Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas

EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR COMO VARIABLE EXPLICATIVA DEL APRENDIZAJE DEL ALUMNO EN LA CONCEPTUALIZACIÓN DE LAS FRACCIONES

Tesis para optar al Grado de
Doctor en Didáctica de la Matemática

Palmenia Rodríguez Rojas

Tesis dirigida por
Dr. Raimundo Olfos Ayarza

Valparaíso – CHILE
2019

EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR COMO VARIABLE EXPLICATIVA DEL APRENDIZAJE DEL ALUMNO EN LA CONCEPTUALIZACIÓN DE LAS FRACCIONES

de

Palmenia de la Cruz Rodríguez Rojas

TESIS DOCTORAL

presentada a la

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE VALPARAÍSO

Defendida públicamente el 25 de marzo de 2019 ante la Comisión de Tesis integrada
por:

Dra. Diana Zakaryan, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Profesor interno

Dr. Pablo Cáceres, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Profesor interno

Dr. Raimundo Olfos, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Director de tesis

Dra. Maria Leonor Varas, Universidad de Chile, Profesor externo

Año 2019
CHILE

El trabajo de tesis doctoral se realizó en el Instituto de Matemáticas, de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, en la línea de investigación Formación de Profesores de Matemáticas y fue financiado parcialmente por la Dirección de Investigación de la Universidad de La Serena en el marco del proyecto DIULS INICIACIÓN PI14151, titulado "La comprensión profunda del profesor y su incidencia en la conceptualización del alumno en torno a las fracciones en 4° básico". La autora fue becaria del Programa BECAS CHILE de la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (CONICYT) del Gobierno de Chile.

Tabla de contenido

Listado de siglas

PCK – Conocimiento pedagógico del contenido (*Pedagogical Content Knowledge*)

CK – Conocimiento del contenido (*Content Knowledge*)

KQ – Cuarteto de conocimiento (*The Knowledge Quartet*)

MKT – Conocimiento matemático para la enseñanza (*Mathematical Knowledge for Teaching*)

CCK – Conocimiento común del contenido (*Common Content Knowledge*)

SCK – Conocimiento especializado del contenido (*Specialized Content Knowledge*)

KCS – Conocimiento del contenido y los estudiantes (*Knowledge of Content and Students*)

KCT – Conocimiento del contenido y de la enseñanza (*Knowledge of Content and teaching*)

MTSK – Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (*Mathematics Teacher's Specialized Knowledge*)

Índice de figuras

Índice de tablas

Presentación

En el informe de la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la ciencia y la Cultura UNESCO (2012) se señala que el objetivo prioritario de enseñar matemáticas en educación básica es la alfabetización matemática para todos los jóvenes. Una vez impartida la aritmética su aprendizaje debiese permitir las competencias matemáticas necesarias para la participación integral en la sociedad, y de esta forma preparar a los jóvenes para encontrar su lugar en el mundo, para hacer frente a los grandes desafíos que enfrenta la humanidad. No obstante, este objetivo está lejos de ser una realidad y constituye el principal desafío para la educación matemática básica.

En el informe también se declara que los profesores son la clave para el desarrollo sostenible de los sistemas educativos y en la actualidad constituyen el principal desafío para una educación matemática de calidad para todos (UNESCO, 2012, p. 25). En concordancia con esta declaración, el Informe del Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (PISA) señala que los países con economías desarrolladas dan prioridad a la formación de los profesores y suelen tener mejores resultados. Algunos países que han mejorado su rendimiento en PISA, como por ejemplo Brasil, Colombia, Estonia, Israel, Japón y Polonia, han elaborado políticas para mejorar la calidad de sus profesores (OCDE, 2014). Las medidas tomadas por estos países consisten en añadir requisitos para la obtención del título de profesor, ofrecer incentivos para que estudiantes con alto rendimiento entren en la profesión, aumentar los salarios para atraer a mejores candidatos, proporcionar incentivos para que los profesores participen en programas de formación continua.

Particularmente en Chile, los bajos resultados del estudio comparativo internacional TEDS-M, muestran debilidades en la preparación de los docentes para enseñar matemáticas y fundamentan una política de evaluación para profesores, a modo de habilitación profesional (Varas, Lacourly, López y Giaconi, 2013). En este contexto resulta relevante tener un buen sistema de medición para la evaluación de los profesores. A nivel mundial son pocas las investigaciones que se centran en medir el conocimiento para la enseñanza de la matemática y que lo relacionan con el aprendizaje de los estudiantes. Teniendo presente la importancia de la matemática en la educación de los niños y la relevancia del conocimiento del profesor en esa tarea, la autora de la presente investigación construye instrumentos válidos y confiables que miden dos tipos de conocimientos del profesor acerca de las fracciones (Rodríguez, 2012; Rodríguez y Olfos, 2018; Olfos, Goldrine y Estrella, 2014) con el propósito de explorar si esos dos tipos de conocimientos se constituyen en una variable explicativa del aprendizaje del alumno en la conceptualización de las fracciones.

Resumen de la tesis

El propósito del presente trabajo de tesis consistió en explorar el conocimiento del profesor como variable explicativa del aprendizaje del alumno, centrándose en el tema de las fracciones. El estudio se enfocó en dos tipos de conocimientos del profesor: “conocimiento profundo” y “conocimiento sobre la enseñanza”. La pregunta que guía esta investigación es: ¿en qué medida influye el conocimiento del profesor en el aprendizaje de las fracciones en alumnos de cuarto grado, de establecimientos educacionales de las ciudades de La Serena y Coquimbo? A nivel nacional e internacional son pocos los estudios que han explorado el efecto del conocimiento del profesor sobre el aprendizaje de los alumnos. En la literatura no se reportan investigaciones, centrada en las fracciones, que determinen en qué medida el conocimiento del profesor se constituye en variable explicativa del aprendizaje de los alumnos.

El trabajo de tesis se organizó en cuatro capítulos. El capítulo 1 presenta la problemática a investigar en didáctica de la matemática, primero se muestran los bajos resultados obtenidos por estudiantes chilenos en las pruebas de matemáticas TIMSS y PISA; y los bajos resultados de profesores tanto en pruebas nacionales INICIA[1] como en pruebas internacionales TEDS-M, las cuales revelan que en Chile la formación inicial docente requiere mejoras para alcanzar estándares de calidad (MINEDUC, 2015). Posteriormente, se muestran estudios relacionados

[1] Prueba INICIA: Evaluación diagnóstica que mide conocimientos pedagógicos y disciplinarios alcanzados por estudiantes egresados de carreras de pedagogía, con el propósito de entregar información acerca de la calidad de la formación inicial recibida y provista por las instituciones formadoras (Mineduc, 2017).

con las dificultades que presentan estudiantes de primaria, estudiantes para profesor y profesores en servicio, sobre la conceptualización de las fracciones. Estudios previos sugieren que el aprendizaje de las fracciones por parte de los alumnos, puede estar limitado por la comprensión de las fracciones por parte del profesor (Ma, 2010; Newton, 2008). En consecuencia resulta pertinente estudiar el efecto del conocimiento del profesor sobre el aprendizaje del alumno, en fracciones.

El capítulo 2 presenta el marco teórico de la investigación, partiendo con los trabajos preliminares de Shulman (1986; 1987) y continuando con los avances realizados por investigadores en la identificación de conocimientos requeridos para enseñar matemática. En particular, en este trabajo de tesis se toma como sustento el modelo MKT de Ball et al. (2008) y Hill et al. (2008). Luego, en base a la revisión de literatura especializada, se plantean los constructos: conocimiento profundo de las fracciones (Gallardo et al., 2008; Ma, 2010; Tchoshanov, 2011; Tchoshanov et al., 2017) y conocimiento sobre la enseñanza de las fracciones (Hill et al., 2008; Olfos et al., 2014). Posteriormente se presentan estudios acerca del efecto del conocimiento del profesor sobre el rendimiento de los estudiantes, tanto en países desarrollados como en países en desarrollo (Baumert et al., 2010; Carnoy y Arends, 2012; Cueto et al., 2017; Marshall et al., 2009; Marshall y Sorto, 2012; Metzler y Woessman, 2012; Tchoshanov, 2011; Tchoshanov et al., 2017). Finaliza el capítulo presentando el marco conceptual de la investigación: conocimiento profundo y conocimiento sobre la enseñanza.

El capítulo 3 presenta cuatro estudios sobre las fracciones. El primer estudio tuvo por objetivo elaborar dos instrumentos con validez y confiabilidad aceptable, uno sobre el conocimiento profundo del profesor acerca de las fracciones y otro sobre el saber del profesor acerca del conocimiento que el alumno pone en juego al conceptualizar las fracciones en 4° grado. Este último instrumento no abarcó en su totalidad el conocimiento sobre la enseñanza, mencionado en el capítulo 2. Los instrumentos fueron aplicados en dos oportunidades a grupos de 30 profesores de primaria y una vez a 20 estudiantes de la carrera de Pedagogía en Matemáticas. Finalmente se obtuvieron dos instrumentos, de 12 y 10 preguntas, con una consistencia interna de 0.74 y 0.75 alfa de Cronbach (Rodríguez y Olfos, 2018). Posteriormente, se elabora un instrumento con validez y confiabilidad aceptable (alfa de Cronbach 0.77) para medir el conocimiento de los alumnos en fracciones enmarcado en el currículo de 4° básico (Rodríguez y Navarrete, 2020). Luego se administran los respectivos instrumentos tanto para los alumnos como para sus profesores.

En el segundo estudio, se aplicó pretest y postest a los alumnos, utilizando el postest como variable dependiente. Los datos se analizan utilizando modelos multinivel, se obtuvo información de 328 alumnos de 4º grado de 9 escuelas y de sus respectivos profesores de matemáticas. Los resultados muestran que el conocimiento del profesor, solo o en combinación con otros factores, explica alrededor del 10% de la variabilidad en el postest de los alumnos, con una significación del 10%. Considerando que en este estudio, el conocimiento del profesor no alcanzó una significación estadística al 5%, se optó por una estrategia que es coincidente con la utilizada en otros estudios (postest - pretest) como variable dependiente (Mullens et al., 1996), la principal ventaja de utilizar puntuaciones de avance es que son estimaciones más justas del crecimiento académico de los alumnos. Con este nuevo diseño y una ampliación de la muestra, la autora realiza el tercer estudio.

En el tercer estudio, los datos son analizados utilizando modelos multinivel, se obtuvo información de 714 alumnos de 4º grado de 23 escuelas y de sus respectivos profesores de matemáticas. Los resultados muestran que el conocimiento del profesor, solo o en combinación con otros factores, explica alrededor del 6% de la variabilidad total del avance de los alumnos, con una significación al 5%. En el cuarto estudio se utilizó otra técnica estadística que es más sensible a muestras pequeñas.

En el cuarto estudio los datos son analizados mediante la técnica de análisis de regresión múltiple, se obtuvo información de 378 alumnos de 4º grado de 9 escuelas y de sus respectivos profesores de matemáticas. Los resultados de los análisis de regresión muestran que el efecto del conocimiento profundo del profesor es significativo en el aprendizaje por alumno ($p = 0.001$), más allá de lo explicado por el puntaje SIMCE del colegio, que también es significativo ($p = 0.02$). El efecto de la dimensión Conocimiento sobre la Enseñanza no alcanza significación estadística al 5% al ser ajustada por SIMCE, el mejor ajuste.

