangular, mientras que, en la tarea c, corresponde a la forma 3D pirámide de base cuadrada. Éstas circulan de la misma manera (Semiplano [Sem-Ref]), siendo posible presentarlas en una ficha.</p>	

#### 4.1.3.1.2.1 Conclusiones del Objetivo de Aprendizaje 15

La potencialidad del objetivo de aprendizaje conlleva a que de por sí emerja en él, un plano semiótico instrumental y un plano epistemológico. Así como también, las tareas matemáticas presentadas en los textos de estudio para el tratamiento de este objetivo.

A lo largo de la segunda unidad del texto del estudiante, se presentan cuatro actividades propuestas para el tratamiento del objeto triángulo. La circulación de las tareas matemáticas se realizan por medio del semiplano referencial teórico, movilizándolo solo la génesis semiótica a partir de la representación de los triángulos

en las formas 3D y el referente, por aquellas concepciones de triángulo que maneje el estudiante.

Desde el análisis del Objetivo de Aprendizaje, se espera que emerja el plano semiótico - instrumental a partir de los diversos procesos de construcción, como también de la deconstrucción de cuerpos, demostrando la relación entre las formas 3D y 2D. Por su lado el plano epistemológico, surge de los conceptos que maneja el estudiante del objeto triángulo. Cabe destacar que, en cada una de las tareas analizadas del texto escolar no se presentan artefactos ni construcciones por lo que, la génesis instrumental queda ausente.

En conformidad, a partir del análisis del objetivo de aprendizaje, y en consecuencia con lo expuesto en los párrafos anteriores, las tareas propuestas por el texto escolar no concuerdan con los aprendizajes mínimos exigidos por el Ministerio de Educación.

#### **4.1.3.1.3 Análisis de las actividades propuestas en los Textos de Estudio para el Objetivo de Aprendizaje 21**

<b>FICHA N° 11</b>	
<b>DATOS</b>	
<b>Curso</b>	3 ° Básico.
<b>Texto escolar</b>	Texto del estudiante matemáticas.
<b>Página</b>	176
<b>Actividad</b>	

Puedes calcular el **perímetro** de una **figura regular** de dos maneras:

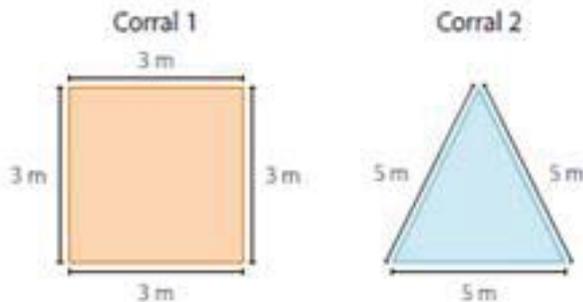
- Sumando las medidas de todos sus lados.
- Multiplicando la medida de un lado por la cantidad de lados que tiene la figura.

#### Atención

Una **figura regular** tiene todos sus lados y ángulos de igual medida.

#### Ejemplo

Diana quiere hacer un corral para su perro. Para ello, hace 2 dibujos distintos.



#### Habilidad

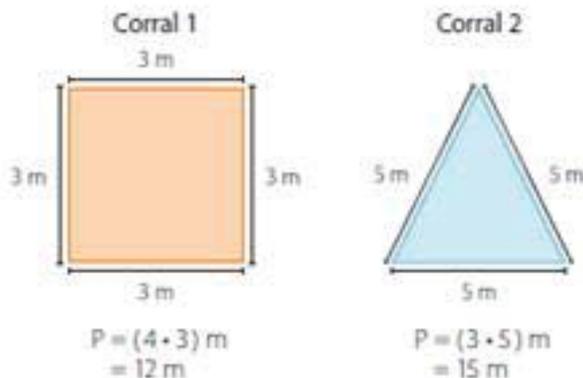
##### Matemática

Cuando haces un dibujo para encontrar la solución a una situación problema, estás desarrollando la habilidad de resolver problemas.

Si quiere construir el corral de menor longitud, ¿cuál de los dos dibujos le recomendarías?

#### ¿Cómo lo hago?

Calcula el perímetro de cada corral y luego compáralos.



#### Razono

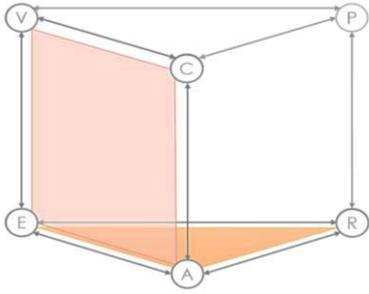
¿De qué otra forma puedes calcular el perímetro de estas figuras?

El corral 2 tiene mayor longitud que el corral 1, por lo tanto, a Diana le conviene construir el corral 1.

Figura 35. Actividad 11 del Texto del estudiante. Fuente: (Santillana, 2018, p.176)

#### Descripción de la actividad

En esta actividad, se pretende modelar a los estudiantes, mediante una ejemplificación, la resolución de la actividad referida a perímetro. Por ello, se ha de analizar solo la instrucción Calcula el

	perímetro de cada corral y luego compáralos. Siendo la figura del corral 2 la puesta en juego.
<b>ANÁLISIS</b>	
<b>Circulación</b>	<b>Componentes</b>
 <p><i>Figura 24. Circulación planos semiótico- instrumental y epistemológico</i></p>	<b>Visualización:</b> Forma 2D de triángulo.
	<b>Representamen:</b> Imagen que corresponde al corral 2 de triángulo.
	<b>Construcción:</b> Calcular el perímetro.
	<b>Artefacto:</b> Fórmula de perímetro.
	<b>Prueba:</b> No se presenta.
	<b>Referencial:</b> Perímetro como fórmula.
<b>OBSERVACIONES</b>	
Se presenta una fibración externa, desde un registro geométrico a un registro numérico, dado que, el foco no está centrado en el área de la geometría, sino más bien desde el cálculo, ya que se solicita el perímetro de la figura.	

FICHA N° 12

DATOS

Curso

3 ° Básico.

Texto escolar

Texto del estudiante matemáticas.

Página

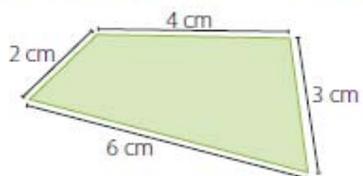
177

Actividad

Practico

1. Calcula el perímetro (P) de cada una de estas figuras.

a.



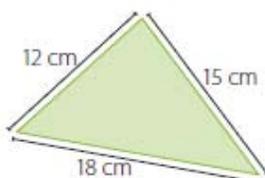
$P = \square$  cm

d.



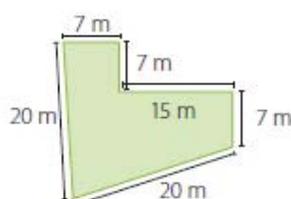
$P = \square$  cm

b.



$P = \square$  cm

e.



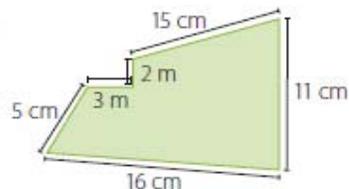
$P = \square$  m

c.



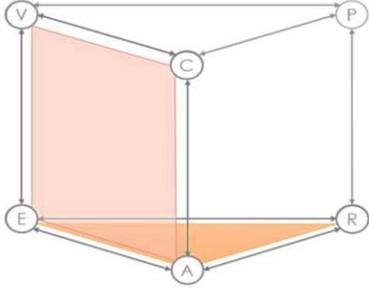
$P = \square$  cm

f.



$P = \square$  cm

Figura 36. Actividad 12 del Texto del estudiante. Fuente:(Santillana, 2018, p.177)

<b>Descripción de la actividad</b>	La actividad posee seis tareas, para efectos de la investigación solo se considera b.
<b>ANÁLISIS</b>	
<b>Circulación</b>	<b>Componentes</b>
 <p data-bbox="240 842 586 930"><i>Figura 24. Circulación planos semiótico- instrumental y epistemológico</i></p>	<b>Visualización:</b> Forma 2D de triángulo.
	<b>Representamen:</b> Imagen que corresponde a la forma 2D triángulo.
	<b>Construcción:</b> Calcular el perímetro.
	<b>Artefacto:</b> Fórmula de perímetro.
	<b>Prueba:</b> No se presenta.
<b>Referencial:</b> Perímetro como fórmula.	
<b>OBSERVACIONES</b>	
Se presenta una fibración externa, desde un registro geométrico a un registro numérico, dado que, el foco no está centrado en el área de la geometría, sino más bien desde el cálculo, ya que se solicita el perímetro de la figura.	

FICHA N° 13

DATOS

Curso

3 ° Básico.

Texto escolar

Texto del estudiante matemáticas.

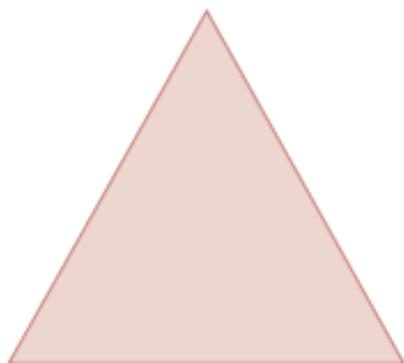
Página

178

Actividad

3. Utiliza una regla y mide los lados de las siguientes figuras. Luego calcula su perímetro (P).

a.



$P = \boxed{\phantom{000}} \text{ cm}$

b.

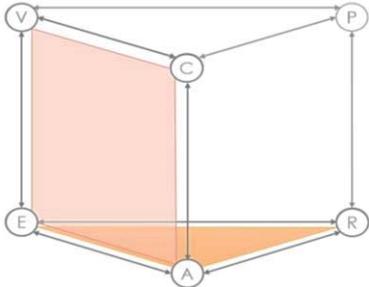


$P = \boxed{\phantom{000}} \text{ cm}$

Figura 37. Actividad 13 del Texto del estudiante. Fuente: (Santillana, 2018, p.178)

Descripción de la actividad

La actividad se contextualiza en un práctico, siendo el ítem tres de él. Posee dos tareas matemáticas, considerándose solo a.

<b>ANÁLISIS</b>	
<b>Circulación</b>	<b>Componentes</b>
 <p>Figura 24. Circulación planos semiótico- instrumental y epistemológico</p>	<p><b>Visualización:</b> Forma 2D de triángulo.</p>
	<p><b>Representamen:</b> Imagen que corresponde a la forma 2D triángulo.</p>
	<p><b>Construcción:</b> Calcular el perímetro.</p>
	<p><b>Artefacto:</b> La regla y la fórmula de perímetro.</p>
	<p><b>Prueba:</b> No se presenta.</p>
	<p><b>Referencial:</b> Perímetro como fórmula.</p>
<b>OBSERVACIONES</b>	
<p>Se presenta una fibración externa, desde un registro geométrico a un registro numérico, dado que, el foco no está centrado en el área de la geometría, sino más bien desde el cálculo, ya que se solicita el perímetro de la figura.</p>	

FICHA N° 14

DATOS

Curso

3° Básico.

Texto escolar

Cuaderno de ejercicios matemáticas.

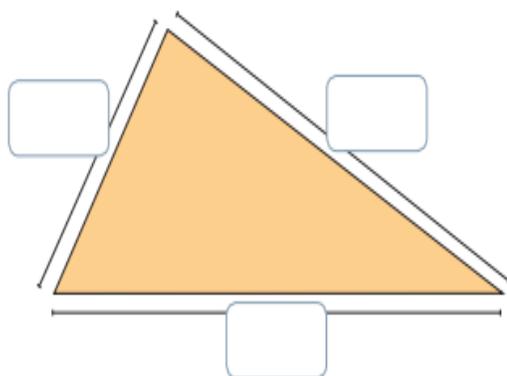
Página

81

Actividad

3. Mide con una regla los lados de las figuras. Luego, completa con sus medidas y calcula su perímetro (P).

a.

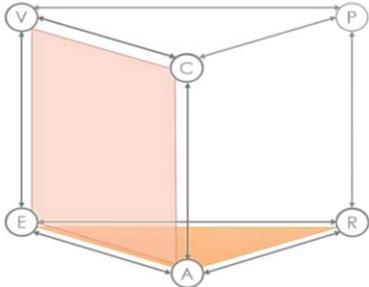


P =  cm

Figura 38. Actividad 14 del Cuaderno de ejercicios. Fuente: (Santillana, 2018, p.81)

Descripción de la actividad

La actividad se contextualiza en un práctico de seis ítems en total, considerando solo el ítem 3 de cálculo de perímetro en forma 2D de triángulo.

<b>ANÁLISIS</b>	
<b>Circulación</b>	<b>Componentes</b>
 <p>Figura 24. Circulación planos semiótico- instrumental y epistemológico</p>	<b>Visualización:</b> Forma 2D de triángulo.
	<b>Representamen:</b> Imagen que corresponde a la forma 2D triángulo.
	<b>Construcción:</b> Calcular el perímetro.
	<b>Artefacto:</b> La regla y la fórmula de perímetro.
	<b>Prueba:</b> No se presenta.
	<b>Referencial:</b> Perímetro como fórmula.
<b>OBSERVACIONES</b>	
<p>Se presenta una fibración externa, desde un registro geométrico a un registro numérico, dado que, el foco no está centrado en el área de la geometría, sino más bien desde el cálculo, ya que se solicita el perímetro de la figura.</p>	

#### 4.1.3.1.3.1 Conclusiones del Objetivo de Aprendizaje 21

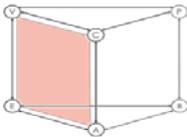
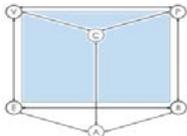
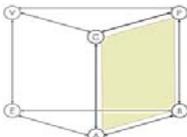
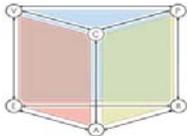
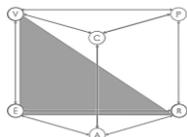
La potencialidad del objetivo de aprendizaje conlleva a que de por sí emerja en él, un plano semiótico instrumental y un plano epistemológico. Así como también, las tareas matemáticas presentadas en los textos de estudio para el tratamiento de este objetivo.

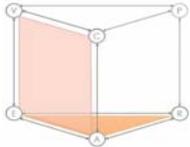
A lo largo de la segunda unidad del texto del estudiante, se presentan cuatro actividades propuestas para el tratamiento del objeto triángulo. La circulación de las tareas matemáticas se realiza por medio del plano semiótico instrumental en conjunto con el plano epistemológico. No obstante, el trabajo matemático se realiza sobre el cálculo del perímetro, siendo la consigna bajo el verbo de medir, produciéndose una fibración externa es decir, se cambia el foco del eje de geometría para términos numéricos.

Para resumir todo lo anterior, se despliega la tabla 20, en la que se especifica la cantidad de actividades total que movilizan los mismo componentes y, por lo tanto pueden ser agrupados bajo el criterio de “tipo de circulación”.

**Tabla 20**

*Resumen de las circulaciones de tercero básico*

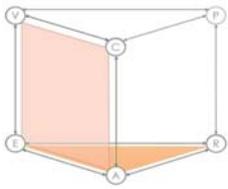
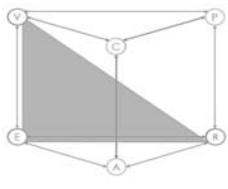
Tipo de Circulación	Cantidad de actividades en tercero básico
 <p data-bbox="235 724 722 787"><i>Figura 12.</i> Circulación plano [Sem – Ins] (Fuente: Kuzniak &amp; Nechache, 2015)</p>	0
 <p data-bbox="235 966 722 1029"><i>Figura 14.</i> Circulación plano [Sem – Dis] (Fuente: Kuzniak &amp; Nechache, 2015)</p>	0
 <p data-bbox="235 1207 722 1270"><i>Figura 13.</i> Circulación plano [Ins – Dis] (Fuente: Kuzniak &amp; Nechache, 2015)</p>	0
 <p data-bbox="235 1449 722 1543"><i>Figura 11.</i> Circulación completa del ETM<sub>E</sub> (Fuente: Kuzniak &amp; Nechache 2015, citado en Pizarro 2018)</p>	0
 <p data-bbox="235 1717 722 1812"><i>Figura 15.</i> Semiplano Semiótico-referencial [Sem-ref]. (Fuente: Pizarro,2018)</p>	8

 <p><i>Figura 24. Circulación planos semiótico-instrumental y epistemológico</i></p>	4
<b>Total de tareas</b>	<b>12</b>

Los análisis expuestos anteriormente detallan la circulación de las actividades propuestas por el Programa de Estudio para el tratamiento de los OA. Estas circulaciones poseen sus génesis en los componentes que se movilizan según los verbos declarados en cada una de las consignas. Así, para efectos de esta investigación, se despliega la siguiente tabla (tabla 21) que agrupa los diferentes verbos de las consignas de las actividades, según la circulación presentan.

**Tabla 21**

*Verbos de las consignas según circulación.*

Circulación	Verbos de las consignas
 <p><i>Figura 24. Circulación planos semiótico-instrumental y epistemológico</i></p>	Calcular
 <p><i>Figura 15. Semiplano Semiótico-referencial [Sem-ref]. (Fuente: Pizarro,2018)</i></p>	Identificar

En conformidad, a partir del análisis del objetivo de aprendizaje, y en consecuencia con lo expuesto en los párrafos anteriores, las tareas propuestas por el texto escolar concuerdan con los aprendizajes mínimos exigidos por el Ministerio de Educación.

#### 4.1.3.2 Cuarto Básico

El material didáctico Matemática 4° Básico es una obra colectiva, creada y diseñada por Ediciones SM, Chile. La dirección Editorial corresponde a Arlette Sandoval Espinoza, y entre sus áreas destaca la asesoría pedagógica de Guadalupe Álvarez Pereira. Tras la autoría de este texto educativo, se encuentran tres profesores de General Básica y una profesora de Estado de Física y matemáticas.

La guía ha sido elaborada conforme al Decreto Supremo 439/2012 del Ministerio de Educación de Chile. Planteando una propuesta que refleja una concepción del aprendizaje como un proceso activo, consciente, basado en las experiencias y aprendizajes previos de los alumnos y las alumnas, y desencadenado por la propuesta pedagógica considera recursos que se relacionan con los intereses de los estudiantes y que proponen instancias de aprendizaje diversas para permitir al docente adecuarse a la realidad de su clase y para las diversas formas de aprender de los estudiantes (Editorial SM, 2017, p.iniciales)

Para dar cuenta de los Objetivos de Aprendizajes, las habilidades y las actitudes, en el modelo didáctico del texto y de la Guía Didáctica del Docente (GDD) se proponen instancias para la motivación, activación y registro de los aprendizajes previos y el establecimiento de metas y estrategias, involucrando procesos metacognitivos continuos que permitan monitorear la evaluación y regular la propia autonomía con actividades de síntesis, aplicación y consolidación de las habilidades y los aprendizajes adquiridos. Así como también actividades que apoyan el desarrollo e integración de los contenidos, habilidades y actitudes.

En el análisis que se expone a continuación, se desarrollan dos de los objetivos de aprendizajes que propone el Ministerio de Educación por medio de las Bases Curriculares, que se vinculan de manera directa con el objeto matemático triángulo. No obstante, existen algunas actividades que no han podido ser agrupadas según el criterio descrito anteriormente por lo que, serán abordadas en un apartado diferente.

### 4.1.3.2.1 Análisis de las actividades propuestas en los Textos escolares para el OA 17

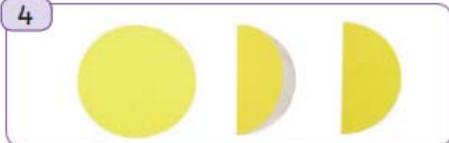
FICHA N° 15	
DATOS	
<b>Curso</b>	4° Básico.
<b>Texto escolar</b>	Texto del estudiante matemática.
<b>Página</b>	162
<p><b>Actividad</b></p> <p><b>1</b> Reúnanse en parejas para realizar las actividades. Luego, respondan.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <p>Confeccionen con cartulina las siguientes figuras 2D y en cada una de ellas hagan los dobleces que se muestran en las imágenes.</p> <div style="float: right; background-color: #fff9c4; padding: 5px; border: 1px solid #ccc;"> <p><b>Materiales</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>■ Cartulina.</li> <li>■ Tijeras.</li> </ul> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="border: 1px solid #ccc; padding: 5px; width: 45%;"> <p><b>1</b></p>  </div> <div style="border: 1px solid #ccc; padding: 5px; width: 45%;"> <p><b>3</b></p>  </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 10px;"> <div style="border: 1px solid #ccc; padding: 5px; width: 45%;"> <p><b>2</b></p>  </div> <div style="border: 1px solid #ccc; padding: 5px; width: 45%;"> <p><b>4</b></p>  </div> </div> <p><b>a.</b> ¿Habían realizado antes dobleces o plegados de figuras 2D?, ¿qué querían construir?</p> <p><b>b.</b> ¿En qué figuras de la situación, al doblar la cartulina pudieron obtener 2 partes iguales que coincidían?, ¿por qué?</p> <p><b>c.</b> Comenten sus respuestas con otras parejas de trabajo y escriban las conclusiones que obtuvieron en conjunto.</p> <div style="float: right; border: 1px dashed #ccc; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>Escribe en tu cuaderno con letra clara y ordenada para que pueda ser leído fácilmente.</p>  </div> </div>	
<b>Descripción de la actividad</b>	Para la presente actividad, se ha de considerar la secuencia de dobleces que se detallan en el recuadro 3. Dado que, en ella, se logra el objetivo matemático de

Figura 39. Actividad 15 del Cuaderno de ejercicios. Fuente: (SM, 2018, p.162)

la tarea, congruencia de figuras mediante un eje de simetría. Además, de las tres tareas señaladas para cada recuadro, solo se han de considerar, para esta investigación, la tarea b y c.  
En la rigurosidad de los términos que conlleva la tarea, al menos, los estudiantes se enfrentarán a un triángulo isósceles.

### ANÁLISIS

#### Circulación

#### Componentes

#### Tarea b

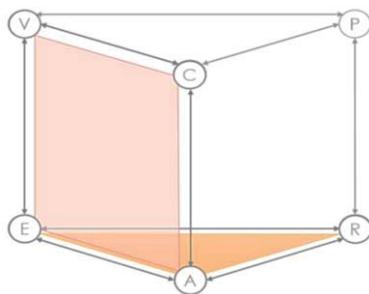


Figura 24. Circulación planos semiótico-instrumental y epistemológico

**Visualización:** Eje de Simetría del triángulo.

**Representamen:** Triángulo hecho en cartulina.

**Construcción:** Dobleces del triángulo de cartulina.

**Artefacto:** Triángulo hecho en cartulina.

**Prueba:** No se presenta.

**Referencial:** Eje de simetría.

#### Tarea c

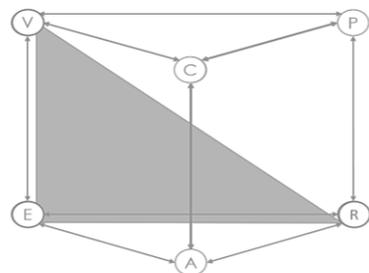


Figura 15. Semiplano Semiótico-referencial [Sem-ref]. (Fuente: Pizarro,2018)

**Visualización:** Eje de Simetría del triángulo.

**Representamen:** Triángulo hecho en cartulina.

**Construcción:** No se presenta

**Artefacto:** No se presenta.

**Prueba:** No se presenta.

**Referencial:** Eje de simetría.

## OBSERVACIONES

En esta actividad, se ha de presentar una ficha en la cual se despliegan dos secciones en la parte de análisis, “tarea b” y “tarea c”, ya que circulan de manera diferente.

Esta actividad presenta una gran particularidad dada la forma de redacción de la tarea b. Se presenta una ambigüedad ya que, no se señala el tipo de triángulo puesto en juego. Por lo que, los estudiantes pueden enfrentarse a un triángulo escaleno, isósceles o equilátero. Lo que conlleva, a que pueda darse un eje de simetría, dos o tres. Por lo tanto, las conclusiones que se extraigan pueden presentar argumentos de uno o del otro, junto con las diferencias que conlleve uno u otro tipo de triángulo. Por ejemplo, al encontrarse con un triángulo escaleno, este no tendría eje de simetría.

Dado el diseño de la tarea b, por consecuencia, la tarea c induce la misma ambigüedad. Ya que, comentar no necesariamente conlleva a argumentar, por lo que no presenta el componente de prueba, circulando como un semiplano [Sem-Ref].

## FICHA N° 16

### DATOS

Curso

4° Básico

Texto escolar

Cuaderno de ejercicios matemáticas.

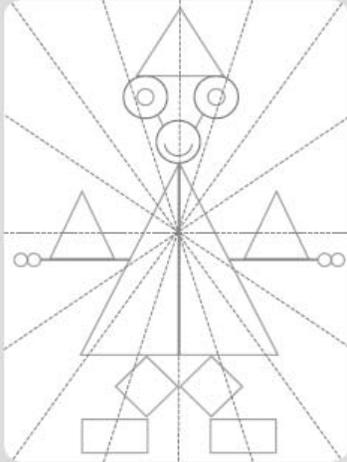
Página

67

### Actividad

**Taller de habilidades**

**Argumentar y comunicar**  
Observa la imagen y realiza las actividades.



- Marca, con lápiz rojo, el o los ejes de simetría de la imagen.
- ¿Por qué elegiste esa(s) línea(s) de simetría y no otra(s)? Argumenta tu respuesta y compárala con un compañero o compañera.  

---

---

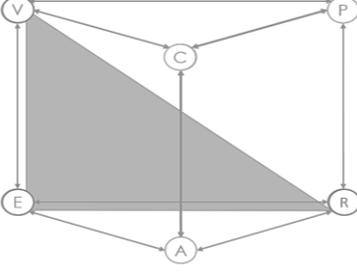
---
- ¿Cómo comprobarías tu respuesta? Describe una estrategia y comunícala a tu profesor o profesora.  

---

---

---
- Pinta de distinto color 3 figuras 2D que sean simétricas. Compara en parejas.

Figura 40. Actividad 16 del Cuaderno de ejercicios. Fuente: (SM, 2018, p.67)

<b>Descripción de la actividad</b>	El taller de habilidades presenta cuatro ítems para desarrollar diversas tareas matemáticas. Sin embargo, para efectos de esta investigación, sólo se ha de considerar el ítem d, donde se centra la tarea matemática en la identificación de formas 2D, en donde el estudiante puede reconocer el triángulo.
<b>ANÁLISIS</b>	
<b>Circulación</b>	<b>Componentes</b>
 <p data-bbox="251 1029 576 1123"><i>Figura 15. Semiplano Semiótico-referencial [Sem-ref]. (Fuente: Pizarro,2018)</i></p>	<b>Visualización:</b> Simetría del triángulo.
	<b>Representamen:</b> Imagen del Texto.
	<b>Construcción:</b> No se presenta.
	<b>Artefacto:</b> No se presenta.
	<b>Prueba:</b> No se presenta.
<b>Referencial:</b> Eje de simetría.	
<b>OBSERVACIONES</b>	
No presenta observaciones relevantes.	

#### 4.1.3.2.1.1 Conclusiones del Objetivo de Aprendizaje 17

La potencialidad del objetivo de aprendizaje conlleva a que de por sí emerja en él, un semiplano semiótico referencial y un plano semiótico instrumental y epistemológico. Y por lo tanto, las tareas matemáticas presentadas para el tratamiento de este objetivo circulen, por lo menos, de la manera señalada anteriormente.

A lo largo de la tercera unidad del Texto del Estudiante, se presentan dos actividades propuestas para el tratamiento del objeto triángulo, que en la práctica conllevan tres tareas matemáticas, de las cuales dos circulan como semiplano [Sem-Ref] y una como plano semiótico instrumental y epistemológico.

Respecto a la actividad que circula como un plano semiótico instrumental y epistemológico, presenta una tarea matemática que activan en el estudiante el proceso de construcción, pese a, las observaciones realizadas en la tarea matemática dada su ambigua redacción y especificación respecto al tipo de triángulo trabajado. Y por lo tanto, en las conclusiones que desde ahí extraigan, varían los argumentos de uno o del otro y las diferencias que conlleve uno de otro tipo de triángulo. Por lo tanto, se podría llegar a una potencial circulación completa, por ejemplo, al haber un proceso de prueba.

Desde el análisis del Objetivo de Aprendizaje, se espera que emerja el semiplano [Sem-Ref] que permite la visualización del componente referencial que corresponde al concepto de simetría y el plano semiótico-instrumental y epistemológico, en el que se incorporan los artefactos y el proceso de construcción solicitado. Por ende, y en conformidad, a partir del análisis del Objetivo de Aprendizaje, y en consecuencia con lo expuesto en los párrafos anteriores, existe una concordancia en el planteamiento de las tareas matemáticas propuestas por el texto de estudio para el objetivo, que considera el Ministerio de Educación.

#### **4.1.3.2.2 Análisis de las actividades propuestas en los Textos escolares diferentes a los OA planteados para el curso**

Los análisis presentados a continuación corresponden a actividades que aparecen en los textos de cuarto básico y que proponen un tratamiento al objeto triángulo. Sin embargo, no responden a ninguno de los Objetivos de Aprendizaje para el curso en cuestión. No obstante, si responden al contenido que plantea el Objetivo de Aprendizaje 15 de tercero básico “Demostrar que comprenden la relación que existe entre figuras 3d y figuras 2d” (Ministerio de Educación, 2013, p.108).

FICHA N° 17

DATOS

Curso 4° básico.

Texto escolar Texto del estudiante matemática.

Página 130

Actividad

**¿Qué sé?** Evaluación inicial

Realiza las actividades para activar tus conocimientos previos. Luego, revisalas con tu profesor o profesora y evalúa tu desempeño marcando un  o una  en cada recuadro.