El hallazgo más relevante fue que el efecto del conocimiento profundo del profesor es significativo en el avance de aprendizaje por alumno ($p = 0.001$). Este hallazgo indica que cuanto mayor sea el conocimiento profundo del profesor en fracciones, estos son más propensos a tener una enseñanza eficaz. Por lo tanto, el conocimiento profundo del profesor tiene potencial para llegar a ser parte de un modelo multifactorial que se considere un buen predictor del aprendizaje de los alumnos.

El capitulo 4 presenta discusiones y perspectivas del trabajo de tesis. Primero se muestra un resumen sobre el tema del conocimiento del profesor como factor explicativo sobre el aprendizaje del alumno. Posteriormente se presenta una discusión de los hallazgos en relación a la literatura acerca del efecto del conocimiento del profesor sobre el aprendizaje del alumno. Finalmente se presentan aportes y perspectivas futuras de la investigación, y las referencias y anexos.

Capítulo 1

Planteamiento de la investigación

Índice del capítulo

Planteamiento de la investigación

Los bajos niveles de logros alcanzados por estudiantes chilenos en las pruebas de matemáticas TIMSS y PISA, constituyen un desafío para que los investigadores logren esclarecer qué factores o variables pueden explicar estos resultados. La literatura muestra que una de esas variables es el conocimiento de los profesores. En la actualidad, existe gran cantidad de investigaciones que han puesto de manifiesto la importancia del conocimiento de los profesores, en relación con los resultados de aprendizaje de los alumnos. No obstante, falta evidencia científica que vincule la presencia de conocimientos del profesor, necesarios para la enseñanza, con el avance o los logros de aprendizaje del alumno. Desde esta perspectiva, la presente investigación busca aportar con evidencia empírica para sustentar en qué medida el conocimiento del profesor contribuye al avance de aprendizaje de los estudiantes en matemáticas, específicamente en la conceptualización de las fracciones. El estudio se enfoca en dos tipos de conocimientos del profesor sobre las fracciones para la enseñanza, uno es el "conocimiento profundo de las fracciones" y el otro es el "conocimiento sobre la enseñanza de las fracciones" (Rodríguez, 2012; Rodríguez y Olfos, 2018).

En este capítulo se presentan estudios relacionados con las dificultades que presentan estudiantes de primaria, estudiantes para profesor y profesores en servicio sobre la conceptualización de las fracciones. La búsqueda bibliográfica se realizó en las bases de datos Scopus, ScienceDirect y WoS, recurriendo a los descriptores en inglés combinados: fracciones (fractions), estudiantes (students), dificultades (difficulties), profesor (teacher), entre otros. Las búsquedas dieron más de un centenar de trabajos, de los cuales se eligieron 12 trabajos por su pertinencia.

1.1 ÁREA PROBLEMÁTICA: EL RENDIMIENTO DEL ESTUDIANTE Y DEL PROFESOR EN FRACCIONES

La formación inicial del profesorado es uno de los factores que influye en la calidad de su enseñanza y que afecta en los resultados de los estudiantes. Sanz y Martín (2014) señalan que los bajos resultados del conocimiento en matemáticas de los alumnos de educación primaria y secundaria, pueden deberse a que el conocimiento del contenido y de la pedagogía alcanzado por el profesorado no es el más adecuado para enseñar matemáticas.

Baumert et al. (2010) señalan que tanto en Estados Unidos como en Europa, se han planteado interrogantes respecto de si la formación de profesores en pregrado y continua tiene éxito en proveer el conocimiento profesional necesario para realizar una enseñanza de alta calidad. Particularmente en Chile, los bajos resultados tanto en la evaluaciones internacionales TEDS-M como en las pruebas nacionales Inicia, las cuales miden conocimientos disciplinarios y pedagógicos a profesores nóveles, indican que la formación inicial docente requiere mejoras para alcanzar estándares de calidad (Avalos y Matus, 2010; MINEDUC, 2015).

Varias investigaciones aluden a la importancia de la calidad del profesor en relación con los resultados de aprendizaje de los alumnos (Bruns y Luque, 2014; Eurydice, 2013; McKinsey y Company, 2007; Mourshed, Chijioke y Barber, 2012; OECD, 2009). Sin embargo, en la línea de investigación de formación de profesores, actualmente se mantiene en discusión la caracterización del conocimiento profesional para la enseñanza de la matemática, y se hace necesario estimar si este conocimiento influye en el avance o logros de aprendizaje de los alumnos. Si bien se reconoce la relevancia de los profesores respecto de los resultados de aprendizaje, no existe consenso respecto a qué se entiende por calidad de los profesores. El concepto de calidad es controvertido y polisémico, a menudo se relaciona con conceptos como eficacia o eficiencia. Respecto a estos últimos, la eficacia mide el grado de cumplimiento de los objetivos deseados, mientras que la eficiencia se refiere a la maximización de los resultados en relación a los recursos invertidos (Cantón, 2004).

Con respecto a la calidad, Barber y Mourshed (2008) en base a lo que reporta el informe McKinsey y Company, detallan varios puntos como impulsores de una educación de buena calidad tales como: perfeccionar la selección de los profesores pre y post estudios de pedagogía y elevar el estatus del profesor mediante un mejor salario inicial. Además de mejorar la instrucción del profesor no sólo en sus primeros años de estudio, sino también con perfeccionamiento continuo.

Barber y Mourshed (2008) añaden que un profesor eficiente deberá poseer cierto conjunto de características susceptibles de identificación antes de ejercer la profesión, tales como: un alto nivel general de lengua y aritmética, fuertes capacidades interpersonales y de comunicación, el deseo de aprender y motivación para enseñar.

En el informe OCDE (2009) se señala que “los docentes eficientes poseen una gran capacidad intelectual, son estructurados, cultos, y pueden pensar, comunicarse y planificar de manera sistemática” (p. 108). Existe consenso en que varios aspectos importantes de la calidad del docente no solo pueden ser reflejados por indicadores como las calificaciones, la experiencia y las pruebas de habilidad académica, esto explica sólo una parte del por qué algunos profesores parecen ser más eficaces que otros. La presente investigación se plantea como hipótesis que la calidad del profesor asociada a dos tipos de conocimientos relativos a la conceptualización de las fracciones, influye en el avance de aprendizaje de sus estudiantes, es decir, un profesor es más eficiente en la medida en que logra que sus alumnos avancen en el aprendizaje de las fracciones.

1.1.1 Rendimiento de estudiantes chilenos en pruebas internacionales

Las pruebas TIMSS (Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias) evalúan los aprendizajes en Matemáticas y Ciencias que los países participantes esperan que sus estudiantes alcancen en educación básica. Además el estudio TIMSS analiza información sobre directores, docentes y estudiantes por medio de cuestionarios, lo que permite contextualizar los resultados de aprendizaje de los estudiantes. Este estudio se realiza cada cuatro años y constituye una oportunidad para que cada país evalúe el aprendizaje de sus estudiantes comparados con estándares internacionales.

Chile participa en la medición TIMSS de 8°básico desde el año 1999. El año 2007 Chile no participó. En la Figura 1, se observa que los puntajes de los estudiantes chilenos entre 1999 y 2015 aumentaron 35 puntos confirmando una tendencia al alza en los últimos 16 años. Chile mejora en matemáticas, pero aún está por debajo del promedio internacional de la escala TIMSS (500 puntos).

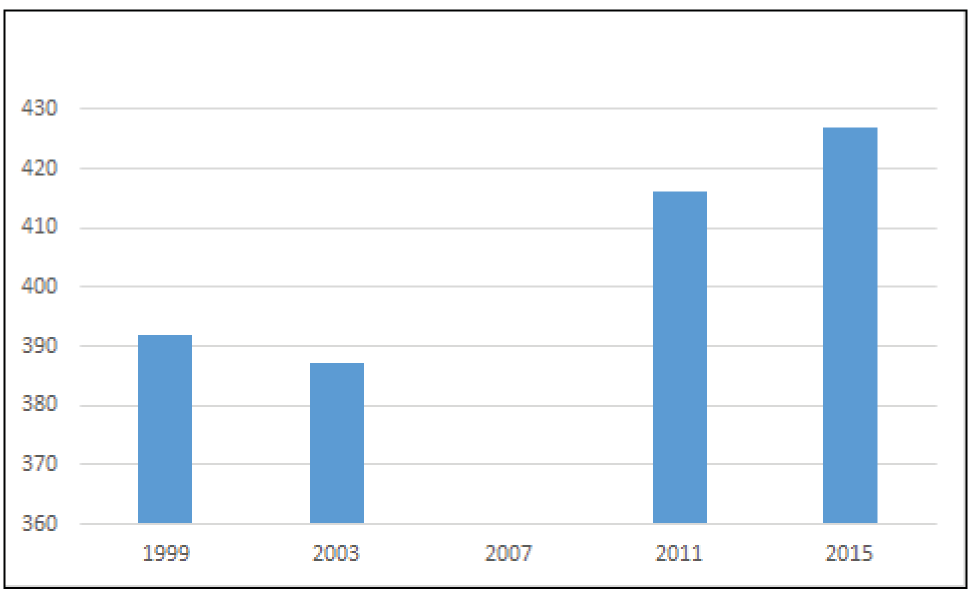


Figura 1. Tendencia de Resultados TIMSS en Matemáticas 8°básico (1999 a 2015)

El año 2011 Chile se suma a la medición TIMSS de 4º básico obteniendo como resultado 462 puntos (Figura 2) y el año 2015 obtiene como resultado 459 puntos (figura 3), los resultados del país se mantienen estable ubicándose bajo el promedio internacional (500 puntos y 525 puntos respectivamente).

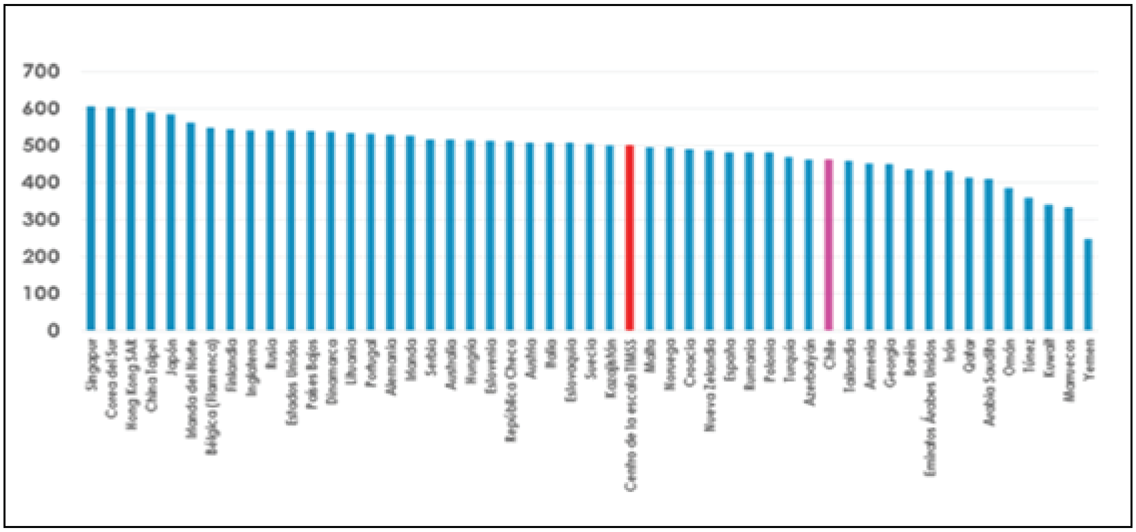


Figura 2. Resultados Matemáticas 4° básico TIMSS (2011)