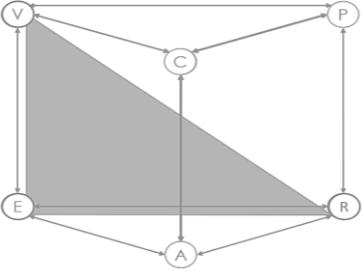
En esta pintura se dibujaron varias figuras 2D.

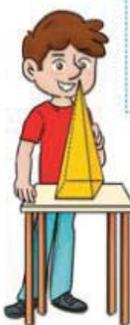
1. ¿Qué figuras 2D está observando Rafael en la pintura?  
Marca con un .

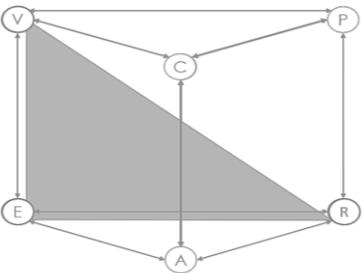
¿Identifiqué correctamente figuras 2D?

Recurso digital complementario

Figura 41. Actividad 17 del Texto del estudiante. Fuente: (SM, 2018, p.130)

<b>Descripción de la actividad</b>	La actividad se desglosa en cuatro ítems en total, de los cuales solo se ha de centrar en el ítem 1. Solo se verá una circulación si el estudiante selecciona la forma 2D correspondiente a un triángulo.
<b>ANÁLISIS</b>	
<b>Circulación</b>	<b>Componentes</b>
 <p data-bbox="248 953 578 1045"><i>Figura 15.</i> Semiplano Semiótico-referencial [Sem-ref]. (Fuente: Pizarro,2018)</p>	<b>Visualización:</b> Forma 2D de triángulo.
	<b>Representamen:</b> Compuesto por la imagen entregada.
	<b>Construcción:</b> No se presenta.
	<b>Artefacto:</b> No se presenta.
	<b>Prueba:</b> No se presenta.
<b>Referencial:</b> Concepto de triángulo	
<b>OBSERVACIONES</b>	
No presenta observaciones relevantes.	

FICHA N°18	
DATOS	
<b>Curso</b>	4° básico.
<b>Texto escolar</b>	Texto del estudiante matemática.
<b>Página</b>	146
<b>Actividad</b>	
<div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: flex-start;"> <div style="width: 45%;"> <p><b>2</b> Para representar las extremidades del cuerpo Fernando utilizó pirámides de base cuadrada. Luego, observó las vistas de una de ellas.</p> <p><b>a.</b> Dibuja en tu cuaderno la figura 2D que vería Fernando al observar la pirámide desde el frente, desde arriba y desde el lado.</p> <p><b>b.</b> ¿Esta figura 3D tiene la misma cantidad de caras, aristas y vértices que el prisma de base cuadrada?</p> </div> <div style="width: 45%; text-align: center;">  <div style="border: 1px dashed gray; padding: 5px; margin: 10px auto; width: 80%;"> <p style="text-align: center; background-color: #00a651; color: white; padding: 2px;"><b>Habilidad</b></p> <p>Si al revisar tus respuestas observas algún error, vuelve a intentarlo y no te desanimes.</p> </div> <div style="border: 1px dashed gray; padding: 5px; margin: 10px auto; width: 80%;"> <p>Formula preguntas para obtener más información y aclarar dudas.</p>  </div> </div> </div>	
<p><i>Figura 42. Actividad 18 del Texto del estudiante. Fuente: (SM, 2018, p.146)</i></p>	
<b>Descripción de la actividad</b>	<p>La actividad se contextualiza en un total de seis ítems, con una pregunta inicial de “¿<i>Cuáles son las vistas de prismas y pirámides?</i>”. El ítem dos presenta, a su vez, dos actividades, centrando la atención del análisis en la tarea a “<i>Dibuja en tu cuaderno la figura 2D que vería Fernando al observar la pirámide desde el frente, desde arriba y desde el lado</i>”. Al leer la actividad es posible identificar tres tareas, puesto que el estudiante debe identificar las figuras 2D desde tres vistas diferentes, la primera corresponde a la vista desde el frente, la segunda desde arriba y la tercera desde el lado. No obstante, y tal como se muestra en la imagen, la pirámide observada por Fernando corresponde a una pirámide de base cuadrada, por lo que la vista desde arriba corresponde a un cuadrado. Por consiguiente, las tareas matemáticas a analizar corresponden a la vista desde el frente y a la vista desde el lado.</p>

<b>ANÁLISIS</b>	
<b>Circulación</b>	<b>Componentes</b>
 <p><i>Figura 15. Semiplano Semiótico-referencial [Sem-ref]. (Fuente: Pizarro,2018)</i></p>	<b>Visualización:</b> Forma 2D de triángulo.
	<b>Representamen:</b> está compuesto por la imagen de la pirámide con base cuadrada.
	<b>Construcción:</b> No se presenta.
	<b>Artefacto:</b> No se presenta.
	<b>Prueba:</b> No se presenta.
	<b>Referencial:</b> Concepto de triángulo
<b>OBSERVACIONES</b>	
<p>Para esta actividad, se ha de presentar una sola ficha. Ya que, aunque se demanden dos tareas matemáticas diferentes (viste desde el frente y vista desde el lado), ambas presentan los mismos componentes y por lo tanto, circulan de la misma manera (Semiplano [Sem-Ref]), siendo posible graficarlas en una ficha.</p>	

FICHA N° 19

DATOS

Curso

4° básico.

Texto escolar

Texto del estudiante matemática.

Página

147

Actividad

**3** Finalmente, Fernando utilizó 2 cubos de diferente tamaño para representar el cuello y la cabeza del cuerpo. Luego, unió todas las figuras 3D y su modelo de cuerpo humano resultó como se muestra en la imagen.

- a. ¿Cuáles son las vistas que representan la cabeza del cuerpo humano (cubo)? Dibújalas en tu cuaderno.
- b. ¿Qué figuras 2D ve Fernando al observar de frente el modelo del cuerpo humano? Anótalas.
- c. Si mira su modelo desde arriba, ¿verá las mismas figuras 2D?, ¿por qué?

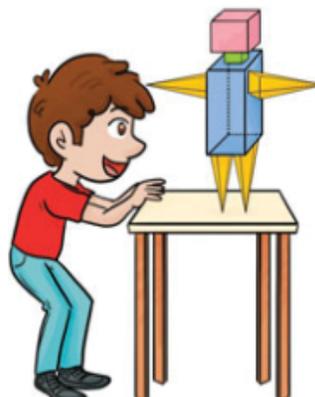
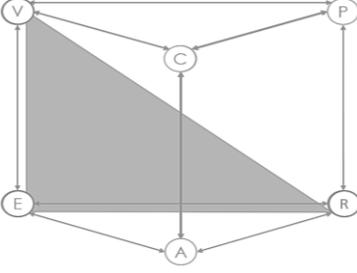


Figura 43. Actividad 19 del Texto del estudiante. Fuente: (SM, 2018, p.147)

Descripción de la actividad

La actividad es la continuación de la actividad anterior (Ficha N°11), por lo tanto presenta el mismo contexto. El ítem tres, se desglosa en tres actividades, de las cuales se tomarán en cuenta solo b y c. Respecto a la tarea b, ésta solo servirá para el análisis, si en su respuesta logra identificar la forma 2D del triángulo. Lo mismo ocurre para la tarea c.

<b>ANÁLISIS</b>	
<b>Circulación</b>	<b>Componentes</b>
 <p><i>Figura 15.</i> Semiplano Semiótico-referencial [Sem-ref]. (Fuente: Pizarro,2018)</p>	<b>Visualización:</b> Forma 2D triángulos.
	<b>Representamen:</b> Imagen del modelo de cuerpo humano formado por formas 3D.
	<b>Construcción:</b> No se presenta.
	<b>Artefacto:</b> No se presenta.
	<b>Prueba:</b> No se presenta.
	<b>Referencial:</b> Concepto de triángulo.
<b>OBSERVACIONES</b>	
<p>Para esta actividad, se ha de presentar una sola ficha. Ya que, aunque se demanden dos tareas matemáticas diferentes (tarea b y tarea c), ambas presentan los mismos componentes y por lo tanto, circulan de la misma manera (Semiplano [Sem-Ref]), siendo posible graficarlas en una ficha.</p>	

FICHA N°20

DATOS

Curso	4° Básico
Texto escolar	Cuaderno de ejercicios matemáticas
Página	74

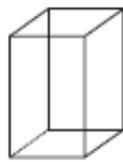
Actividad

Lección 1  
Tema 4

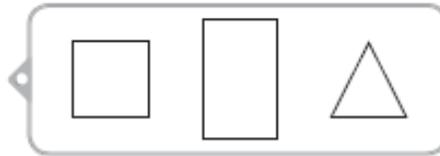
¿Cuáles son las vistas de prismas y pirámides?

1 Pinta la vista que corresponde en cada caso.

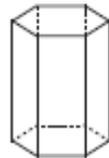
a. Planta (desde arriba).



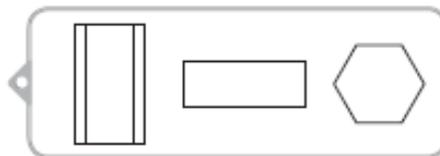
Prisma de base cuadrada



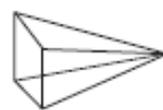
b. Elevación (desde el frente).



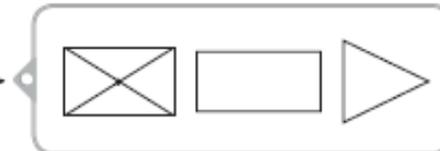
Prisma de base hexagonal



c. Perfil (desde el lado).



Pirámide de base cuadrada



d. Elevación (desde el frente).



Prisma de base triangular

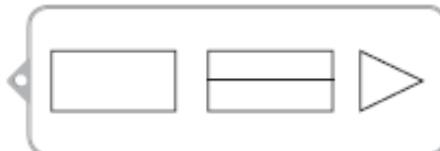
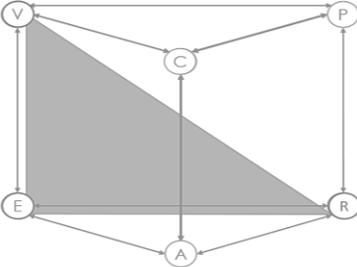


Figura 44. Actividad 20 del Cuaderno de ejercicios. Fuente: (SM, 2018, p.74)

<b>Descripción de la actividad</b>	Para efectos de esta investigación, se ha de centrar en los ítem c y d, puesto que, en ellos es posible identificar formas 2D de triángulos.
<b>ANÁLISIS</b>	
<b>Circulación</b>	<b>Componentes</b>
 <p data-bbox="248 934 576 1024"><i>Figura 15. Semiplano Semiótico-referencial [Sem-ref]. (Fuente: Pizarro,2018)</i></p>	<b>Visualización:</b> Triángulo.
	<b>Representamen:</b> Imagen de pirámide de base cuadrada (tarea c) e imagen de pirámide de base triangular (tarea d).
	<b>Construcción:</b> No se presenta.
	<b>Artefacto:</b> No se presenta.
	<b>Prueba:</b> No se presenta.
	<b>Referencial:</b> Concepto de triángulo.
<b>OBSERVACIONES</b>	
<p>Para esta actividad, se ha de presentar una sola ficha. Ya que, aunque se demanden dos tareas matemáticas diferentes (tarea c y tarea d), ambas presentan los mismos componentes y por lo tanto, circulan de la misma manera (Semiplano [Sem-Ref]), siendo posible graficarlas en una ficha.</p>	

FICHA N°21

DATOS

Curso	4° Básico
Texto escolar	Cuaderno de ejercicios matemáticas
Página	75

Actividad

**2** Completa la siguiente tabla dibujando los elementos que faltan.

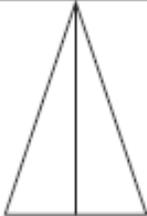
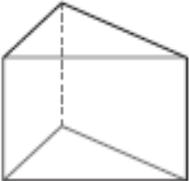
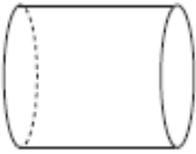
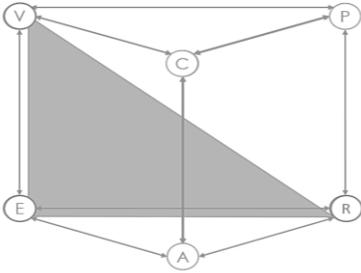
Figura 3D	Elevación (desde el frente)	Perfil (desde el lado)	Planta (desde arriba)
			
			
			
			

Figura 45. Actividad 21 del Cuaderno de ejercicios. Fuente: (SM, 2018, p.75)

<b>Descripción de la actividad</b>	En la presente actividad se ha de centrar el análisis en la tercera fila, donde se presenta un prisma de base triangular. Específicamente, en la cuarta columna, donde se solicita la planta, desde una vista desde arriba.
<b>ANÁLISIS</b>	
<b>Circulación</b>	<b>Componentes</b>
 <p data-bbox="245 974 578 1094"> <i>Figura 15. Semiplano Semiótico-referencial [Sem-ref]. (Fuente: Pizarro,2018)</i> </p>	<b>Visualización:</b> Triángulo.
	<b>Representamen:</b> La imagen del prisma de base triangular.
	<b>Construcción:</b> No presenta.
	<b>Artefacto:</b> No presenta.
	<b>Prueba:</b> No presenta.
<b>Referencial:</b> Concepto triángulo.	
<b>OBSERVACIONES</b>	
No presenta observaciones relevantes.	

#### **4.1.3.2.2.1 Conclusiones para las actividades propuestas diferentes a los Objetivos de Aprendizaje**

Desde los análisis realizados en tercero básico y, en concordancia con los Objetivos de Aprendizaje propuestos por el Ministerio, los OA desplegados anteriormente pueden ser agrupados bajo el MAT03\_OA15 “Demostrar que comprenden la relación que existe entre Figuras 3D y Figuras 2D” (Ministerio de Educación, 2013, p.108). Por consiguiente, la potencialidad del objetivo de aprendizaje conlleva a que de por sí emerja en él, un plano semiótico instrumental y un plano epistemológico. Y por lo tanto, las tareas matemáticas presentadas para el tratamiento de este objetivo circulen, por lo menos, de la manera señalada anteriormente.

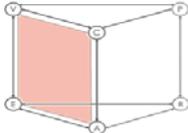
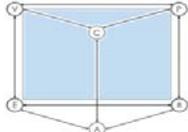
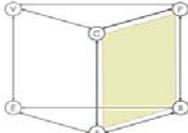
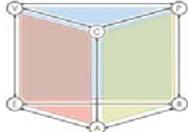
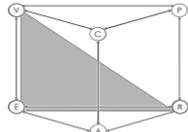
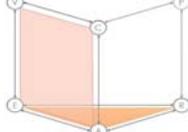
La circulación de las tareas matemáticas se realiza por medio del semiplano referencial teórico, movilizándolo solo la génesis semiótica a partir de la representación de los triángulos en las formas 3D y el referente, por aquellas concepciones de triángulo que maneje el estudiante.

Desde el análisis del Objetivo de Aprendizaje, se espera que emerja, el plano semiótico-instrumental, a partir de las formas, que cumplen el doble rol de espacio real y local y de artefacto. Además de los diversos procesos de construcción, como también de la deconstrucción de cuerpos, demostrando la relación entre las formas 3D y 2D. Mientras que por su lado, el plano epistemológico emerge de los conceptos que maneja el estudiante del objeto triángulo. Sin embargo, en cada una de las tareas analizadas, el componente de construcción no se solicita, dejando obsoleta la génesis instrumental.

Para resumir todo lo anterior, se despliega la tabla 22, en la que se especifica la cantidad de actividades total que movilizan los mismo componentes y, por lo tanto pueden ser agrupados bajo el criterio de “tipo de circulación”.

**Tabla 22**

*Resumen de las circulaciones de tercero básico*

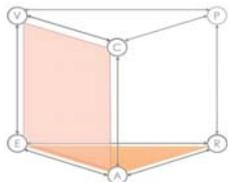
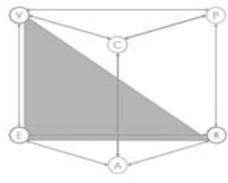
Tipo de Circulación	Cantidad de actividades en cuarto básico
 <p data-bbox="245 493 721 554"><i>Figura 12. Circulación plano [Sem – Ins]</i> (Fuente: Kuzniak &amp; Nechache, 2015)</p>	0
 <p data-bbox="245 735 721 795"><i>Figura 14. Circulación plano [Sem – Dis]</i> (Fuente: Kuzniak &amp; Nechache, 2015)</p>	0
 <p data-bbox="245 976 721 1037"><i>Figura 13. Circulación plano [Ins – Dis]</i> (Fuente: Kuzniak &amp; Nechache, 2015)</p>	0
 <p data-bbox="269 1213 696 1339"><i>Figura 11. Circulación completa del <math>ETM_G</math></i> (Fuente: Kuzniak &amp; Nechache 2015, citado en Pizarro 2018)</p>	0
 <p data-bbox="290 1518 675 1612"><i>Figura 15. Semiplano Semiótico-referencial [Sem-ref].</i> (Fuente: Pizarro,2018)</p>	10
 <p data-bbox="245 1791 721 1852"><i>Figura 24. Circulación planos semiótico-instrumental y epistemológico</i></p>	1

<b>Total de tareas</b>	<b>11</b>
------------------------	-----------

Los análisis expuestos anteriormente detallan la circulación de las actividades propuestas por el Programa de Estudio para el tratamiento de los OA. Estas circulaciones poseen sus génesis en los componentes que se movilizan según los verbos declarados en cada una de las consignas. Así, para efectos de esta investigación, se despliega la siguiente tabla (tabla 23) que agrupa los diferentes verbos de las consignas de las actividades, según la circulación presentan.

**Tabla 23**

*Verbos de las consignas según circulación.*

Circulación	Verbos de las consignas
 <p><i>Figura 24. Circulación planos semiótico-instrumental y epistemológico</i></p>	Relacionar.
 <p><i>Figura 15. Semiplano Semiótico-referencial [Sem-ref]. (Fuente: Pizarro,2018)</i></p>	Identificar. Observar. Comentar.

En conformidad, a partir del análisis del objetivo de aprendizaje, y en consecuencia con lo expuesto en los párrafos anteriores, las tareas propuestas por el texto escolar concuerdan con los aprendizajes mínimos exigidos por el Ministerio de Educación.

## 4.2 Resultados

En este apartado, se presentarán los resultados obtenidos a partir del análisis de dos de las instancias mencionadas anteriormente: análisis de los programas de

estudio y textos escolares para tercero y cuarto básico. En ellos, se ha de mostrar los resultados generales por curso, de las circulaciones halladas, en base al marco teórico y respondiendo a las preguntas de investigación que guían este trabajo: ¿Qué tareas matemáticas se privilegian en los Programas de estudio respecto al objeto matemático triángulo? ¿Qué tareas matemáticas se privilegian en los textos escolares ministeriales respecto al objeto matemático triángulo? ¿Cuál es el grado de similitud entre las circulaciones de las tareas matemáticas propuestas en los programas de estudio y las presentadas en los textos escolares ministeriales de tercero básico, en el año 2018? y, ¿Cuál es el grado de similitud entre las circulaciones de las tareas matemáticas propuestas en los programas de estudio y las presentadas en los textos escolares ministeriales de cuarto básico en el año 2018? Junto con ello, se presenta el análisis de la taxonomía utilizada en las consignas de las tareas matemáticas que movilizan los componentes, dando origen a las circulaciones.

#### **4.2.1 Resultado de las circulaciones en Tercero Básico**

A continuación se presentará el resultado de los análisis en base al ETM<sub>G</sub> de referencia de los Objetivos de Aprendizaje y las actividades sugeridas en los Programas de Estudio y luego ETM<sub>G</sub> idóneo de las actividades presentes en los textos escolares para tercero básico.

##### **4.2.1.1 ETM<sub>G</sub> de referencia en los Objetivos de aprendizaje y actividades sugeridas en los programas chilenos para el tratamiento de triángulos**

Kuzniak (2011) citado en Pizarro (2018) señala que los procesos de transposición didáctica realizados en el trabajo matemático, en el ámbito escolar, se encuentran articulados y relacionados con los distintos niveles del espacio de trabajo matemático. El nivel abordado durante esta sesión, corresponde a los resultados entregados en el ETM<sub>G</sub> de Referencia, que definido desde Henríquez (2014), se realiza en función sólo a los criterios matemáticos. Esto fue ampliado por Kuzniak (2011) considerando que esta referencia es entregada en cada país, por los

Ministerios de Educación a través de sus Bases Curriculares y Programas de Estudio.

Cada una de las actividades que se encuentran a lo largo del programa, presenta una configuración determinada en torno a las tareas matemáticas que moviliza. Las actividades que se desprenden desde el ETM<sub>6</sub> de referencia, propuestas para abarcar el contenido del objeto triángulo en tercero básico, y según lo explicitado en el gráfico de la figura 46, es posible denotar que del total de actividades, las consignas solo logran movilizar dos tipos de circulaciones, por un lado el semiplano [Sem-Ref] con un treinta y tres por ciento (33%) de aparición. Y, por el otro se manifiesta un plano semiótico-instrumental y epistemológico con un sesenta y siete por ciento (67%).

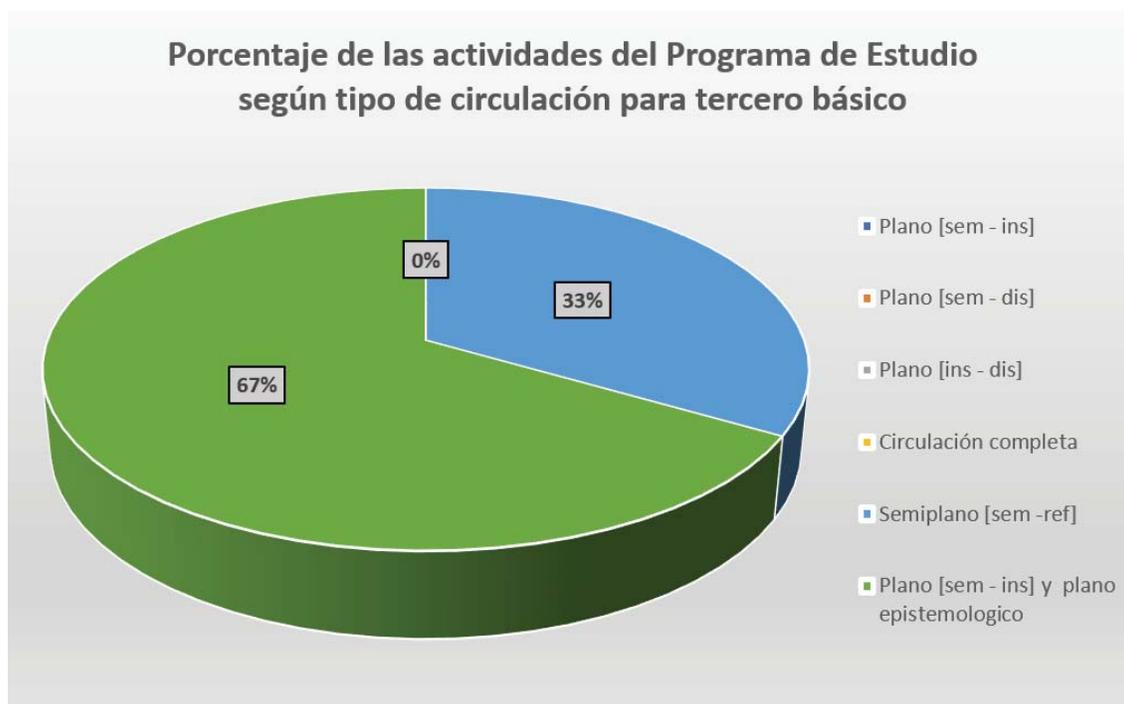


Figura 46. Porcentaje de las actividades del programa de Estudio según tipo de circulación para tercero básico. Fuente:(Elaboración propia grupo tesis, 2018)

La relevancia de los resultados descritos, radica en que las actividades propuestas en el ETM<sub>6</sub> de referencia (programa de estudio), poseen cierta prevalencia hacia las tareas matemáticas que, en sus consignas privilegian la movilización de cinco componentes, siendo la prueba el elemento ausente para una circulación completa.

#### 4.2.1.2 ETM<sub>G</sub> idóneo en las actividades sugeridas en los textos escolares para el tratamiento de triángulos

En concordancia con Henríquez (2014) y Pizarro (2018), este ETM<sub>G</sub> permite la organización del alumno para que pueda comprometerse en la resolución de problemas.

Cada una de las actividades que se encuentran a lo largo de los textos escolares, presenta una configuración determinada en torno a las tareas matemáticas que moviliza. Las actividades que se desprenden desde el ETM<sub>G</sub> idóneo, propuestas para abarcar el contenido del objeto triángulo en tercero básico, y según lo explicitado en el gráfico de la figura 47, es posible denotar que del total de actividades, las consignas solo logran movilizar dos tipos de circulaciones, por un lado el semiplano [Sem-Ref] con un sesenta y siete por ciento (67%). Y, por el otro se manifiesta un plano semiótico-instrumental y epistemológico con un treinta y tres por ciento (33%) de aparición.

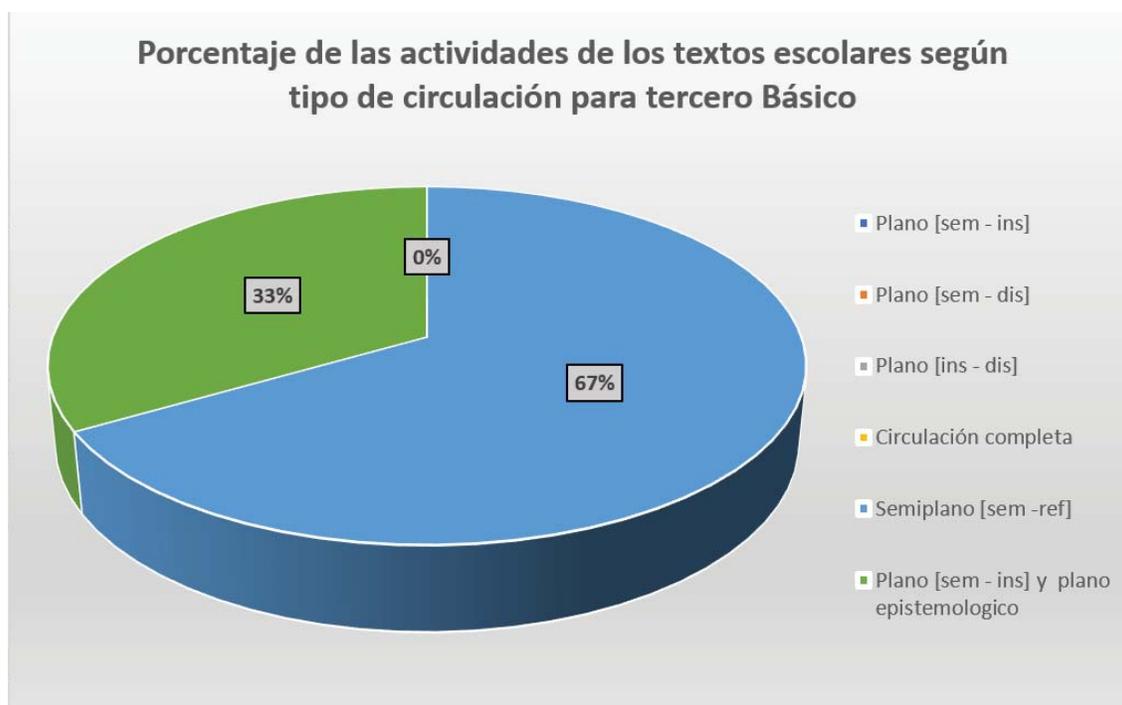


Figura 47. Porcentaje de las actividades de los textos escolares según tipo de circulación para tercero básico. Fuente:(Elaboración propia grupo tesis, 2018)

La importancia de los resultados descritos, radica en que las actividades propuestas en el ETM<sub>G</sub> idóneo (textos escolares), poseen cierta preponderancia hacia las tareas matemáticas que, en sus consignas privilegian la movilización de tres componentes, siendo el artefacto, el proceso de construcción y la prueba los elementos ausentes para una circulación completa.

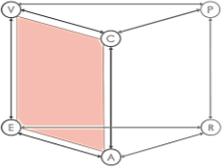
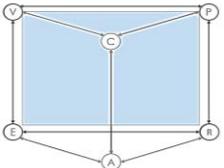
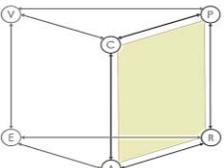
#### **4.2.1.3 Resultado total de circulaciones de los análisis de los Programas de Estudios y Textos Escolares**

Hasta esta sección, los resultados se han redactado por cada ETM<sub>G</sub> señalado. Sin embargo, a partir de este momento, se ha de presentar la triangulación de la información recolectada, por lo que se han de desplegar las secuelas de los análisis referidos a la similitud entre las circulaciones que movilizan las tareas matemáticas del ETM<sub>G</sub> de referencia, de ambas fuentes, y el ETM<sub>G</sub> idóneo en tercero básico. A continuación, se han de conjeturar todos aquellos resultados parcelados para dar respuestas a aquellas preguntas que guardan correspondencia con los objetivos específicos de la investigación.

Tercero básico carece de las circulaciones en los planos [Sem-Ins], [Sem-Dis], [Ins-Dis] y completa. Por su parte, las circulaciones presentes corresponden al semiplano [Sem-Ref] y al plano [Sem-Ins] y plano epistemológico. La tabla 24, agrupa cantidad de circulaciones dada las consignas de los OA, cantidad de circulaciones propuestas en Programas de Estudios (ETM<sub>G</sub> de referencia) y cantidad de circulaciones presentes en las actividades en Textos Escolares (ETM<sub>G</sub> idóneo), que permite evidenciar, la ausencia de los planos anteriormente mencionados y la presencia del plano y del semiplano que si se han de manifestar.