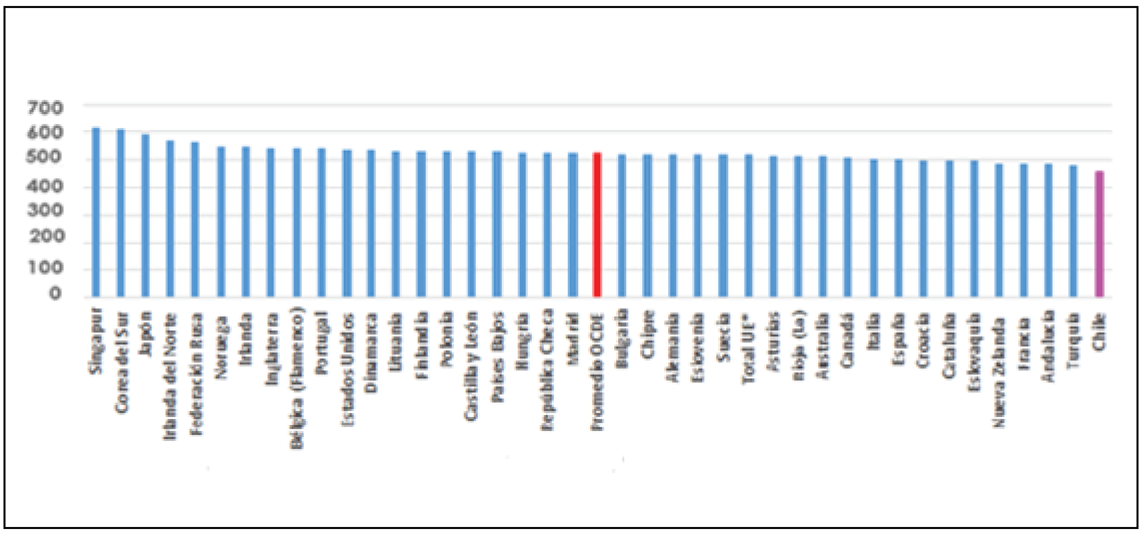


Figura 3. Resultados Matemáticas 4° básico TIMSS (2015)

Un estudio similar a TIMSS es el de PISA que evalúa cada tres años las competencias de estudiantes de 15 años, en Lectura, Ciencias Naturales y Matemáticas. Los datos de PISA permiten a cada país participante evaluar los resultados de su sistema educativo, conocer la tendencia de los puntajes promedios en matemáticas a lo largo del tiempo e identificar sus fortalezas y debilidades, con el objetivo de orientar las políticas públicas en el ámbito de la educación.

En la Figura 4, se muestra la tendencia del puntaje promedio en matemáticas en PISA entre los años 2006 y 2015. Se observa que los puntajes de los estudiantes chilenos entre el 2006 y el 2012 presentan un leve aumento, sin conseguir ser estadísticamente significativo. El año 2012 y 2015 el puntaje es el mismo.

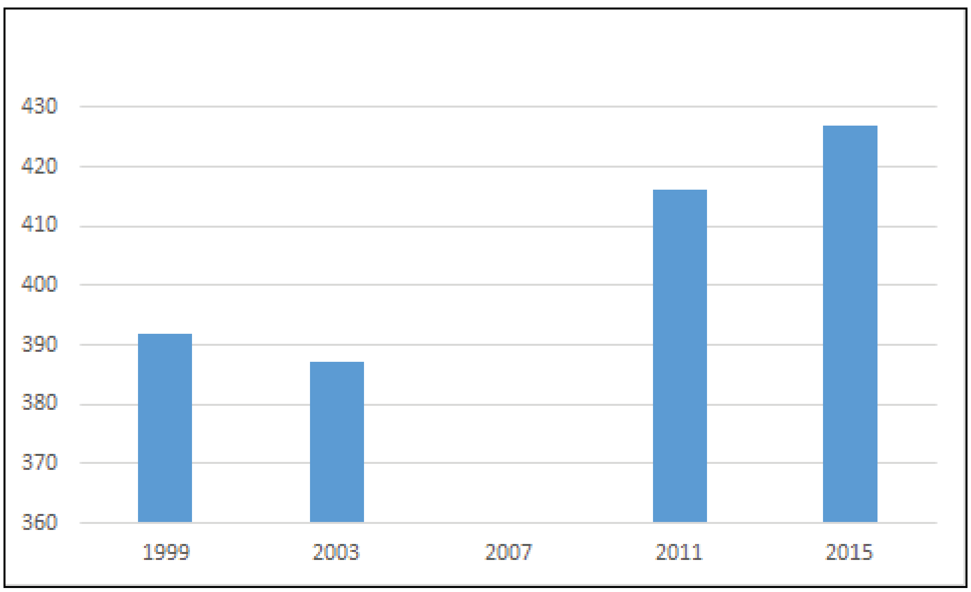


Figura 4. Tendencia de los resultados en Matemáticas PISA (2006 a 2015)

A nivel internacional, de los 64 países participantes en PISA (OCDE, 2012) los resultados muestran que de aproximadamente 28 millones de estudiantes que participan, 11.5 millones tuvieron un rendimiento bajo en matemáticas. En particular, Chile se consolida como el sistema educativo con mejores resultados en PISA (OCDE, 2016) en Latinoamérica, sin embargo, su puntaje en matemáticas continúa por debajo del promedio internacional. La constatación de estos bajos resultados a nivel internacional constituye la base que podría sustentar la relevancia del estudio del conocimiento del profesor como factor explicativo del aprendizaje del alumno.

A la luz de la creciente importancia de los estudios TIMSS o PISA el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas y su influencia en el aprendizaje de los estudiantes es de especial interés para los investigadores. Los estudios internacionales reflejan fuertes diferencias en los logros matemáticos de los asiáticos y los occidentales. Estas diferencias pueden ser atribuidas al menos en parte por la influencia de los profesores (Kaiser, Blömeke, Busse, Döhrmann y König, 2014).

1.1.2 Rendimiento de profesores chilenos en pruebas nacionales e internacionales

En Chile la evaluación diagnóstica Inicia (MINEDUC, 2012) se aplica a profesores recién egresados y mide conocimientos disciplinarios y pedagógicos, dentro de un programa para mejorar la formación inicial de los profesores. Los resultados de la prueba Inicia permiten a las instituciones contar con un parámetro externo para diagnosticar y revisar sus avances, además de identificar las necesidades de reforzamiento para los egresados.

En el año 2008, la prueba Inicia se realiza por primera vez evaluando a profesores voluntarios egresados de pedagogía en Educación Básica en conocimientos disciplinarios y habilidades escritas. En el año 2009 y 2011 se amplió la evaluación para los egresados de Educación Parvularia y se incluye la prueba de conocimientos pedagógicos y TICS. El año 2012 no se evalúa TICS, y se incluye a los egresados de pedagogía en Educación Media, se evalúan conocimientos pedagógicos, habilidades escritas y conocimientos disciplinarios para los egresados de Lenguaje y Comunicación, Matemática, Historia Geografía y Ciencias Sociales, Biología, Física y Química.

La prueba nacional Inicia (MINEDUC, 2015) muestra resultados bajos, con una puntuación mejor en lo pedagógico en comparación al conocimiento disciplinario matemático. Esto coincide con los bajos resultados que obtuvo Chile en la prueba *Teacher Education Study in Mathematics* TEDS-M (Tatto, 2013).

TEDS-M es un estudio comparativo a nivel internacional a gran escala sobre educación superior, desarrollado por la Asociación Internacional para la Evaluación del Rendimiento Educativo (IEA) este estudio consiste en un examen de los procesos y resultados de la formación docente desde 1º a 8º. En este estudio participaron 17 países: Chile, China Taipéi, España, Filipinas, Georgia, Malasia, Noruega, Omán, Alemania, Botsuana, Canadá, Estados Unidos, Polonia, Rusia, Singapur, Suiza y Tailandia. El diseño del estudio TEDS-M contempló tres componentes, la primera a nivel nacional, estudia las políticas generales de formación del profesorado, el sistema educativo y los contextos sociales. La segunda componente se centra en las instituciones de formación de profesorado y la tercera en los resultados de la formación, estudia el conocimiento matemático y de didáctica de la matemática que los futuros profesores adquieren en su formación.

Siguiendo las ideas de Shulman (1987) en TEDS-M se considera que el conocimiento para la enseñanza de las matemáticas, tiene dos componentes: el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido. Así se elabora un cuestionario que abordó estos dos tipos de conocimientos por separado. Para evaluar el conocimiento matemático, TEDS-M se basó en el marco conceptual elaborado para TIMSS 2007, cuyo objetivo fue el conocimiento de los futuros profesores de primaria sobre las matemáticas escolares. En el caso de la evaluación del conocimiento didáctico TEDS-M organizó este conocimiento en tres subdominios, curricular, planificación de la enseñanza e implementación de la enseñanza (Gómez y Gutiérrez, 2014).

TEDS-M elaboró la mayoría de las preguntas que evaluaban el conocimiento didáctico del contenido matemático. El resto de preguntas provenían de otros estudios como Learning Mathematics for Teaching Projects y Mathematics Teaching for the 21st Century Project (Gómez y Gutiérrez, 2014).

En Chile el estudio TEDS-M se orientó de acuerdo a las políticas nacionales, las instituciones y sus programas. La población estudiada para nuestro país fue de 16 universidades pertenecientes al Consejo de Rectores de las Universidades Chilenas (CRUCH), 15 universidades privadas y 3 institutos profesionales (88% de las instituciones elegibles). Participaron 1.403 futuros profesores y 392 formadores de las instituciones participantes.

Los resultados del estudio TEDS-M muestran que respecto de oportunidad para aprender, la cobertura promedio respecto al marco de referencia internacional, no llega al 40% de los tópicos. Respecto del currículo de formación en conocimiento didáctico de las matemáticas es un 30% de los tópicos respecto al marco de referencia internacional y del currículo de formación pedagógica general es de un 60% respecto del marco de referencia internacional.

En síntesis, comparado con los parámetros del TEDS-M, los profesores chilenos no tuvieron la suficiente oportunidad curricular para aprender las matemáticas necesarias para enseñar de 1° a 8° año.

El TEDS-M aplicó una prueba a 654 profesores chilenos de primaria. Respecto al promedio internacional de 500 puntos, los futuros profesores lograron un puntaje de 413 puntos en conocimiento matemático, y de 425 puntos en conocimiento didáctico.

En Ávalos y Matus (2010) se indica que los contenidos matemáticos de TEDS-M cubren:

Números: se evalúa números naturales, fracciones y decimales, frases numéricas, patrones y relaciones, números enteros, razones, proporciones y porcentajes, números irracionales, teoría de números.

Geometría: se evaluó formas geométricas, mediciones geométricas, ubicación y movimiento. En álgebra se evaluó patrones, expresiones algebraicas, ecuaciones, fórmulas y funciones, cálculo y análisis, algebra lineal y abstracta. En Datos se evaluó organización y representación de datos, lectura e interpretación de datos.

En Avalos y Matus (2010) se indica que los contenidos didácticos o pedagógicos de las matemáticas de TEDS-M cubren:

Conocimiento curricular matemático se evaluó saber establecer metas apropiadas de aprendizaje, conocer distintos formatos de evaluación, seleccionar posibles trayectorias y visualizar conexiones dentro del currículo, identificar ideas clave en los programas de enseñanza y conocer el currículo de matemáticas.

Conocimiento acerca de la planificación para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se evaluó la planificación y selección de actividades apropiadas, seleccionar formatos de evaluación, predecir respuestas típicas de los alumnos, incluyendo sus concepciones equivocadas, vincular los métodos didácticos con los diseños de instrucción, identificar distintos enfoques para solucionar problemas matemáticos, planificar clases de matemáticas.