**Tabla 24**

*Resultados de circulaciones de los Programas de Estudio y Textos Escolares de Tercero Básico*

<b>Tipo de Circulación</b>	<b>Cantidad de circulaciones dada las consignas de los OAs.</b>	<b>Cantidad de circulaciones propuestas en Programas de Estudios</b>	<b>Cantidad de circulaciones presentes en las actividades en Textos Escolares</b>	<b>Resultado total de circulaciones</b>
 <p><i>Figura 12.</i> Circulación plano [Sem – Ins] (Fuente: Kuzniak &amp; Nechache, 2015)</p>	0	0	0	0
 <p><i>Figura 14.</i> Circulación plano [Sem – Dis] (Fuente: Kuzniak &amp; Nechache, 2015)</p>	0	0	0	0
 <p><i>Figura 13.</i> Circulación plano [Ins – Dis] (Fuente: Kuzniak &amp; Nechache, 2015)</p>	0	0	0	0

<p>Figura 11. Circulación completa del ETM<sub>G</sub> (Fuente: Kuzniak &amp; Nechache 2015, citado en Pizarro 2018)</p>	0	0	0	0
<p>Figura 15. Semi-plano Semiótico-referencial [Sem-ref]. (Fuente: Pizarro, 2018)</p>	1	1	8	10
<p>Figura 24. Circulación planos semiótico-instrumental y epistemológico</p>	2	2	4	8
<b>Total de tareas</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>12</b>	<b>18</b>

Según lo expuesto en la tabla 24, el programa de estudio presenta un número mayor de actividades que circulan como plano semiótico - instrumental y el plano epistemológico y, que están en concordancia con la cantidad de circulaciones dadas en las consignas de los Objetivos de Aprendizajes que dan respuesta a los tratamientos del objeto triángulo. En cambio los Textos Escolares presentan un mayor número de tareas matemáticas que circulan como semi-plano semiótico-referencial. Esto queda en mayor manifiesto a través de la figura 48.

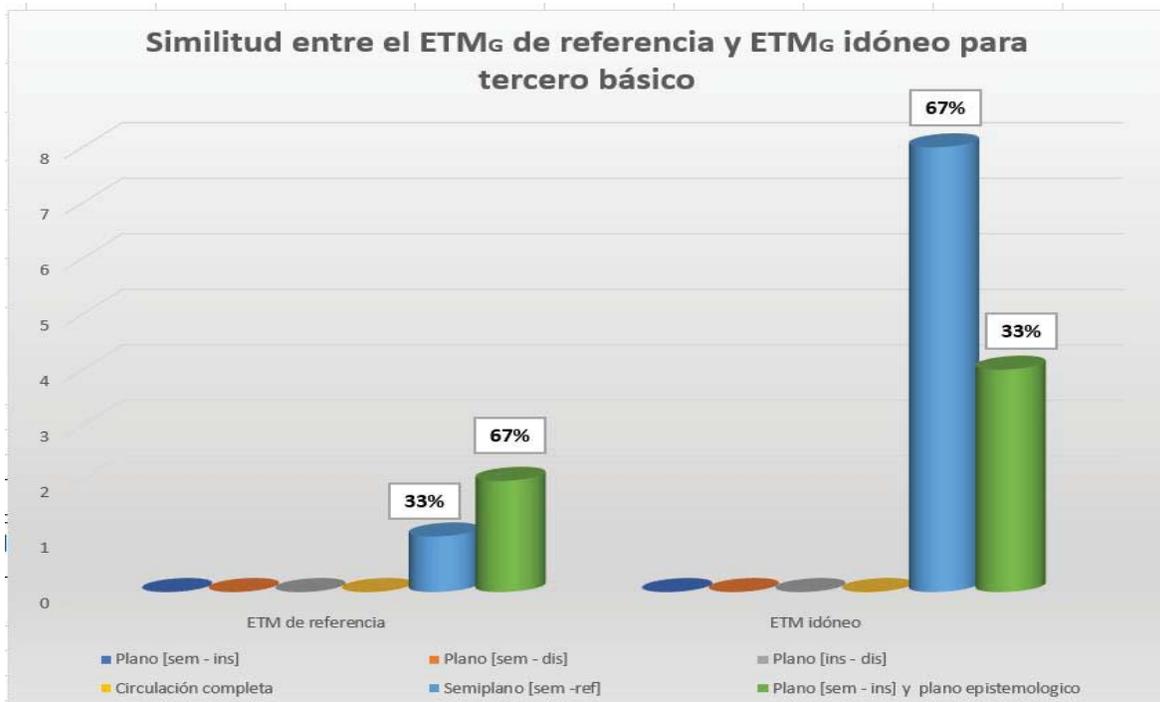


Figura 48. Similitud entre el ETM<sub>G</sub> de referencia y ETM<sub>G</sub> idóneo para tercero básico

Fuente:(Elaboración propia grupo tesis, 2018)

A partir de los análisis realizados, las similitudes entre el ETM<sub>G</sub> de referencia y el ETM<sub>G</sub> idóneo, presenta un rango de similitud de treinta y cuatro por ciento (34%) en ambos tipos de circulaciones, siendo posible categorizarlos como “aproximado a semejante”.

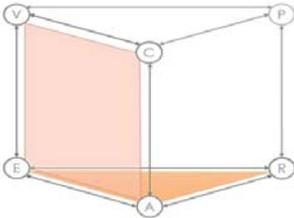
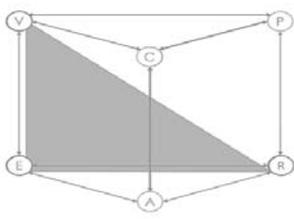
Lo que respecta al semiplano [Sem-Ref] presenta una mayor aparición en las tareas en el ETM<sub>G</sub> idóneo, siendo posible levantar la acepción de que, en el ETM<sub>G</sub> idóneo prevalece el tratamiento de actividades centradas en la movilización de solo tres componentes y por lo tanto, es posible decir, que las tareas matemáticas expuestas en los Textos Escolares para tercero básico presentan una menor demanda cognitiva dada la cantidad de componentes que movilizan en sus circulaciones.

Complementando la conclusión anterior, la taxonomía utilizada en el desarrollo de las consignas de los ETM<sub>G</sub> tanto de referencia como idóneo y, que orientan todo el trabajo matemático a lo largo de las actividades, se movilizan en los verbos especificados en la tabla 25. Siendo posible vincular el plano semiótico -

instrumental y epistemológico con aquellos verbos como demostrar, calcular y construir. Además, presentándose una repetición en los verbos utilizados entre el ETM<sub>G</sub> de referencia y el ETM<sub>G</sub> idóneo.

**Tabla 25**

*Verbos de las consignas según circulación para Tercero Básico.*

Circulación	Tipos de ETM	Verbos de las consignas
 <p data-bbox="248 835 594 926">Figura 24. Circulación planos semiótico- instrumental y epistemológico</p>	<b>Bases Curriculares</b>	Demostrar.
	<b>Programa de Estudios</b>	Construir - Calcular.
	<b>Textos Escolares</b>	Calcular.
 <p data-bbox="248 1186 594 1276">Figura 15. Semiplano Semiótico-referencial [Sem-ref] (Fuente: Pizarro,2018)</p>	<b>Bases Curriculares</b>	Reconocer.
	<b>Programa de Estudios</b>	Desdoblar.
	<b>Textos Escolares</b>	Identificar.

Cabe señalar, que en esta circulación, el verbo “demostrar” se asocia a la experiencia empírica de constatar. Por su parte, los verbos que se relacionan con el semiplano [Sem-Ref] presentan una similitud respecto al ETM<sub>G</sub> de referencia y el ETM<sub>G</sub> idóneo mediante el verbo “reconocer” que en lo técnico se queda en la identificación del objeto en estudio. No obstante, y bajo la misma lógica desarrollada hasta el momento, aunque uno de los verbos que aborda esta circulación sea “desdoblar”, esto solo se relaciona a lo empírico del término, que es identificar el objeto mediante el despliegue de redes para el reconocimiento de la forma 2D.

Finalmente, tercero básico presenta errores conceptuales de tipo disciplinar, ya que figura se utiliza como sinónimo de forma. Además, durante todo el curso, se está en

ausencia del componente del proceso de prueba y, por su parte del plano comunicacional, correspondiente al plano [Sem-Dis], no circulando ningún nivel de  $ETM_G$  de manera completa. Pero si, presentando un mayor número de tareas matemáticas, y por lo tanto, un mayor porcentaje, de consignas que movilizan solo tres componentes.

## **4.2.2 Resultado de las circulaciones en Cuarto Básico**

A continuación se presentará el resultado de los análisis en base al  $ETM_G$  de referencia de los Objetivos de Aprendizaje y las actividades sugeridas en los Programas de Estudio y luego  $ETM_G$  idóneo de las actividades presentes en los Textos Escolares para cuarto básico.

### **4.2.2.1 $ETM_G$ de referencia en los Objetivos de aprendizaje y actividades sugeridas en los programas chilenos para el tratamiento de triángulos**

Kuzniak (2011) citado en Pizarro (2018) señala que los procesos de transposición didáctica realizados en el trabajo matemático, en el ámbito escolar, se encuentran articulados y relacionados con los distintos niveles del espacio de trabajo matemático. El nivel abordado durante esta sesión, corresponde a los resultados entregados en el  $ETM_G$  de Referencia, que definido desde Henríquez (2014), se realiza en función sólo a los criterios matemáticos. Esto fue ampliado por Kuzniak (2011) considerando que esta referencia es entregada en cada país, por los Ministerios de Educación a través de sus Bases Curriculares y Programas de Estudio.

Cada una de las actividades que se encuentran a lo largo del programa, presenta una configuración determinada en torno a las tareas matemáticas que moviliza. Las actividades que se desprenden desde el  $ETM_G$  de referencia, propuestas para abarcar el contenido del objeto triángulo en cuarto básico, y según lo explicitado en el gráfico de la figura 49, es posible denotar que del total de actividades, las consignas solo logran movilizar dos tipos de circulaciones, por un lado el semiplano

[Sem-Ref] con un treinta y tres por ciento (33%) de aparición. Y, por el otro se manifiesta un plano semiótico - instrumental y epistemológico con un sesenta y siete por ciento (67%) .

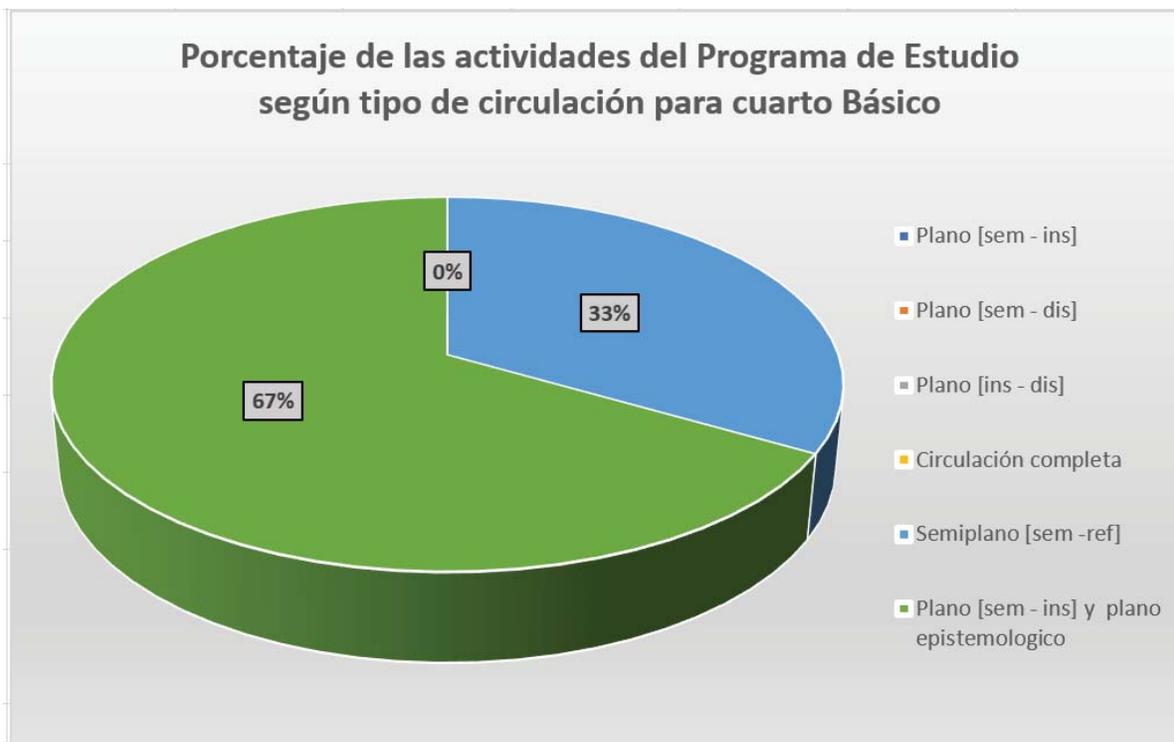


Figura 49. Porcentaje de las actividades del programa de Estudio según tipo de circulación para cuarto básico. Fuente: (Elaboración propia grupo tesis, 2018)

La relevancia de los resultados descritos, radica en que las actividades propuestas en el ETM<sub>6</sub> de referencia (Programa de Estudio), poseen cierta prevalencia hacia las tareas matemáticas que, en sus consignas privilegian la movilización de cinco componentes, siendo la prueba el elemento ausente para una circulación completa.

#### 4.2.2.2 ETM<sub>G</sub> idóneo en las actividades sugeridas en los textos escolares para el tratamiento de triángulos

En concordancia con Henríquez (2014) y Pizarro (2018), este ETM<sub>G</sub> permite la organización del alumno para que pueda comprometerse en la resolución de problemas.

Cada una de las actividades que se encuentran a lo largo de los textos escolares, presenta una configuración determinada en torno a las tareas matemáticas que moviliza. Las actividades que se desprenden desde el ETM<sub>G</sub> idóneo, propuestas para abarcar el contenido del objeto triángulo en cuarto básico, y según lo explicitado en el gráfico de la figura 50, es posible denotar que del total de actividades, las consignas solo logran movilizar dos tipos de circulaciones, por un lado el semiplano [Sem-Ref] con un noventa y uno por ciento (91%). Y, por el otro se manifiesta un plano [Sem-Ins] y plano epistemológico con un nueve por ciento (9%) de aparición.