Puesta en acción de las matemáticas en contextos de enseñanza y aprendizaje se evaluó analizar o evaluar las soluciones o argumentos matemáticos de los alumnos, analizar el contenido de las preguntas de los alumnos, diagnosticar respuestas típicas de los alumnos que incluyan concepciones equivocadas, explicar o representar conceptos o procedimientos matemáticos, generar preguntas potencialmente fecundas, resolver problemas matemáticos inesperados y proporcionar retroalimentación adecuada.

Los datos del estudio TEDS-M revelan que Chile no está preparando a sus futuros profesores de educación básica para enseñar matemáticas respecto de los estándares derivados de la prueba TEDS-M a 17 países del mundo. ¿Por qué estos bajos resultados en el área del conocimiento matemático?, algunos factores que pueden explicar esos resultados son la insuficiencia de conocimientos matemáticos adquiridos en la enseñanza media y la falta de oportunidad para mejorar esta base de conocimientos mediante el currículo de las instituciones formadoras (Ávalos y Matus, 2010)

Ávalos y Matus (2010) recomiendan establecer condiciones más rigurosas de ingreso a la carrera de pedagogía en términos de conocimiento anterior, y oportunidades curriculares que fortalezcan los conocimientos esenciales para poder enseñar el currículo de educación básica. Es necesario una profunda revisión de la oferta curricular en las instituciones formadoras.

1.1.3 Antecedentes sobre la conceptualización de las fracciones

Las fracciones son conocidas por ser difíciles de aprender. Estudiantes de todo el mundo tienen dificultades para aprender las fracciones, aún en países donde la mayoría de los estudiantes obtienen una comprensión razonablemente buena de estas, como Japón o China (Fazio y Siegler, 2011; Lortie-Forgues, Tian y Siegler, 2015; Tian y Siegler, 2017). Se han propuesto varias hipótesis para explicar por qué las fracciones son difíciles de aprender, por ejemplo, para comprender las fracciones el sujeto requiere de una reorganización conceptual respecto de los números naturales; además las fracciones pueden denotar conceptos diferentes; y usar fracciones implica la articulación del conocimiento conceptual con la manipulación de procedimientos (Gabriel et al., 2013).

Según la teoría del desarrollo numérico (Siegler, Thompson y Schneider, 2011), los niños que aún no han aprendido fracciones, generalmente creen que las propiedades de los números enteros son las mismas para todos los números. Desde el punto de vista matemático, existen diferencias fundamentales entre los naturales y las fracciones, muchas de las propiedades que son ciertas para los números naturales no son ciertas para las fracciones. Por ejemplo, con fracciones, las multiplicaciones no siempre conducen a una respuesta mayor que los multiplicandos; la división no siempre lleva a una respuesta menor que el dividendo y las fracciones no tienen sucesores únicos (Fazio y Siegler, 2011). Los números racionales son un conjunto densamente ordenado, mientras que los números enteros forman un conjunto discreto, es decir, entre dos números racionales hay una infinidad de otros números racionales, mientras que entre dos números enteros consecutivos, no hay otro número entero.

Otra dificultad inherente a la comprensión de las fracciones, es que estas se asocian a diversas situaciones y toman distintos significados, tales como: parte-todo, cociente, medida, razón y operador, lo que las ubica en un contexto de aprendizaje complejo que conlleva altas exigencias cognitivas para su conceptualización (Gallardo, González y Quispe, 2008). Sin embargo, a pesar de que las fracciones están asociadas a distintos significados, la mayoría de los estudiantes las ven como parte todo y de esta forma ellos tratan numerador y denominador como entidades separadas. Más adelante, esta idea se transforma en un obstáculo para el aprendizaje de la comparación de fracciones, la equivalencia de fracciones, la medida y otras ideas importantes que determinan el sentido numérico (Butto, 2013; Escolano y Gairín, 2005). En consecuencia, aparecen errores típicos como por ejemplo, en la comparación de fracciones ($1/5 > 1/3$) o en tareas de suma o resta ($1/4 + 1/3 = 2/7$).

Aunque durante las últimas cuatro décadas se han identificado varios factores que contribuyen a la comprensión de por qué las fracciones son difíciles de aprender, la mayoría de los investigadores coinciden en que uno de los factores preponderantes, corresponde al hecho de que las fracciones no comprenden un solo constructo sino varios subconstructos (Behr, Harel, Post y Lesh, 1993; Behr, Lesh, Post y Silver, 1983; Charalambous y Pitta-Pantazi, 2007; Escolano y Gairín, 2005; Gallardo et al., 2008; Kieren, 1976, 1993).

Kieren (1976) fue el primero en separar el concepto de fracción en cuatro subconstructos: razón; operador; cociente; y medida. De acuerdo con Kieren (1976), la noción parte todo está implicada en estas cuatro categorías, por esa razón no la describió como una quinta categoría. Una explicación de los subconstructos propuestos por Kieren es entregada por Gabriel et al. (2013), quienes señalan que:

El subconstructo razón expresa la noción de una comparación entre dos cantidades, por ejemplo, cuando hay tres niños por cada cuatro niñas en un grupo, en este caso, la relación de niños a niñas es de 3:4; los niños representan 3/7 del grupo y las niñas 4/7 del grupo.

El subconstructo operador considera fracción como una función que puede ampliar o reducir una cantidad y transformarla en un nuevo valor. Por ejemplo, para encontrar 3/4 de un número, dicho número se multiplica por 3 y luego se divide por 4, o bien el número se divide por 4 y luego se multiplica por 3.

El subconstructo cociente se refiere al resultado de una división, por ejemplo la fracción 3/4 puede considerarse como un cociente.

En el caso del subconstructo medida (conmensurable), las fracciones se asocian con dos nociones relacionadas entre sí. En primer lugar, ellas se consideran números que indican cuán grandes son las fracciones. Por ejemplo, indicar si 1/3 es es mayor o menor que 1/4. En segundo lugar, se asocian con las medidas de un intervalo. Por ejemplo, ubicar fracciones en la recta numérica.

Kieren (1976) sostiene que para comprender las fracciones se requiere, no solo la comprensión de cada uno de estos subconstructos por separado, sino también saber cómo se interrelacionan. Behr et al. (1983) ajustaron las ideas de Kieren (1976), redefiniendo algunos de los subconstructos y una subdivisión de otros. El esquema incluye los siguientes siete subconstructos:

El subconstructo medida del número racional, representa una reconceptualización de la noción parte-todo de fracción. Aborda la pregunta ¿cuánto hay de una cantidad relativa a una unidad especificada de esa cantidad?

El subconstructo razón del número racional, expresa una relación entre dos cantidades, por ejemplo, una relación entre el número de niños y niñas en una habitación. El total de niños es ¾ del total de niños b, A es ¾ de B

El subconstructo de velocidad del número racional, define una nueva cantidad como una relación entre otras dos cantidades. Por ejemplo, la rapidez se define como una relación entre distancia y tiempo.

El subconstructo cociente del número racional, interpreta un número racional como un cociente indicado. Es decir, a/b se interpreta como “a” dividido por “b”. En el contexto curricular, este subconstructo se ejemplifica con la siguiente situación problemática: Hay 4 galletas y 3 niños. Si las galletas se reparten equitativamente entre los tres niños, ¿cuánta galleta recibe cada niño?

El subconstructo de coordenada lineal del número racional es similar a la noción de Kieren respecto de la interpretación de la medida. Kieren hace hincapié en las propiedades asociadas con la topología métrica de la recta numérica racional. Los números racionales se interpretan como puntos en una recta numérica, enfatizando que son un subconjunto de los números reales.

El subconstructo decimal del número racional, enfatiza propiedades asociadas con el sistema de numeración de base diez.

El subconstructo operador del número racional, impone al número racional un concepto de función; un número racional es un transformador.

En la década de los 80, Behr et al. (1983) señalan que las preguntas con respecto a cuáles de estos subconstructos podrían servir para desarrollar en los niños el concepto de fracción, siguen sin respuesta. Sin embargo para Behr y sus colaboradores, parece plausible que el subconstructo parte-todo, basado tanto en cantidades continuas como discretas, represente una construcción fundamental para el desarrollo del concepto de número racional, además, es un punto de partida para la instrucción que involucra a otros subconstructos.

Behr et al. (1983) propusieron un modelo teórico que vincula los diferentes subconstructos y recomiendan considerar parte todo, como una categoría adicional. Ellos también conectan parte todo, al proceso de partición. En la figura 5 se muestra el modelo de Behr et al. (1983), las flechas sólidas sugieren relaciones establecidas y las flechas discontinuas sugieren relaciones hipotéticas entre los constructos. El diagrama sugiere que el proceso de particionamiento y el subconstructo parte todo son fundamentales para aprender los otros subconstructos de los números racionales; el subconstructo razón es más "natural" para promover el concepto de equivalencia; el subconstructo operador se considera útil para desarrollar la comprensión de operaciones multiplicativas en fracciones; el subconstructo medida es considerado necesario para desarrollar competencia en operaciones aditivas en fracciones. Finalmente, entender los cinco subconstructos se considera un requisito previo para resolver problemas en el dominio de las fracciones.

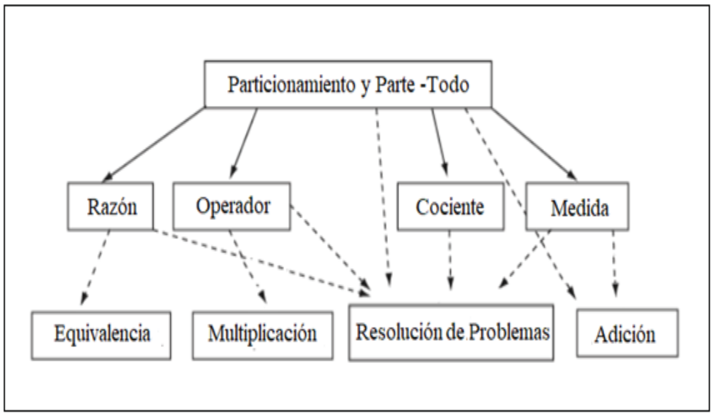


Figura 5. Esquema conceptual para la instrucción sobre números racionales (Behr et al., 1983).

A partir de los trabajos de Kieren (1976) y Behr et al. (1983) se han propuesto otros modelos similares para describir los múltiples subconstructos de las fracciones (Gabriel et al., 2013). El modelo de Behr et al. (1983) ha sido citado con frecuencia por varios investigadores e informado para el desarrollo del currículo en matemáticas (Charalambous y Pitta-Pantazi, 2007).

1.1.3.1 Dificultades de los estudiantes en la conceptualización de las fracciones

Como se ha mencionado en la sección 1.1.3., varios investigadores han sugerido que uno de los principales factores que contribuye a explicar las dificultades en el aprendizaje de las fracciones, radica en la multidimensionalidad del concepto de fracción. Los investigadores coinciden en considerar cinco subconstructos interrelacionados: parte-todo, razón, operador, cociente, y medida (Charalambous y Pitta-Pantazi, 2007).

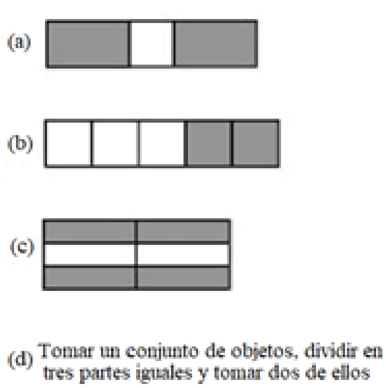
Diversos investigadores han examinado la construcción de los distintos subconstructos de la fracción en estudiantes de primaria, con la finalidad de detectar las dificultades que presentan los estudiantes al resolver tareas relacionadas con el concepto de la fracción (Butto, 2013;

Charalambous y Pitta-Pantazi, 2007; Clarke y Roche, 2009; Clarke, Roche y Mitchell, 2007; Cortina, Cardoso y Zuñiga, 2012; Hansen, Jordan y Rodrigues, 2017; Loc, Tong y Chau, 2017; Tunç-Pekkan, 2015).

Charalambous y Pitta-Pantazi (2007) examinan las construcciones de los cinco subconstructos (parte todo, razón, operador, cociente y medida) de la fracción en estudiantes de primaria. En el estudio participaron 646 estudiantes de quinto y sexto grado. Para cumplir con los objetivos del estudio se elaboró una prueba en base al modelo de Behr et al. (1983) y al plan de estudios que estaba operativo en Chipre, donde se realizó el estudio. La versión final de la prueba, se aplicó a 340 estudiantes de quinto grado y 306 estudiantes de sexto grado, después de haber cubierto todas las nociones incluidas en el modelo de Behr et al. (1983).

A continuación, se muestran algunos ejemplos de tareas propuestas del estudio de Charalambous y Pitta-Pantazi (2007). El ejemplo número 1, se refiere al subconstructo Parte todo, el ejemplo número 2 se refiere al subconstructo Cociente, el ejemplo número 3 se refiere al subconstructo Operador y el ejemplo número 4 se refiere al subconstructo Medida.

1. ¿Cuál de las siguientes alternativas corresponde a 2/3?



2. Tres pizzas están divididas equitativamente entre cuatro niños. ¿Cuánta pizza recibirá cada niño?

3. Decida si la siguiente afirmación es correcta: "Si dividimos un número por cuatro y luego multiplicamos el resultado por 3, obtendremos el mismo resultado, que si multiplicamos este número por 3/4"

4. Localice el número uno, en cada una de las siguientes rectas numéricas (figura 6).

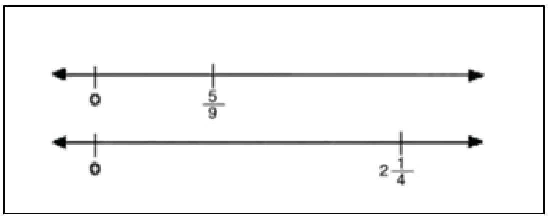


Figura 6. Rectas numéricas (Charalambous y Pitta-Pantazi, 2007)

Los resultados del estudio de Charalambous y Pitta-Pantazi (2007) revelan que los estudiantes mostraron mayor desempeño en tareas relacionadas con el subconstructo parte todo, seguidas por razón, cociente, operador y medida, en ese orden. El desempeño de los estudiantes en las tareas relacionadas al subconstructo de medida, fue notablemente inferior respecto del rendimiento en cualquier otro subconstructo. Los tres subconstructos restantes, razón, cociente y operador de las fracciones resultaron ser de mediana complejidad para los estudiantes. En general, los hallazgos del estudio de Charalambous y Pitta-Pantazi (2007) sugieren que una comprensión profunda de las diferentes interpretaciones de las fracciones, puede elevar el rendimiento de los estudiantes en tareas relacionadas con equivalencia y operaciones con fracciones.

Clarke et al. (2007) de manera análoga a Charalambous y Pitta-Pantazi (2007) examinan las construcciones de cuatro subconstructos de la fracción en estudiantes australianos de sexto grado. Para realizar el estudio utilizaron un cuestionario con 50 tareas centradas en el constructo fracción como parte-todo, medida, cociente y operador. Estas tareas se probaron en una muestra piloto de alrededor de 30 estudiantes de cuarto a noveno grado, las tareas fueron refinadas y nuevamente piloteadas. Posteriormente, usando una selección del conjunto de tareas, se entrevistó a 323 estudiantes de sexto grado a finales del año escolar. Las tareas se administraron individualmente durante un período de 30 a 40 minutos en las propias escuelas de los estudiantes. A continuación, se presentan ejemplos de las tareas y el porcentaje de respuestas correctas de los estudiantes, reportadas en el estudio de Clarke et al. (2007).

1. Fracción como parte todo.

Tarea torta dividida (parte a y b).

A los estudiantes se les mostró el modelo de una torta (Figura 7), y se les preguntó:

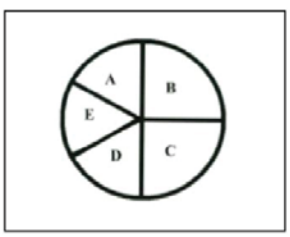


Figura 7. Tarea torta dividida (Clarke et al., 2007)

a) ¿Qué fracción del círculo es la parte B?

b) ¿Qué fracción del círculo es la parte D?

La parte (a) fue relativamente sencilla, un 83% de alumnos respondieron 1/4. La parte (b) fue más difícil, solo el 42,7% de los alumnos dio una respuesta correcta.

Tarea conjunto de puntos. A los estudiantes se les mostró la Figura 8 y se les preguntó "¿qué fracción de los puntos es negra?" Luego se les pidió que indicaran "otro nombre para esa fracción".

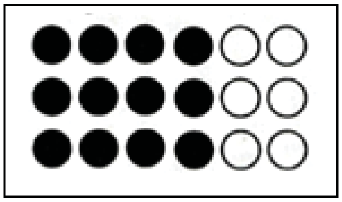


Figura 8. Conjunto de puntos (Clarke et al., 2007)

El 76,9% dieron una respuesta correcta y solo el 53,5% de los estudiantes pudieron ofrecer otro nombre correcto para la fracción, siendo 4/6 la respuesta más común.

Tarea dibuja un todo (parte a). A los estudiantes se les mostró un rectángulo (sombreado gris, en la Figura 9) y se les preguntó: "si esto es dos tercios" de una forma, dibuja toda la forma".

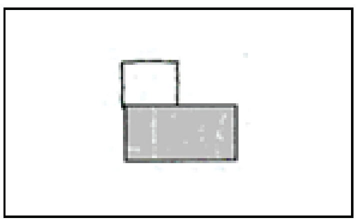


Figura 9. Solución correcta de un alumno, parte a (Clarke et al., 2007)

El 64,1% pudo dibujar correctamente.

Tarea dibuja un todo (parte b). A los estudiantes se les presentó un rectángulo (parte sombreada, en la Figura 10), se les dijo que eran "cuatro tercios" y se les pidió que mostraran el todo.

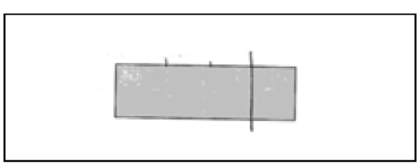


Figura 10. Solución correcta de un alumno, parte b (Clarke et al., 2007)

En este caso, el 40,5% dibujó una forma correcta, con poco menos de la mitad de estos fragmentando el rectángulo original en cuatro partes, indicando tres de estos como el todo.

2. Fracción como operador (operadores simples).

A los estudiantes se les hicieron cuatro preguntas, sin modelos visuales, lo que requirió que los estudiantes resolvieran mentalmente. Las preguntas eran las siguientes: ¿la mitad de seis? (97,2% de éxito);… ¿una quinta parte de diez? (73,4% de éxito);... ¿dos tercios de nueve? (69,7% de éxito) y... ¿un tercio de la mitad?" (17,6% de éxito).

3. Fracción como Medida.

Recta numérica (partes a, b y c). A los estudiantes se les pidió que dibujaran una recta numérica y ubicaran la fracción dos tercios. Cuando los estudiantes no escribieron 0 y 1 en su dibujo, el entrevistador les preguntó: ¿dónde va el cero? ... ¿dónde va 1? Solo el 51,1% de los estudiantes lograron ubicar correctamente 2/3 en la recta numérica. Un error común fue colocar 2/3 después de 1 (figura 11), o dos tercios a lo largo de alguna línea, por ejemplo, dos tercios del camino de 0 a 100 (figura 12).

Figura 11. Solución incorrecta de un alumno, parte a (Clarke et al., 2007)

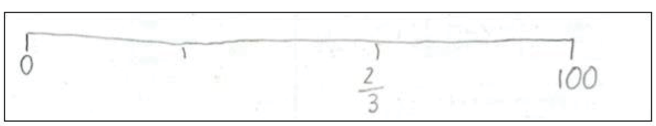


Figura 12. Solución incorrecta de otro alumno, parte a (Clarke et al., 2007)

Dada una recta numérica como se muestra en la Figura 13, se les pidió a los estudiantes que marcaran, a su vez, las fracciones 6/3 (parte b) y 11/6 (parte c). Solo 32,8% y 25,4% tuvieron éxito, respectivamente. Muchos colocaron 6/3 en 6 o 3. Varios estudiantes localizaron 11/6 a la derecha de 6.

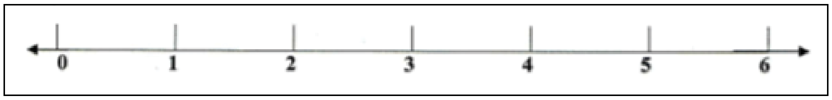


Figura 13. Tarea recta numérica, parte b y c (Clarke et al., 2007)

4. Fracciones como cociente.

Tarea pizza. A los niños se les mostró una imagen (Figura 14), y se les dijo, tres pizzas se reparten equitativamente entre cinco niñas.... ¿Cuánto recibe cada niña? Los estudiantes fueron invitados a usar papel y lápiz si parecían necesitarlo.

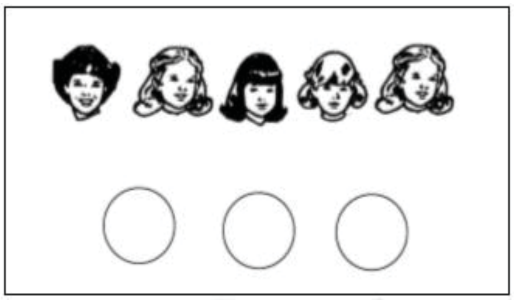


Figura 14. Tarea Pizza (Clarke et al., 2007)

El 30,3% de los estudiantes de 6º grado respondieron correctamente la tarea pizza.

Los hallazgos del estudio de Clarke et al. (2007) indican que el rendimiento en las tareas relativas al subconstructo parte todo, fue razonablemente bueno en preguntas sencillas y típicas. Pero cuando la tarea no se presentaba en una forma estándar, los estudiantes presentaron mayores dificultades para encontrar la solución correcta. La tarea del conjunto de puntos mostró que los estudiantes manejaban bien la situación discreta. Respecto del subconstructo operador, para la mayoría de los estudiantes la tarea resultó sencilla, con excepción de la pregunta encontrar un tercio de la mitad. Los autores sugieren dar mayor énfasis a los temas en que los estudiantes presentan mayor dificultad, como por ejemplo, tareas relacionadas con fracción como medida.

Clarke y Roche (2009) presentan una investigación focalizada en el subconstructo de medida, específicamente el aspecto cuantitativo de las fracciones (qué tan grande es la fracción). En el estudio utilizan 15 tareas para entrevistar a un total de 323 estudiantes australianos de sexto grado, de 11 a 12 años de edad. Las escuelas y los estudiantes fueron elegidos para ser representativos, en variables como el tamaño de la escuela, la ubicación, la proporción de estudiantes que no hablaba inglés y el nivel socio-económico. Un equipo de diez entrevistadores, todos profesores de primaria, con al menos cuatro años de experiencia participaron en un entrenamiento de un día, sobre el uso de las tareas, incluyendo ver entrevistas en un video y discutir las posibles estrategias, que los estudiantes podrían usar para cada tarea.