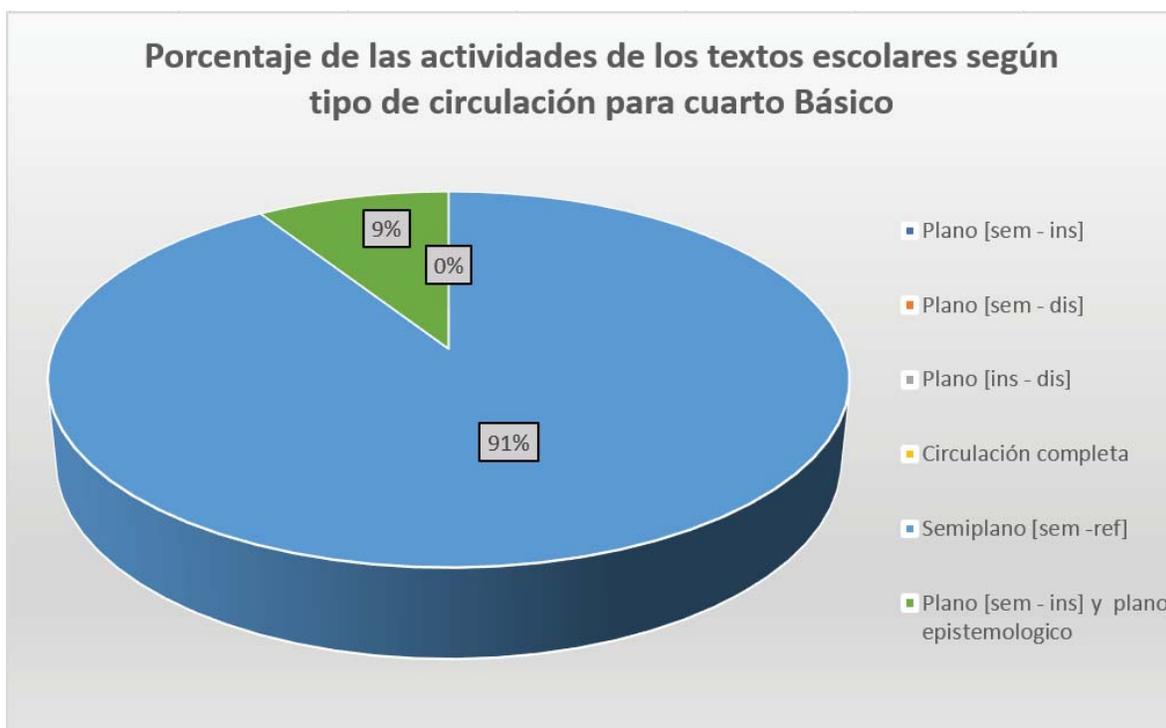


Figura 50. Porcentaje de las actividades de los textos escolares según tipo de circulación para cuarto básico. Fuente: (Elaboración propia grupo tesis,2018)

A diferencia de tercero básico, cuarto, posee cierta preponderancia hacia las tareas matemáticas que, en sus consignas privilegian la movilización de sólo tres componentes, siendo artefacto, el proceso de construcción y la prueba los elementos ausentes para una circulación completa.

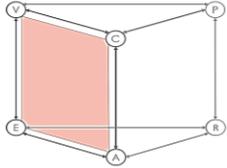
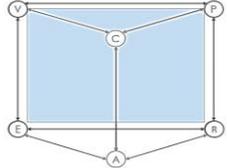
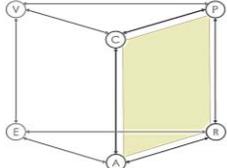
#### **4.2.2.3 Resultado total de circulaciones de los análisis de los Programas de Estudios y Textos Escolares**

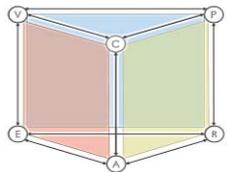
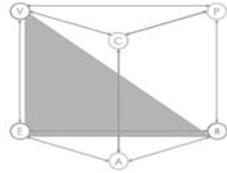
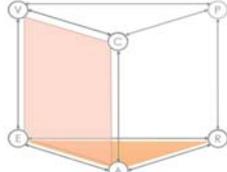
Hasta esta sección, los resultados se han redactado por cada ETM<sub>G</sub> señalado. Sin embargo, a partir de este momento, se ha de presentar la triangulación de la información recolectada, por lo que se han de desplegar las secuelas de los análisis referidos a la similitud entre las circulaciones que movilizan las tareas matemáticas del ETM<sub>G</sub> de referencia, de ambas fuentes, y el ETM<sub>G</sub> idóneo básico. A continuación, se han de conjeturar todos aquellos resultados parcelados para dar respuestas a aquellas preguntas que guardan correspondencia con los objetivos específicos de la investigación.

Cuarto básico carece de las circulaciones en los planos [Sem-Ins], [Sem-Dis], [Ins-Dis] y completa. Por su parte, las circulaciones presentes corresponden al semiplano [Sem-Ref] y al plano [Sem-Ins] y plano epistemológico. La tabla 26, agrupa cantidad de circulaciones dada las consignas de los OA, cantidad de circulaciones propuestas en Programas de Estudios (ETM<sub>G</sub> de referencia) y cantidad de circulaciones presentes en las actividades en Textos Escolares (ETM<sub>G</sub> idóneo), que permite evidenciar, la ausencia de los planos anteriormente mencionados y la presencia del plano y del semiplano que si se han de manifestar.

**Tabla 26**

*Resultados de circulaciones de los Programas de Estudio y Textos Escolares de Cuarto Básico*

Tipo de Circulación	Cantidad de circulaciones dada las consignas de los OAs.	Cantidad de circulaciones propuestas en Programas de Estudios	Cantidad de circulaciones presentes en las actividades en Textos Escolares	Resultado total de circulaciones
 <p><i>Figura 12.</i> Circulación plano [Sem – Ins] (Fuente: Kuzniak &amp; Nechache, 2015)</p>	0	0	0	0
 <p><i>Figura 14.</i> Circulación plano [Sem – Dis] (Fuente: Kuzniak &amp; Nechache, 2015)</p>	0	0	0	0
 <p><i>Figura 13.</i> Circulación plano [Ins – Dis] (Fuente: Kuzniak &amp; Nechache, 2015)</p>	0	0	0	0

 <p>Figura 11. Circulación completa del ETM<sub>G</sub> (Fuente: Kuzniak &amp; Nechache 2015, citado en Pizarro 2018)</p>	0	0	0	0
 <p>Figura 15. Semiplano Semiótico-referencial [Sem-ref] (Fuente: Pizarro,2018)</p>	1	1	10	12
 <p>Figura 24. Circulación planos semiótico-instrumental y epistemológico</p>	2	2	1	5
<b>Total de tareas</b>	3	3 <sup>4</sup>	11	17

Según lo expuesto en la tabla 26, el programa de estudio presenta un número mayor de actividades que circulan como plano semiótico - instrumental y el plano epistemológico y, que están en concordancia con la cantidad de circulaciones dadas las consignas de los Objetivos de Aprendizajes que dan respuesta a los tratamientos del objeto triángulo. En cambio los textos escolares presentan un mayor número de

<sup>4</sup>Cabe señalar que si bien cuarto básico presenta dos objetivos de aprendizaje, el objetivo de aprendizaje 17 presenta dos instancias en sus consignas, circulando de dos maneras simultáneas.

tareas matemáticas que circulan como semiplano semiótico-referencial. Esto queda en mayor manifiesto a través de la figura 51.

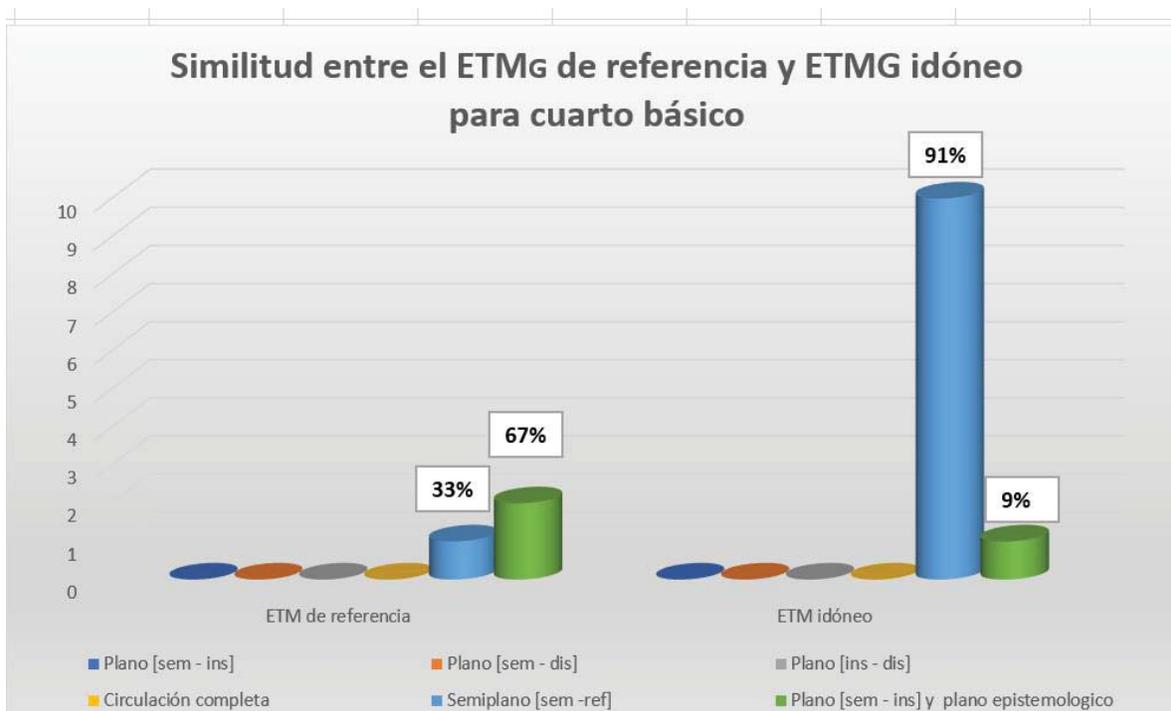


Figura 51. Similitud entre el ETMG de referencia y ETMG idóneo para cuarto básico. Fuente: (Elaboración propia grupo tesis, 2018)

A partir de los análisis realizados, las similitudes entre el ETMG de referencia y el ETMG idóneo, el semiplano [Sem-Ref] presenta un grado de similitud correspondiente a un cincuenta y ocho por ciento (58%) cayendo en la categoría aproximado. Categoría en donde es posible encontrar el cincuenta por ciento (50%) de la muestra, y que por lo tanto marca una distancia certera de la diferencia entre las similitudes entre ambos ETMG. Por su lado, el plano [Sem-Ins] y plano epistemológico presenta un grado de similitud igual a un cincuenta y ocho por ciento (58%), cayendo en la categoría aproximado y encontrándose justo con la mediana de la muestra.

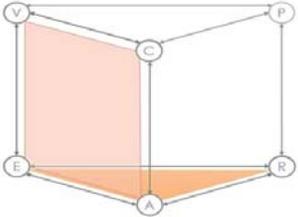
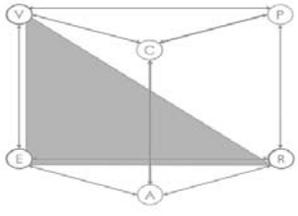
Lo que respecta al semiplano [Sem-Ref] presenta una mayor aparición en las tareas en el ETMG idóneo, siendo posible levantar la acepción de que, en el ETMG idóneo prevalece el tratamiento de actividades centradas en la movilización de solo tres

componentes y por lo tanto, es posible decir, que las tareas matemáticas expuestas en los textos escolares para cuarto básico presentan una menor demanda cognitiva dada la cantidad de componentes que movilizan en sus circulaciones.

Complementando la conclusión expuesta anteriormente, la taxonomía utilizada en el desarrollo de las consignas de los ETM<sub>G</sub> tanto de referencia como idóneo y, que orientan todo el trabajo matemático a lo largo de las actividades, se movilizan en los verbos especificados en la tabla 27. Siendo posible vincular el plano semiótico-instrumental y plano epistemológico con aquellos verbos como construir, trasladar, rotar, reflejar, trazar y relacionar. Cabe señalar que, el verbo “trazar”, se asocia al procedimiento de construcción mecánica, siendo posible entonces, encontrar una repetición en los verbos utilizados entre el ETM<sub>G</sub> de referencia.

**Tabla 27**

*Verbos de las consignas según circulación para Cuarto Básico.*

Circulación	Tipos de ETM	Verbos de las consignas
 <p data-bbox="248 1308 597 1398">Figura 24. Circulación planos semiótico- instrumental y epistemológico</p>	<b>Bases Curriculares</b>	Construir - Trasladar - Rotar - Reflejar.
	<b>Programa de Estudios</b>	Trazar.
	<b>Textos Escolares</b>	Relacionar.
 <p data-bbox="248 1671 597 1761">Figura 15. Semiplano Semiótico-referencial [Sem-ref] (Fuente: Pizarro,2018)</p>	<b>Bases Curriculares</b>	Identificar.
	<b>Programa de Estudios</b>	Identificar.
	<b>Textos Escolares</b>	Identificar - Observar - Comentar.

Por su parte, los verbos que se relacionan con el semiplano [Sem-Ref] presentan una similitud respecto al ETM<sub>G</sub> de referencia (tanto en las fuentes de bases curriculares como en los programas de estudio) y el ETM<sub>G</sub> idóneo, mediante el verbo “identificar” que en lo técnico se queda en el reconocimiento del objeto en estudio.

Finalmente, cuarto básico presenta errores conceptuales de tipo disciplinar, ya que figura se utiliza como sinónimo de forma. Además, durante todo el curso, se está en ausencia del componente del proceso de prueba y, por su parte del plano comunicacional, correspondiente al plano [Sem-Dis], no circulando ningún nivel de ETM<sub>G</sub> de manera completa, asignando la categoría de mayor complejidad cognitiva aquellas tareas matemáticas que movilicen cinco componentes, pero sólo con en un nueve por ciento (9%), muy por debajo del noventa y uno por ciento (91%) de actividades que movilizan tres componentes, siendo tareas matemáticas de muy bajo desarrollo en cuanto a habilidades matemáticas, dado que en su consigna, es posible articular ambos ETM<sub>G</sub> (referencial e idóneo) en la acción de identificar, establecer, comprender o interpretar la información en base al conocimiento previo.

### **4.2.3 Resultado generales**

A través del presente trabajo investigativo, se ha de obtener la visión global con la que el año en curso se ha de bajar el saber enseñado a los alumnos de tercero y cuarto básico anterior al cuarto acto de la transposición didáctica.

En lo que respecta a la enseñanza del objeto matemático de triángulos, ambas fuentes que conforman el ETM<sub>G</sub> de referencia, presentan una similitud y por lo tanto una concordancia en su organización logística y selección de contenidos y actividades ya que, se han de presentar en mismo porcentaje de aparición los planos movilizados según las consignas de las tareas matemáticas planteadas.

Por su lado, al momento de referirse al análisis de la fuente que aporta el ETM<sub>G</sub> idóneo a la investigación, es posible encontrar una diferencia respecto al grado de similitud con el ETM<sub>G</sub> planteado por el Ministerio del país. En el segundo acto de la transposición didáctica, los objetos de enseñanza, en este caso el objeto triángulo, debe ser redactado en términos de conocimiento a adquirir por los alumnos y

organizados en el seno de la enseñanza. Mientras que, en el caso del ETM<sub>6</sub> idóneo (los Textos Escolares), persigue el objetivo de proponer una organización del programa y orientar la preparación de las clases o ser una herramienta de referencia para sus eventuales búsquedas, desprendiéndose un cierto tipo de saber que contribuye a la instalación de una cultura particular de la actualidad educativa que se vive. Sin embargo, uno (el primero) plantea actividades que movilicen una mayor cantidad de componentes, y que por lo tanto permite decir que propone actividades de mayor demandas cognitivas y matemáticas dado los componentes que moviliza, mientras que el segundo (ETM<sub>6</sub> idóneo) plantea actividades de baja demanda logística matemática, dado que sus consignas solo son capaces de movilizar tres componentes, apuntando al tratamiento empírico de identificar y reconocer el nuevo conocimiento matemático. Produciéndose una desarticulación entre ambos ETM<sub>6</sub> analizados.

Los últimos niveles del primer ciclo básico, correspondiente a tercero y cuarto básico, se evidencia, en ambos cursos la ausencia total de las circulaciones en los planos [Sem-Ins], [Sem-Dis], [Ins-Dis] ni completa. Por su parte, las circulaciones presentes corresponden al semiplano [Sem-Ref] y al plano [Sem-Ins] y plano epistemológico.

Finalmente, la muestra de las tareas analizadas son de carácter representativo respecto a la población, pero acotada para presentar una generalización. No obstante, es posible derivar que de los verbos que movilizan las consignas, en ambos cursos, la mayor cantidad de tareas que dan origen a las circulaciones, son todas aquellas que recaen en el semiplano [Sem-Ref]. Así, en los niveles de tercero y cuarto básico, la mayor cantidad de tareas matemáticas son aquellas que sólo son capaces de movilizar tres componentes de un total de seis.

Hasta este momento, en donde se da por finalizada los resultados emanados desde los análisis, el docente no ha intervenido en ningún acto previo, exponiéndose entonces, todo aquello que llega a manos del profesor antes, de planificar, implementar y evaluar un proceso de enseñanza y aprendizaje. Tras todo lo expuesto referenciados a los resultados de los datos, es posible dilucidar ciertas

conclusiones respecto a la manera de organizar y entender el contexto educativo chileno.

## CAPÍTULO 5

### CONCLUSIONES Y PROYECCIONES

Este capítulo corresponde a la etapa final del proceso investigativo, en el cual se expone aquella información recabada, analizada y sintetizada de la investigación. Las conclusiones son planteadas a través de una mirada cualitativa respaldadas en datos numéricos evidenciados en el capítulo “Análisis y Resultados”. Siendo posible estructurarlos mediante tres secciones. La primera, presenta los resultados del trabajo guiado por los objetivos específicos estipulados en el Marco Metodológico, que culmina con el objetivo general de la investigación. En la segunda sección, se explicitan las limitaciones, es decir aquello que queda fuera del rango del control del investigador. Finalmente, la tercera sección, corresponde a las proyecciones.

#### 5.1 Conclusiones

A continuación, se ha de presentar las conclusiones generales de los resultados de los análisis de las tres instancias: Bases Curriculares, Programas de Estudio y Textos Escolares, mencionando primero las pertenecientes a tercero básico y luego las de cuarto básico.

##### 5.1.1 Tercero Básico

Las actividades que se desprenden desde el ETM<sub>G</sub> de referencia, propuestas para abarcar el contenido del objeto triángulo en tercero básico, es posible denotar que del total de actividades, las consignas solo logran movilizar dos tipos de circulaciones, por un lado el semiplano [Sem-Ref] con un treinta y tres por ciento (33%) de aparición. Y, por el otro se manifiesta un plano semiótico-instrumental y plano epistemológico con un sesenta y siete por ciento (67%). Así, tras los resultados descritos, las actividades propuestas en el ETM<sub>G</sub> de referencia (Programa de Estudio), poseen cierta prevalencia hacia las tareas matemáticas que,

en sus consignas privilegian la movilización de cinco componentes, siendo la prueba el elemento ausente necesario para una circulación completa.

Por su lado, las actividades que orientan el ETM<sub>G</sub> idóneo, en sus consignas en cuanto a los verbos, solo logran movilizar dos tipos de circulaciones, por un lado, el semiplano [Sem-Ref] con un sesenta y siete por ciento (67%). Y, por el otro se manifiesta un plano semiótico-instrumental y plano epistemológico con un treinta y tres por ciento (33%) de aparición. Por consiguiente, en las actividades propuestas en el ETM<sub>G</sub> idóneo (textos escolares), poseen cierta preponderancia hacia las tareas matemáticas que, en sus consignas privilegian la movilización de tres componentes, siendo el artefacto, el proceso de construcción y la prueba los elementos ausentes para una circulación completa.

En consecuencia, tercero básico carece de las circulaciones en los planos [Sem-Ins], [Sem-Dis], [Ins-Dis] y completa. Por su parte, las circulaciones presentes corresponden al semiplano [Sem-Ref] y al plano [Sem-Ins] y plano epistemológico. Y, en términos cuantitativos, el Programa de Estudio presenta un número mayor de actividades que circulan como plano semiótico - instrumental y el plano epistemológico y, que están en concordancia con la cantidad de circulaciones dadas en las consignas de los Objetivos de Aprendizajes que dan respuesta a los tratamientos del objeto triángulo. En cambio, los Textos Escolares presentan un mayor número de tareas matemáticas que circulan como semiplano semiótico-referencial.

Lo que respecta al semiplano [Sem-Ref] presenta una mayor aparición en las tareas en el ETM<sub>G</sub> idóneo, siendo posible levantar la acepción de que, en el ETM<sub>G</sub> idóneo prevalece el tratamiento de actividades centradas en la movilización de solo tres componentes y, por lo tanto, es posible decir, que las tareas matemáticas expuestas en los Textos Escolares para tercero básico presentan una menor demanda cognitiva dada la cantidad de componentes que movilizan en sus circulaciones.

Complementando la conclusión anterior, la taxonomía utilizada en el desarrollo de las consignas de los ETM<sub>G</sub> tanto de referencia como idóneo y, que orientan todo el

trabajo matemático a lo largo de las actividades, es posible vincular el plano semiótico-instrumental y plano epistemológico con aquellos verbos como demostrar, calcular y construir. Además, presentándose una repetición en los verbos utilizados entre el ETM<sub>G</sub> de referencia y el ETM<sub>G</sub> idóneo.

Articulando todos aquellos resultados parcelados que guardan correspondencia con los objetivos específicos de la investigación. Las similitudes entre el ETM<sub>G</sub> de referencia y el ETM<sub>G</sub> idóneo, presenta un rango igual a treinta y cuatro por ciento (34%) en ambos tipos de circulaciones, siendo posible categorizarlos como “aproximado a semejante”.

Finalmente, tercero básico presenta errores conceptuales de tipo disciplinar, ya que figura se utiliza como sinónimo de forma. Además, durante todo el curso, se está en ausencia del componente del proceso de prueba y, por su parte del plano comunicacional, correspondiente al plano [Sem-Dis], no circulando ningún nivel de ETM<sub>G</sub> de manera completa. Pero si, presentando un mayor número de tareas matemáticas, y, por lo tanto, un mayor porcentaje, de consignas que movilizan solo tres componentes.

### **5.1.2 Cuarto Básico**

Las actividades que se desprenden desde el ETM<sub>G</sub> de referencia, propuestas para abarcar el contenido del objeto triángulo en cuarto básico, es posible denotar que del total de actividades, las consignas solo logran movilizar dos tipos de circulaciones, por un lado el semiplano [Sem-Ref] con un treinta y tres por ciento (33%) de aparición. Y, por el otro se manifiesta un plano semiótico-instrumental y plano epistemológico con un sesenta y siete por ciento (67%). La relevancia de los resultados descritos, radica en que las actividades propuestas en el ETM<sub>G</sub> de referencia (Programa de Estudio), poseen cierta prevalencia hacia las tareas matemáticas que, en sus consignas privilegian la movilización de cinco componentes, siendo la prueba el elemento ausente para una circulación completa.

En cuanto al ETM<sub>G</sub> idóneo, es posible denotar que, del total de actividades, las consignas solo logran movilizar dos tipos de circulaciones, por un lado, el semiplano

[Sem-Ref] con un noventa y uno por ciento (91%). Y, por el otro se manifiesta un plano semiótico-instrumental y plano epistemológico con un nueve por ciento (9%) de aparición. Cuarto básico, posee cierta preponderancia hacia las tareas matemáticas que, en sus consignas privilegian la movilización de sólo tres componentes, siendo artefacto, el proceso de construcción y la prueba los elementos ausentes para una circulación completa.

A continuación, se han de articular todos aquellos resultados parcelados para dar respuestas a aquellas preguntas que guardan correspondencia con los objetivos específicos de la investigación. Cuarto básico carece la ausencia total de las circulaciones en los planos [Sem-Ins], [Sem-Dis], [Ins-Dis] y completa. Por su parte, las circulaciones presentes corresponden al semiplano [Sem-Ref] y al plano [Sem-Ins] y plano epistemológico. El Programa de Estudio presenta un número mayor de actividades que circulan como plano semiótico - instrumental y el plano epistemológico y, que están en concordancia con la cantidad de circulaciones dadas las consignas de los Objetivos de Aprendizajes que dan respuesta a los tratamientos del objeto triángulo. En cambio, los Textos Escolares presentan un mayor número de tareas matemáticas que circulan como semiplano semiótico-referencial.

A partir de los análisis realizados, las similitudes entre el  $ETM_G$  de referencia y el  $ETM_G$  idóneo, el semiplano [Sem-Ref] presenta un grado de similitud correspondiente a un cincuenta y ocho por ciento (58%) cayendo en la categoría “aproximado”. Categoría en donde es posible encontrar el cincuenta por ciento (50%) de la muestra, y que por lo tanto marca una distancia certera de la diferencia entre las similitudes entre ambos  $ETM_G$ . Por su lado, el plano [Sem-Ins] y plano epistemológico presenta un grado de similitud igual a un cincuenta y ocho por ciento (58%), cayendo en la categoría “aproximado” y encontrándose justo con la mediana de la muestra.

Lo que respecta al semiplano [Sem-Ref] presenta una mayor aparición en las tareas en el  $ETM_G$  idóneo, siendo posible levantar la acepción de que, en el  $ETM_G$  idóneo prevalece el tratamiento de actividades centradas en la movilización de solo tres componentes y por lo tanto, es posible decir, que las tareas matemáticas expuestas

en los Textos Escolares para cuarto básico presentan una menor demanda cognitiva dada la cantidad de componentes que movilizan en sus circulaciones.

Complementando la conclusión expuesta anteriormente, la taxonomía utilizada en el desarrollo de las consignas de los ETM<sub>G</sub> tanto de referencia como idóneo y, que orientan todo el trabajo matemático a lo largo de las actividades. Siendo posible vincular el plano semiótico-instrumental y plano epistemológico con aquellos verbos como construir, trasladar, rotar, reflejar, trazar y relacionar. Cabe señalar que, el verbo “trazar”, se asocia al procedimiento de construcción mecánica, siendo posible entonces, encontrar una repetición en los verbos utilizados entre las fuentes del ETM<sub>G</sub> de referencia.

Por su parte, los verbos que se relacionan con el semiplano [Sem-Ref] presentan una similitud respecto al ETM<sub>G</sub> de referencia (tanto en las fuentes de Bases Curriculares como en los Programas de Estudio) y el ETM<sub>G</sub> idóneo, mediante el verbo “identificar” que en lo técnico se queda en el reconocimiento del objeto en estudio.

Finalmente, cuarto básico presenta errores conceptuales de tipo disciplinar, ya que figura se utiliza como sinónimo de forma. Además, durante todo el curso, hay ausencia del componente del proceso de prueba y, por su parte del plano comunicacional, correspondiente al plano [Sem-Dis], no circulando ningún nivel de ETM<sub>G</sub> de manera completa, asignando la categoría de mayor complejidad cognitiva aquellas tareas matemáticas que movilicen cinco componentes, pero sólo con un nueve por ciento (9%), muy por debajo del noventa y uno por ciento (91%) de actividades que movilizan tres componentes, siendo tareas de muy bajo desarrollo en cuanto a habilidades matemáticas, dado que en su consigna, es posible articular ambos ETM<sub>G</sub> (referencial e idóneo) en la acción de identificar, establecer, comprender o interpretar la información en base al conocimiento previo.

### **5.1.3 Conclusiones finales**

Una de las primeras conclusiones apunta a la validación de la existencia de la noosfera (sistema social de enseñanza) en el sistema de educación chileno, que da

cuenta de todos los conocimientos existentes y pertinentes para la formación matemática de los estudiantes. Así, en paralelo a los estudios ya realizados en otros países, en Chile el Ministerio de Educación es el agente que decide junto a su equipo de expertos cuáles son los objetos a enseñar, que se rige a través de las Bases Curriculares que promueven la enseñanza de un razonamiento matemático en los estudiantes. Sin embargo, y en concordancia con investigaciones realizadas por Espinoza, Barbé, Mitrovich y Rojas (2007) se identifica “una serie de disfunciones de carácter curricular que podrían dificultar la enseñanza de la geometría en las escuelas y, por tanto, el aprendizaje de los niños” (p.1).

Kuzniak (2011) citado en Pizarro (2018) señala que los procesos de transposición didáctica realizados en el trabajo matemático, en el ámbito escolar, se encuentran articulados y relacionados con los distintos niveles del espacio de trabajo matemático. El primer acto de la transposición didáctica es el saber sabio, donde los responsables son los matemáticos que crean nuevos conocimientos; este acto no es abordado en la presente investigación. El segundo acto, son los objetos a enseñar, es decir, los contenidos mínimos obligatorios que deben adquirir los estudiantes, referidos a los OA presentes en las Bases Curriculares y el Programa de Estudio del Ministerio de Educación. Desde los resultados emanados en la presente investigación, el segundo acto articula a nivel de  $ETM_G$  de referencia, los objetivos y actividades a través de componentes que se movilizan como semiplano [Sem-Ref] en las consignas del OA, y un semiplano [Sem-Ref] en las actividades propuestas por el Programas de Estudio. Además, presenta dos planos [Sem-Ins] y plano epistemológico para cada una de las instancias anteriormente señalada. Este resultado se presenta igualmente para tercero y cuarto básico. Por lo tanto, este acto está correctamente articulado para generar habilidades de pensamiento lógico matemático en los estudiantes del sistema educacional chileno, presentando la categorización de “semejante”<sup>5</sup>.

---

<sup>5</sup>Este enunciado fue categorizado mediante la misma metodología de criterios de semejanza, utilizada en los análisis de las circulaciones.