Clarke y Roche (2009) indican que los estudiantes habían participado en ocho entrevistas similares, en diferentes contenidos matemáticos en los últimos siete años. Esto es importante ya que los estudiantes estaban acostumbrados a que se les pidiera que expresaran sus razonamientos sobre tales problemas, aunque por primera vez, las tareas fueron relativas a las fracciones. Durante cada entrevista, se mostraron ocho pares de fracciones al alumno, un par a la vez. Estas fracciones fueron 3/8 y 7/8, 1/2 y 5/8, 4/7 y 4/5, 2/4 y 4/8, 2/4 y 4/2, 3/7 y 5/8, 5/6 y 7/8, 3/4 y 7/9. Cada par, escrito en una tarjeta, se colocó frente al estudiante, y se le pidió al estudiante que apuntara a la fracción más grande de la pareja, explicando su razonamiento. No hubo límite de tiempo. No se les dio oportunidad a los estudiantes de escribir o dibujar nada, el interés del estudio fue ver si los estudiantes tenían acceso seguro a estrategias distintas de la estrategia denominadores comunes.

En el estudio de Clarke y Roche (2009) se presenta el porcentaje de estudiantes que indicaron correctamente qué fracción era más grande, dando una justificación razonable para su elección. En la tabla 1 y tabla 2, se presentan los resultados del estudio.

Tabla 1

*Porcentaje de respuestas correctas**

Par de fracciones	Respuestas correctas (%)
3/8 y 7/8	77,1
2/4 y 4/8	64,4
1/2 y 5/8	59,4
2/4 y 4/2	50,5
4/7 y 4/5	37,2
3/7 y 5/8	20,4
5/6 y 7/8	14,9
3/4 y 7/9	10,8

*Nota Fuente: Porcentaje de estudiantes de sexto grado que eligen correctamente la fracción con una explicación adecuada (n = 323), modificado desde (Clarke y Roche, 2009)

Tabla 2

*Estrategias usadas por los estudiantes**

Par de fracciones	Explicación verbal del estudiante	Uso de estrategia Satisfactorio/insatisfactorio
3/8 y 7/8	"Las piezas son del mismo tamaño, son octavos y 7 es más de 3"	Satisfactorio
1/2 y 5/8	"1/2 es equivalente a 4/8, entonces 5/8 es 1/8 más"	Satisfactorio
4/7 y 4/5	"4 está más cerca de 5 que 4 es a 7"	Insatisfactorio
2/4 y 4/8	"Ambos equivalen a la mitad"	Satisfactorio
3/7 y 5/8	"5/8 es más de la mitad y 3/7 es menos de la mitad"	Satisfactorio
5/6 y 7/8	"Lo mismo porque a cada uno le queda uno"	insatisfactorio

*Nota fuente: Estrategias estudiantiles dadas para las elecciones correctas en cada tarea de pares de fracciones (n = 323), modificado desde (Clarke y Roche, 2009)

Los resultados del estudio de Clarke y Roche (2009) muestran que al menos un tercio de los estudiantes de sexto grado, parece tener una comprensión básica y parcial de las fracciones.

El 38,5% de todas las soluciones incorrectas (para las cuales se elige 3/8 como el más grande entre 3/8 y 7/8) dieron la siguiente explicación: "números más pequeños significan fracciones más grandes". En general, los datos de las entrevistas, muestran que los estudiantes carecen del sentido de tamaño en relación con las fracciones, centrándose por separado en el numerador y el denominador. Se hipotetiza que las estrategias usadas por los estudiantes exitosos, podrían formar la base de enfoques de instrucción, que pueden producir el tipo de comprensión conectada y requerida para el desarrollo del razonamiento proporcional en años posteriores.

Cortina et al. (2012) reportan un estudio que consistió en aplicar 297 cuestionarios a igual número de alumnos de sexto grado de 13 escuelas primarias. Algunas de esas escuelas estaban en los Altos de Chiapas y otras en el sur de la Ciudad de México. El cuestionario incluyó 19 preguntas relativas al subconstructo de medida (aspecto cuantitativo de las fracciones) y parte todo. Las primeras seis preguntas implicaron comparar la cantidad de leche contenida en dos cartones (figura 15). Para responder a estas preguntas, primero se solicitó verbalmente a los estudiantes, marcar el nivel de leche que indicaba la fracción escrita al pie de cada cartón de leche.

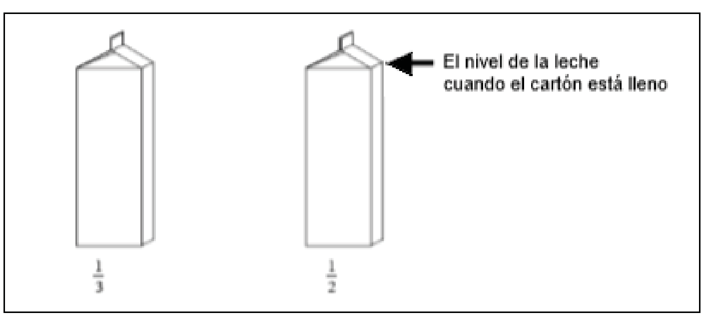


Figura 15. Ejemplo de pregunta (Cortina et al., 2012)

Posteriormente se les pide que indiquen cuál de los dos cartones está más lleno. Las fracciones a comparar fueron: 1/3 y 1/2, 3/4 y 1/4, 1/3 y 2/3, 2/4 y 1/2, 4/9 y 3/4 y 5/10 y 1/2.

La séptima pregunta del estudio de Cortina et al. (2012), implicó comparar la cantidad de leche que se utilizó para hacer tres diferentes pasteles. Las fracciones a comparar fueron 5/4 de litro, 8/9 de litro y 1 litro, escritas respectivamente al pie de cada pastel. En seis de las 12 preguntas restantes, se les solicita a los estudiantes que sombreen la parte del área de cada círculo indicada por la fracción. Para esta actividad las fracciones utilizadas fueron 1/2, 2/4, 3/4, 1/3, 2/3 y 3/3. En cada una de las seis preguntas restantes aparecía un rectángulo con una fracción escrita al pie de cada rectángulo. Una vez más se les pidió a los estudiantes que sombrearan la parte del área indicada por cada fracción. En esta oportunidad las fracciones utilizadas fueron 1/2, 1/4, 3/4, 1/8, 4/8 y 8/8.

Cortina et al. (2012) clasifican los cuestionarios en cuatro categorías: A, B, C y D, de acuerdo a las respuestas correctas dadas por los estudiantes de sexto grado. En la categoría A, fueron agrupados los cuestionarios en los que los estudiantes respondieron correctamente a las preguntas de los cartones de leche, así como el de los tres pasteles y los de los círculos y rectángulos (20%). En la categoría B, los estudiantes respondieron correctamente las preguntas de los cartones de leche, así como los de los círculos y rectángulos, pero que se equivocaron en la pregunta de los tres pasteles (19,5%). En la categoría C, los estudiantes representaron la fracción 1/2 como la mitad de algo, pero que representaron incorrectamente la mayoría de las otras fracciones (29,7%). En la categoría D, los estudiantes no representaron ninguna fracción correctamente de manera consistente, incluyendo 1/2 (30,1%), al interpretar el significado cuantitativo de una fracción, estos alumnos parecían recurrir únicamente a sus conocimientos de los números naturales, considerando que aquellos símbolos con números más grandes representaban cantidades mayores, por ejemplo, 2/4 es mayor que 1/2.

Los resultados del estudio de Cortina et al. (2012) sugieren que muchos niños están terminando la primaria en México con una comprensión muy limitada del concepto de fracción, algunos de ellos no parecen haber desarrollado nociones cuantitativas básicas, que les permitan interpretar de forma correcta el significado de las notaciones fraccionarias más comunes, como por ejemplo: 1/2, 1/4, 1/3, 3/4. Lo que indica que una gran cantidad de estos niños se encontraban muy rezagados en su comprensión del significado cuantitativo de las fracciones, de acuerdo con los programas de estudio vigentes en México.

Butto (2013) realiza un estudio de corte cualitativo, en el que participaron 26 alumnos de sexto básico de una escuela pública de México, las edades de los alumnos oscilaron entre 10 a 12 años de edad. Los objetivos del estudio fueron describir las dificultades que presentaban los alumnos en el aprendizaje de las fracciones, diseñar y aplicar una secuencia didáctica y reportar la evolución de las nociones matemáticas. En la primera parte del estudio, se diseña y aplica un cuestionario inicial y entrevista clínica individual, el objetivo de la entrevista fue profundizar en las ideas que cada estudiante tiene sobre las fracciones, y de esta forma conocer en detalle antecedentes sobre este tema, por medio del cuestionario inicial. Se exploran las ideas de mitad, entero o unidad, fraccionamiento en cantidades continuas y discretas, representación de fracciones propias e impropias en la recta numérica, suma y resta de fracciones.

Los resultados del estudio de Butto (2013) en el cuestionario inicial muestran que los alumnos presentan menos dificultad en actividades que abordan la idea de la mitad. En las actividades que abordaron la idea de representación de fracciones propias e impropias, los alumnos mostraron más dificultad en la representación de fracciones impropias. En las actividades que abordaban la idea de fraccionamiento en cantidad discreta, los alumnos presentaron dificultades para reconocer la parte del todo. Las actividades que presentaron mayor dificultad fueron las relativas a ubicar fracciones en la recta numérica. En la figura 16, se presentan actividades del cuestionario inicial.

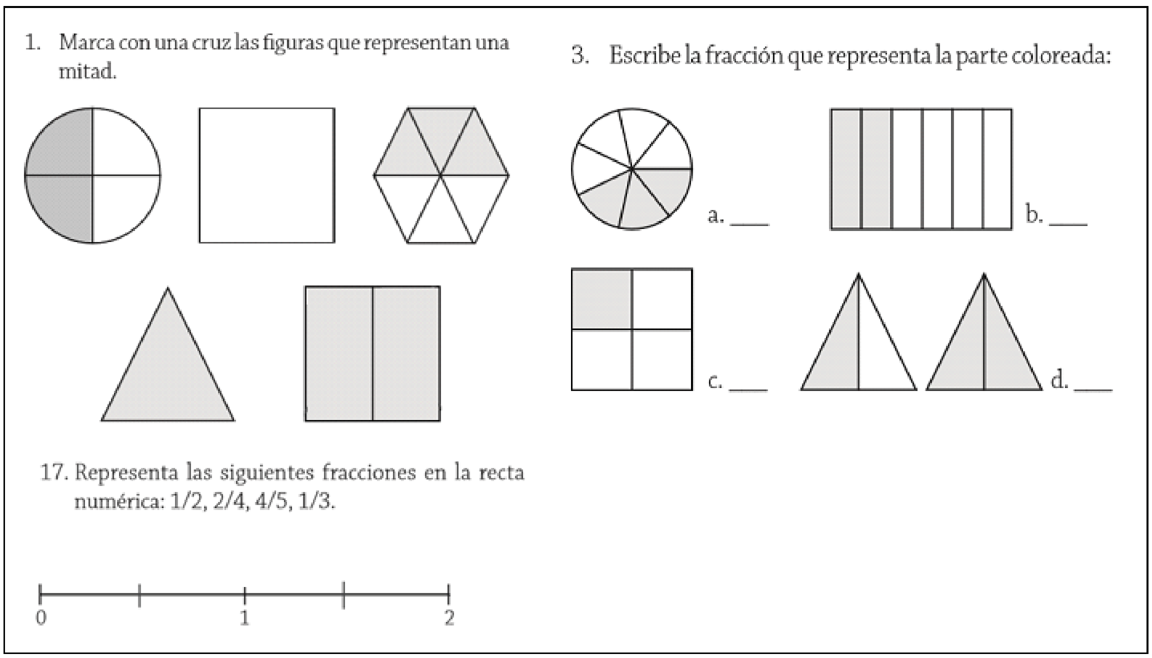


Figura 16. Actividades del cuestionario inicial (Butto, 2013)

Los resultados de la aplicación de la secuencia didáctica del estudio de Butto (2013) muestra que los alumnos no presentan dificultades con la idea de la mitad y la representación de fracciones propias en la recta no numérica, por lo que estas ideas no se presentan en el cuestionario final. Las preguntas que presentaron mayor dificultad para los alumnos fueron las que abordaron las ideas de fraccionamiento en cantidad discreta, la equivalencia de fracciones y la ubicación de fracciones propias e impropias en la recta numérica. Sin embargo, en el cuestionario final se observa que hubo avances en la comprensión de la equivalencia de fracciones, así como en el fraccionamiento en cantidad discreta, a partir de estos resultados se percibe un avance conceptual en los alumnos. Pero se mantienen las dificultades en actividades relativas a la ubicación de fracciones propias e impropias en la recta numérica.

Butto (2013) concluye que a partir de los resultados de su estudio, se percibe un avance conceptual en los estudiantes, superando algunas dificultades presentadas en el cuestionario inicial, lo que revela que el paso de los números enteros a los números fraccionarios es un proceso lento, que requiere la comprensión de los diversos subconstructos involucrados en el constructo de las fracciones. Además, Butto (2013) señala que en lo que respecta al modelo matemático propuesto por Kieren (1976) se percibe que algunos estudiantes se encuentran en el nivel inicial, expresando un conocimiento básico, como las ideas de particionamiento, equivalencia y la formación de la unidad. Butto (2013) agrega que las ideas de medida, cociente, razón y operador, están en un nivel en que pocos estudiantes de educación básica pueden acceder, si la instrucción escolar no les ofrece un modelo conceptual distinto al modelo parte-todo.

Tunç-Pekkan (2015) investiga cómo diferentes tipos de representaciones gráficas se relacionan con el conocimiento fraccional de los estudiantes. En su estudio administraron una prueba de fracciones a 646 estudiantes de cuarto y quinto grado de los Estados Unidos. En la prueba se presentan tres tipos de representaciones gráficas: círculos, rectángulos y rectas numéricas. Los estudiantes completaron las pruebas individualmente en sus escritorios, no se impuso ninguna restricción de tiempo, pero la prueba se terminó en la clase que fue de 40 minutos. A continuación se presentan algunos ejemplos de la prueba, cada uno de ellos con el porcentaje de estudiantes que respondieron correctamente.

En la figura 17 se muestra la pregunta n°1 de la prueba, esta pregunta relativa al subconstructo parte todo (diagrama circular) resultó ser muy fácil para los estudiantes. El 98% de los 646 estudiantes responden correctamente 1/4.

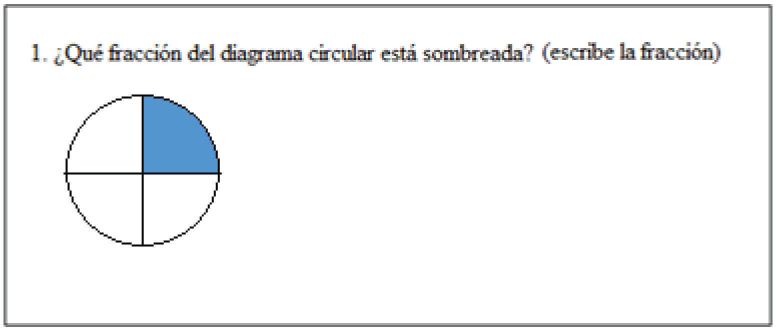


Figura 17. Fracción unitaria representada por una parte sombreada de un diagrama circular (Tunç-Pekkan, 2015)

En la figura 18 se muestra la pregunta n°2 de la prueba, esta pregunta relativa al subconstructo parte todo (diagrama rectangular) también resultó ser muy fácil para los estudiantes. El 99% de los 646 estudiantes escriben la fracción 1/5.

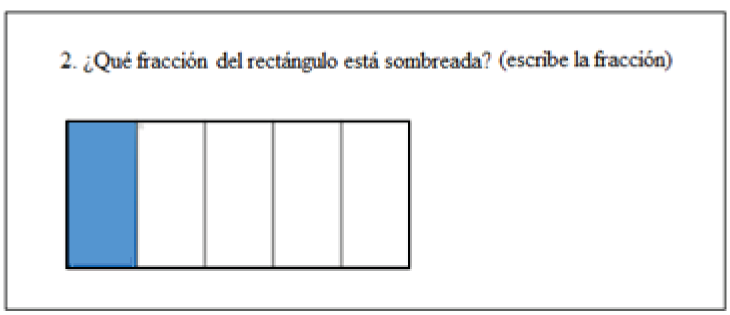


Figura 18. Fracción unitaria representada por una parte sombreada de un rectángulo (Tunç-Pekkan, 2015)

En la figura 19 se muestra la pregunta n°3 de la prueba, esta pregunta relativa al subconstructo medida (ubicar una fracción en la recta numérica) resultó ser más difícil para los estudiantes. Solo el 48% de los 646 estudiantes escriben la fracción 1/3.

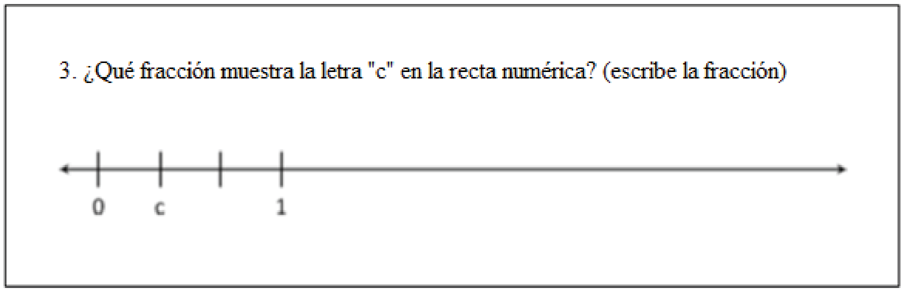


Figura 19. Fracción unitaria representada en la recta numérica (Tunç-Pekkan, 2015)

En la figura 20 se muestra la pregunta n°5 de la prueba, en esta pregunta el 80% de los 646 estudiantes dibujan los 3/4 del diagrama circular.

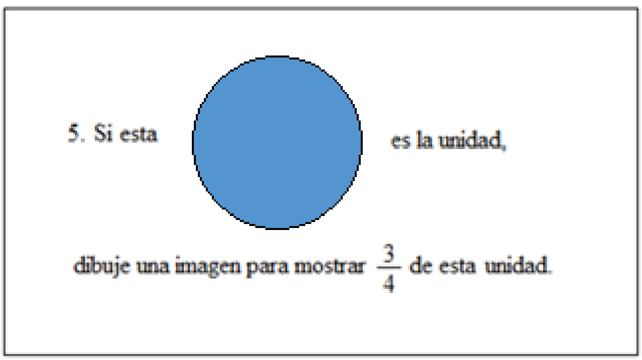


Figura 20. Representación de una fracción propia en un diagrama circular (Tunç-Pekkan, 2015)

En la figura 21 se muestra la pregunta n°6 de la prueba, en esta pregunta el 79% de los 646 estudiantes dibujan los 5/6 del rectángulo.

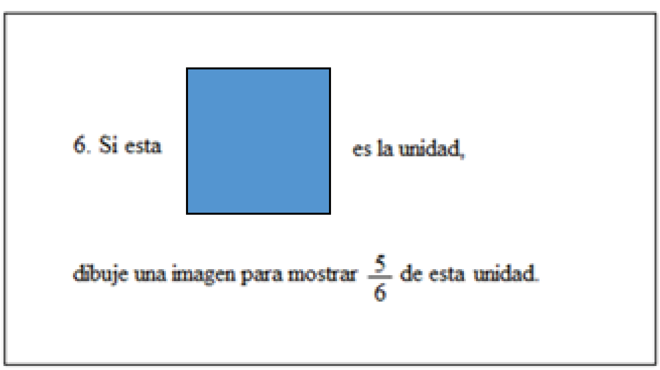


Figura 21. Representación de una fracción propia en un rectángulo (Tunç-Pekkan, 2015)

En la figura 22 se muestra la pregunta n°7 de la prueba, solo el 35% de los 646 estudiantes ubicó correctamente 2/3 en la recta numérica.

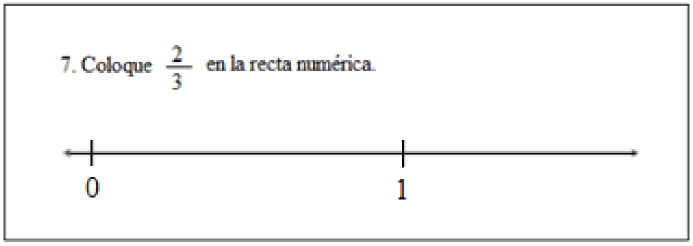


Figura 22. Fracción propia en la recta numérica, dada la unidad (Tunç-Pekkan, 2015)

En la figura 23 se muestra la pregunta n°9 de la prueba, solo el 34% de los 646 estudiantes dibujó la imagen solicitada.

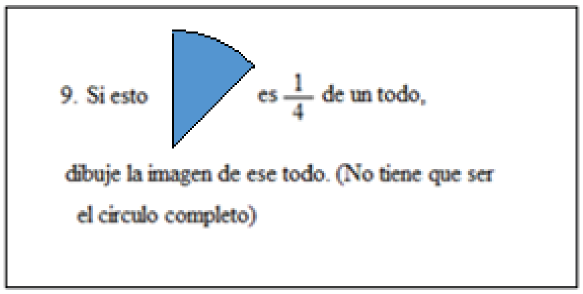


Figura 23. Reconstruyendo el todo, a partir de la representación (sector circular) de una fracción unitaria (Tunç-Pekkan, 2015)

En la figura 24 se muestra la pregunta n°10 de la prueba, el 74% de los 646 estudiantes dibujó la imagen solicitada.

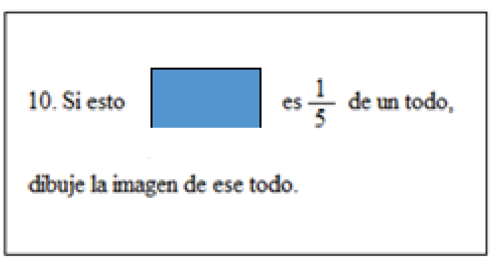


Figura 24. Reconstruyendo el todo, a partir de la representación (rectangular) de una fracción unitaria (Tunç-Pekkan, 2015)

En la figura 25 se muestra la pregunta n°11 de la prueba, solo el 23% de los 646 estudiantes ubicó correctamente el “1” en la recta.