El tercer acto, es el saber a enseñar y los objetos de enseñanza. Para este caso, la fuente utilizada corresponde a los Textos Escolares y, específicamente las actividades diseñadas para el logro de dichos objetivos de aprendizaje que aborden el objeto matemático triángulo. Este acto, se refleja en el nivel del ETM<sub>G</sub> idóneo. Los resultados de éste arrojan un sesenta y siete por ciento (67%) para el semiplano [Sem-Ref] y un treinta y tres por ciento (33%) para el plano [Sem-Ins] y plano epistemológico, en tercero básico. Para cuarto básico, estos resultados cambian a un noventa y un por ciento (91%) para semiplano [Sem-Ref] y nueve por ciento para el plano [Sem-Ins] y plano epistemológico. En ambos cursos, predomina la circulación de tres componentes, haciendo que el desarrollo de las habilidades cognitivas sea de menor demanda, independiente de la editorial de las fuentes utilizadas, por lo que, no existe una progresión en cuanto al avance del nivel educacional. En segunda instancia, al analizar la transición entre el segundo y el tercer acto, estos no están correctamente articulados para generar habilidades lógico matemática en los estudiantes del sistema educacional chileno.

Al comparar las similitudes de ambos tipos de ETM<sub>G</sub>, (o también referido a los actos de la transposición didáctica), presentes para el año 2018, estos muestran un treinta y cuatro por ciento (34%), presentando una articulación como “aproximado a semejante”, para tercero básico, y un cincuenta y ocho por ciento (58%), categorizado como “aproximado”, para cuarto básico<sup>6</sup>. Al respecto, Espinoza et al. (2007) mencionan: (...) parte importante de las dificultades en la enseñanza de la geometría en Básica están relacionadas con el tipo de actividad matemática que se propone en los programas oficiales y libros de texto para que los estudiantes realicen, y con las condiciones bajo las cuales los profesores deben gestionar sus procesos de estudio en las escuelas (p.1).

El programa declara que se considera esencial proporcionar a los niños un conjunto de experiencias que les permitan reconocer la diversidad de formas de los objetos que los rodean, establecer relaciones entre ellas y considerar

---

<sup>6</sup>Este enunciado fue categorizado mediante la misma metodología de criterios de semejanza, utilizada en los análisis de las circulaciones.

las formas geométricas como simplificaciones de las formas que se encuentran en el entorno. Asimismo, se busca apoyar el desarrollo de procesos que permitan a los alumnos estructurar el espacio y desenvolverse en él (orientarse, usar referentes, elaborar representaciones gráficas). (Espinoza et. al, 2007, p.4)

Pese a las ya citadas aspiraciones, la actividad matemática concretamente propuesta en los Programas, y también en los libros de texto, es en general pobre y desarticulada (Espinoza et. al, 2007), Tras esta investigación, y para el año vigente, las actividades propuestas tanto en el ETM<sub>G</sub> de referencia como idóneo, son tareas matemáticas que movilizan solo tres componentes y que, desde los verbos indicados en sus consignas, se han de centrar en la habilidad de la identificación y reconocimiento siendo repetitivo en ambos cursos analizados. A modo general, y en favor a los hallazgos encontrados, el estudio de la geometría en el objeto triángulo, no progresa al pasar de un curso a otro. Más bien se detecta la repetición del mismo tipo de actividad, que va variando solo por la incorporación de nuevos objetos e incluso, de actividades que no pertenecen a los objetivos planteados para cada año, sino que abarcando y repitiendo los cursos anteriores.

Concierno a los hallazgos propios de las tareas matemáticas, es posible en ellas la identificación de un único paradigma geométrico. Houdement & Kuzniak (2006), introducen el término de paradigma geométrico, donde concilian la integración de las creencias del saber compartidos por una comunidad científica, con la perspectiva de enseñanza, haciendo referencia a las prácticas que en él se constituyen. De lo analizado y expuesto durante esta tesis, el paradigma presente tanto en las tareas matemáticas propuestas en ambos niveles escolares (tercero y cuarto básico), así como también en los distintos tipos de ETM<sub>G</sub>, las tareas matemáticas se centran en una geometría natural (GI). GI es una geometría estrechamente implicada en el mundo real, ya que corresponde a los objetos reales, los cuales tienen importancia por la aproximación y la medida. Este trabajo es a menudo de tipo material siendo su fuente de validación el mundo real y sensible y con un constante feedback permanente entre el ir y volver entre el modelo y la

realidad. En este paradigma geométrico se encuentran los componentes de la intuición, la experiencia y la deducción. Es posible encontrar explícitamente este paradigma en actividades tales como por ejemplo en la manipulación de objetos de la realidad, para hallar ejes de simetría. Además del paradigma puesto en juego, se realiza a través de una representación icónica por medio de la representación del triángulo.

Por otro lado, y lo que es aún de mayor gravedad recae en el abuso del lenguaje en cuanto a “Figuras 2D”, mientras que debiese de ser forma 2D, cayendo en un error conceptual de tipo disciplinar en ambos niveles de ETM<sub>G</sub>.

A modo de síntesis y reflexión, la educación debe ser entregada en conjunto, con criterios “estandarizados” para poder alcanzar la sinergia. Si mejoramos la formación de los docentes, el Ministerio debe entregar materiales y recursos que estén en concordancia con lo enseñado en las universidades, institutos, etc. a los encargados de generar aprendizajes: los docentes. Por otra parte, debiese, a la vez, explicitar aquello que pretende alcanzar como fin último del proceso de escolarización, dado que, a partir de las fuentes revisadas durante esta investigación, el Ministerio de Educación propone alcanzar una educación de calidad para cada uno y cada una de los niños y niñas que estén insertos en el sistema. Pero, no existe una definición exacta de este concepto, más bien se denota ambigua, siendo extenso y peyorativo su uso. Así, la pregunta que debemos plantearnos es ¿Qué queremos lograr, educación de calidad o calidad en la educación?

## **5.2 Limitaciones del estudio**

El presente punto, señala las limitaciones o problemas con los que las investigadoras se han encontrado durante el transcurso de la realización de la misma. En otras palabras, se mencionan los aspectos que se dejan de estudiar por alguna razón. La investigación presentada posee dos tipos de limitaciones. La primera, referida al tamaño de la muestra, ya que este es muy reducido. La segunda, proveniente de la falta de estudios previos sobre la investigación realizada. Cada

una de ellas, genera ciertas consecuencias en el estudio que serán descritas a continuación.

La limitación perteneciente al tamaño de la muestra, tiene su efecto en el nivel de generalización de las conclusiones extraídas de la investigación. Al producir los análisis en base a los textos de estudio que distribuye gratuitamente el Ministerio de Educación para todos los establecimientos educacionales que lo soliciten, las conclusiones son exclusivamente de ese recurso, quedando fuera cualquier otro instrumento que posea el mismo objetivo de desarrollar y potenciar las habilidades y actitudes referidas al área de matemáticas y enseñar los contenidos mínimos establecidos en el currículo nacional. Además, tampoco representan las mismas generalizaciones significativas para los demás cursos excluyentes de la investigación.

La segunda limitación del estudio, tiene sus efectos en la dificultad de búsqueda de referencias bibliográficas que mencionen e investiguen el marco teórico consultado. Esto se debe, a que en Chile existen muy pocos estudios que ayuden a contextualizar, aplicar y contrastar la teoría del análisis expuesto, que lo presentado en los primeros capítulos de la investigación.

### **5.3 Proyecciones**

Los resultados del presente estudio arrojan ciertas proyecciones importantes para el mediano y largo plazo. Primeramente, los resultados obtenidos en los análisis de las actividades de la población de estudio, reflejan bajos niveles significativos en los aprendizajes de los estudiantes, dado la cantidad de componentes de  $ETM_G$  que circulan. Es por esto, que se podría mejorar una de las actividades, para cualquier curso señalado, con el fin que exista una circulación completa, activando las tres génesis pertenecientes al  $ETM_G$ .

Seguido a esto, otra proyección de la investigación está enfocada a orientar y despertar interés sobre el estudio del tema señalado, sobre todo en la educación

básica. Los estudios existentes de ETM, están enfocados en la educación secundaria, para ser desarrollados por estudiantes pertenecientes a ese rango etario; por ende, serviría como complemento e insumos a los estudios sobre el por qué de los resultados deficientes arrojados en las pruebas estandarizadas, mencionadas al comienzo de la investigación. Esto radica en su importancia, que durante el primer ciclo de enseñanza básica (primero a cuarto básico), los contenidos del área de matemáticas son construidos como base para profundizar en los siguientes niveles educacionales.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acuerdo N° 075/2012. Consejo Nacional de Educación, Santiago, Chile, 26 de Septiembre 2012.

Agencia de Calidad de la educación (s.f.) Estudio Internacional de Alfabetización Computacional y Manejo de Información (ICILS). Recuperado de <http://www.agenciaeducacion.cl/estudios/estudios-internacionales/icils/>

Ávila, R. (2001) *Guía para elaborar la tesis: metodología de la investigación; cómo elaborar la tesis y/o investigación, ejemplos de diseños de tesis y/o investigación*. Lima: ediciones R.A. Recuperado de <http://tesis-investigacion-cientifica.blogspot.com/2013/08/limitaciones-del-problema-de.html>

Balacheff, Nicolas (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: una empresa docente.

Chevallard Y. (1991). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Argentina : Aique.

Chong de la Cruz, I. (2007). *Metodos y Tecnicas de la Investigación Documental. Investigación y Docencia en Bibliotecología*. México: Facultad de Filosofía y Letras, Dirección General de Asuntos del Personal Académico, Universidad Nacional Autónoma de México. pp 183-201.

Edwards, V. (1991). *El concepto de calidad de la educación*. Recuperado de <http://unesdoc.unesco.org/images/0008/000884/088452SB.pdf>

Espinoza, L., Barbé, J., Mitrovich, D., & Rojas, D. (2007). El problema de la enseñanza de la geometría en la educación general básica chilena y una propuesta para su enseñanza en el aula. In *II Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico*.

- Gómez-Chacón, I. M., Kuzniak, A., & Vivier, L. (2016). El rol del profesor desde la perspectiva de los Espacios de Trabajo Matemático. *Boletim de Educação Matemática*, 30(54).
- Gómez L. (2011). Un espacio para la investigación documental. *Revista Vanguardia Psicológica*, 1 (2), 226-233.
- Henríquez, C. (2014). El trabajo geométrico de profesores en el tránsito de la geometría sintética a la analítica en el nivel secundario. 2014. 251; P:46-70
- Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, P. (2004) Metodología de la Investigación. México: McGraw-Hill Interamericana.
- Houdement, C. (2008). Experimentación y prueba: Dos Dimensiones de las Matemáticas desde la Escuela Primaria. *Paradigma*, 29(2), 173-185.
- Kuzniak, A., & Richard, P. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17 (4), 5-39.
- Ley N°20.370. Diario Oficial de la República de Chile, Santiago, Chile, 12 de septiembre de 2009.
- López, N. (2014). *Mercado o Garantía de Derechos: Modelos en debate para la educación escolar en Chile*. Recuperado de <http://unicef.cl/web/mercado-o-garantia-de-derechos-modelos-en-debate-para-la-educacion-escolar-en-chile/#more-17968>

Ministerio de Educación. (2013) Estándares de Aprendizaje. Recuperado de [http://ww2.educarchile.cl/UserFiles/P0001/File/CR\\_Articulos/Especial\\_Curriculum\\_2013/nuevos\\_%20estandares\\_aprendizaje.pdf](http://ww2.educarchile.cl/UserFiles/P0001/File/CR_Articulos/Especial_Curriculum_2013/nuevos_%20estandares_aprendizaje.pdf)

Ministerio de Educación. (2013) Estándares de aprendizaje Matemáticas Cuarto Básico. Santiago, Chile.

Ministerio de Educación. (2017) Estándares de aprendizaje Matemáticas Sexto Básico. Santiago, Chile.

Ministerio de Educación (2018). Cuaderno de ejercicios. Santiago, Chile: Santillana.

Ministerio de Educación. (2018). Cuaderno de ejercicios. Santiago, Chile: SM.

Ministerio de Educación. (2018). Texto de estudiante. Santiago, Chile: SM.

Ministerio de Educación (2018). Texto del estudiante. Santiago, Chile: Santillana.

Ministerio de Educación. (s/f). *Textos Escolares*. Chile: Gobierno de Chile. Recuperado de [http://www.textosescolares.cl/index2.php?id\\_portal=65&id\\_seccion=3749&id\\_contenido=15679](http://www.textosescolares.cl/index2.php?id_portal=65&id_seccion=3749&id_contenido=15679)

Ministerio de Educación. (s.f.). *Textos Escolares*. Santiago. Recuperado de [http://www.textosescolares.cl/index2.php?id\\_portal=65&id\\_seccion=3749&id\\_contenido=15679](http://www.textosescolares.cl/index2.php?id_portal=65&id_seccion=3749&id_contenido=15679)

OCDE & Agencia de la Calidad de la educación. (2015). Pisa 2015, Programa para la evaluación internacional de estudiantes OCDE. Recuperado de [http://archivos.agenciaeducacion.cl/Resultados\\_PISA2015.pdf](http://archivos.agenciaeducacion.cl/Resultados_PISA2015.pdf)

Organización de las Naciones Unidas. (1948). *Declaración Universal de los Derechos Humanos*, United Nations. Recuperada de <http://ww2.educarchile.cl/UserFiles/P0001/File/derechos%20humanos%201948.pdf>

Organización de las Naciones Unidas. (2000). Marco de acción de Dakar Educación para Todos: cumplir nuestros compromisos. Dakar, Senegal. Recuperada de <http://unesdoc.unesco.org/images/0012/001211/121147s.pdf>

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura. (2011). *La UNESCO y la educación "Toda persona tiene derecho a la educación"*. Recuperado de <http://unesdoc.unesco.org/images/0021/002127/212715s.pdf>

Pizarro, A (2018). El trabajo geométrico en clases de séptimo básico en Chile: un estudio de casos sobre la enseñanza de los triángulos. Tesis Doctoral. Université Denis Diderst. Francia.

Price, J.H. y Murnan, J. (2004). Research Limitations and the Necessity of Reporting Them. *American Journal of Health Education*, 35, 66-67. Recuperado de <https://comunicarautores.com/2017/04/07/importancia-de-expresar-las-limitaciones-del-estudio-2-principales-tipos-de-limitaciones/>

Real Academia Española. (2001). *Diccionario de la lengua española* (22.aed.). Consultado en <http://dle.rae.es/?id=ObS8ajk>

Real Academia Española. (2001). *Diccionario de la lengua española* (22.aed.). Consultado en <http://dle.rae.es/?id=ZC79NI2>

Robledo, C. (2003). Recolección de datos. En Técnicas y proceso de investigación (pp 63-73). Guatemala: Universidad San Carlos de Guatemala: Litografía Mercagraf

Unidad de Currículum y Evaluación del Ministerio de Educación. (2018). *Minuta de Textos Escolares*.

Vasilachis de Gialdino I.. (2009). Los fundamentos ontológicos y epistemológicos de la investigación cualitativa. *FORUM: Qualitative social research sozialsforschung*, 10 (2) Art.30, disponible vía web en <http://www.qualitative-research.net/index.php/fqs/article/view/1299/2778>