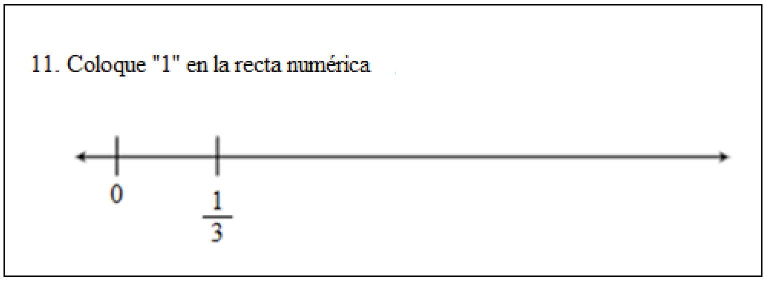


Figura 25. Reconstruyendo la unidad, a partir de la representación (recta numérica) de una fracción unitaria (Tunç-Pekkan, 2015)

En la figura 26 se muestra la pregunta n°13 de la prueba, solo el 17% de los 646 estudiantes respondió correctamente.

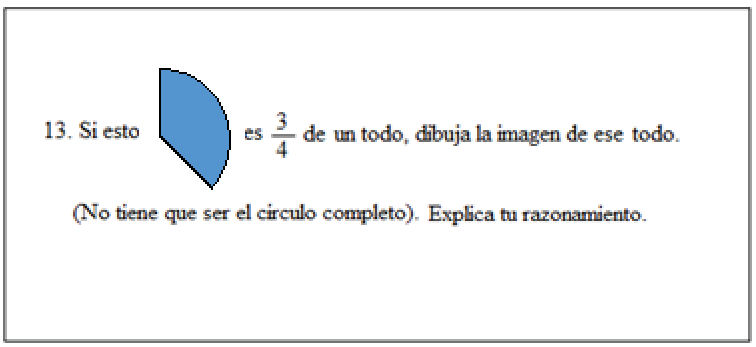


Figura 26. Reconstruyendo el todo, a partir de la representación (sector circular) de una fracción propia (Tunç-Pekkan, 2015)

En la figura 27 se muestra la pregunta n°14 de la prueba, solo el 19% de los 646 estudiantes respondió correctamente.

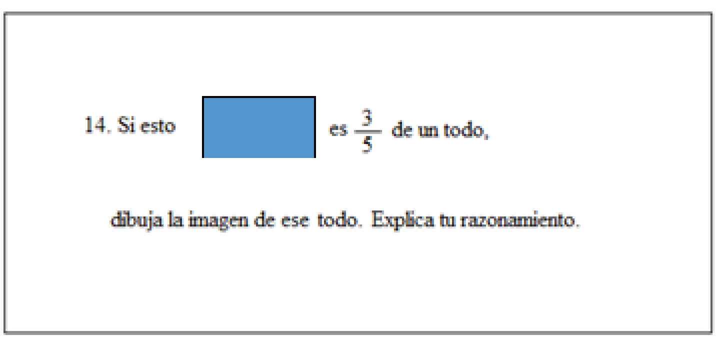


Figura 27. Reconstruyendo el todo, a partir de la representación (rectangular) de una fracción propia (Tunç-Pekkan, 2015)

En la figura 28 se muestra la pregunta n°15 de la prueba, solo el 28% de los 646 estudiantes respondió correctamente.

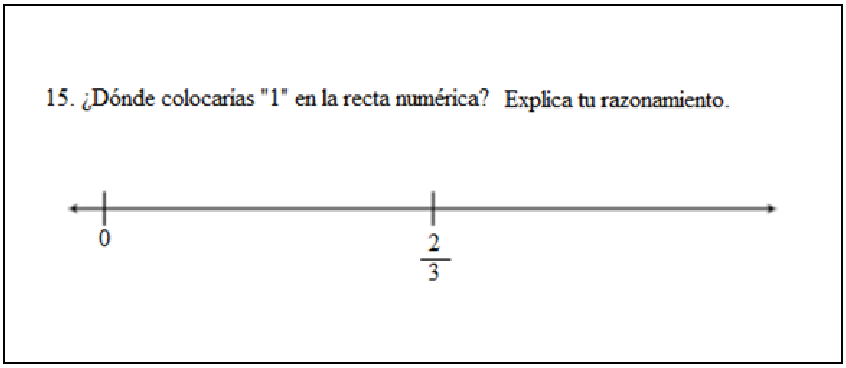


Figura 28. Reconstruyendo la unidad, a partir de la representación (recta numérica) de una fracción propia (Tunç-Pekkan, 2015)

En la figura 29 se muestra la pregunta n°17 de la prueba, el 80% de los 646 estudiantes respondió correctamente 5/3.

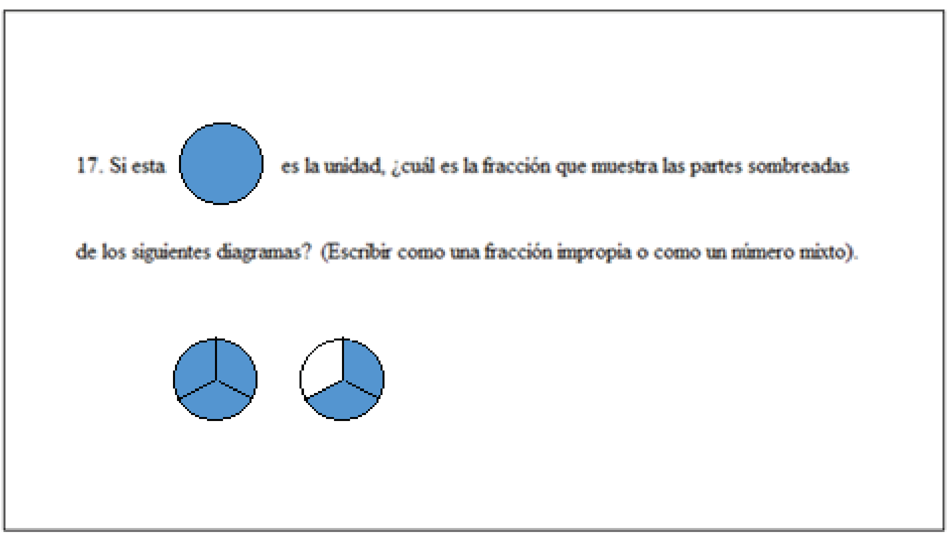


Figura 29. Fracción impropia que representan diagramas circulares (Tunç-Pekkan, 2015)

En la figura 30 se muestra la pregunta n°18 de la prueba, solo el 37% de los 646 estudiantes respondió correctamente 5/4.

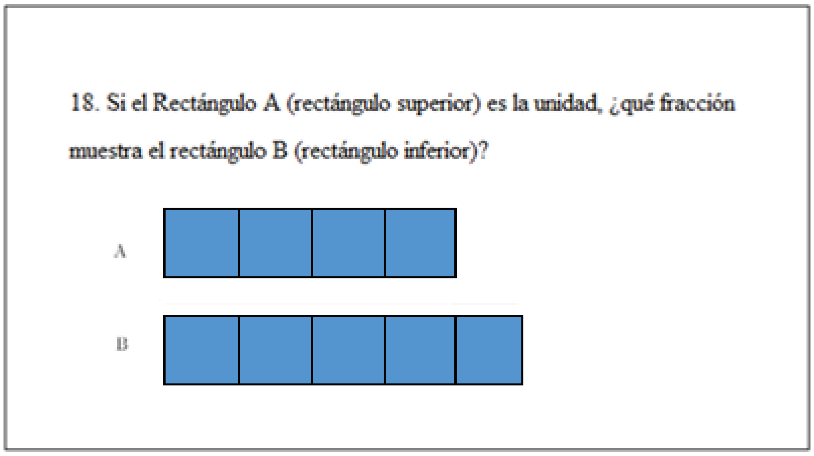


Figura 30. Fracción impropia que representa un rectángulo dividido en partes iguales (Tunç-Pekkan, 2015)

En la figura 31 se muestra la pregunta n°19 de la prueba, solo el 37,9% de los 646 estudiantes respondió correctamente.

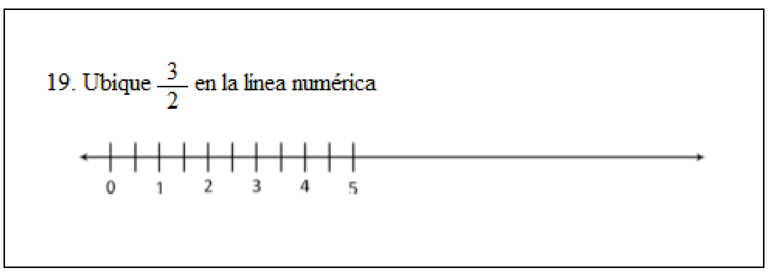


Figura 31. Fracción impropia en la recta numérica (Tunç-Pekkan, 2015)

Los hallazgos del estudio de Tunç-Pekkan (2015) indican que los estudiantes mostraron un rendimiento similar en preguntas que requieren un razonamiento parcial de las fracciones, relacionadas con representaciones de círculo y rectángulo. Sin embargo, el rendimiento de los estudiantes fue significativamente más bajo en preguntas cuya representación gráfica fue la recta numérica. Los resultados también muestran que independiente de la representación, su rendimiento fue menor en preguntas que requerían un pensamiento fraccional más avanzado, como por ejemplo, las preguntas relativas a reconstruir un todo a partir de la representación gráfica (círculo, rectángulo o recta numérica) de una fracción propia.

Hansen et al. (2017) investigan la evolución en el conocimiento de las fracciones, en 536 estudiantes de los Estados Unidos, el estudio se inicia en tercer grado y después de los años de instrucción, termina en sexto grado. El diseño longitudinal, permitió ver la imagen completa de este período clave del aprendizaje de las matemáticas, además de identificar antecedentes de dificultades persistentes en el aprendizaje de las fracciones. Las covariables incluidas en el estudio fueron edad al ingreso de tercer grado, estado de ingresos, membresía del distrito escolar, estado de educación especial y género.

El concepto de fracción se evaluó usando seis preguntas desarrolladas por Hecht et al. (2003, citado por Hansen et al., 2017) y 22 preguntas de fracciones publicadas en las Evaluaciones Nacionales del Progreso Educativo (NAEP, por sus siglas en inglés). Las preguntas que evaluaron el concepto de fracción requerían que los estudiantes sombrearan una figura o un conjunto de figuras (por ejemplo, "Sombrear 4/5 de 10 círculos"). Las preguntas de NAEP cubrieron un rango del concepto de fracción, incluyendo el entendimiento de la totalidad de la parte (por ejemplo, "La figura muestra que se ha comido una parte de la pizza. ¿Qué parte de la pizza todavía está allí?"), también incluía preguntas de estimación (por ejemplo, "sumar 7/8 + 12/13"), de comparación y equivalencia de fracciones (por ejemplo, "¿Qué imagen muestra que 3/4 es lo mismo que 6/8?").

Hansen et al. (2017) señalan que aunque los estudiantes, en promedio obtuvieron ganancias constantes respecto del concepto de las fracciones, descubrieron cursos de crecimiento empíricamente distintos, dos cursos representaban a un grupo de estudiantes que progresaron poco durante el estudio, mientras que tres cursos representaban a los estudiantes que lograron un progreso adecuado. En el transcurso del estudio, los estudiantes en los cursos de más alto rendimiento respondieron correctamente el doble de preguntas que los estudiantes en los cursos de bajo rendimiento.

Hansen et al. (2017) señalan que los resultados de los estudiantes en el sexto grado, mostraron que había brechas sustanciales y persistentes entre estudiantes de bajo rendimiento, particularmente en preguntas que requerían colocar fracciones en una recta numérica, determinar fracciones equivalentes, comparar y ordenar fracciones. Los estudiantes de bajo rendimiento tuvieron dificultades cuando encontraron tareas que requerían flexibilidad con fracciones, como aquellas en las que el denominador de la fracción no correspondía directamente con las piezas mostradas (por ejemplo, "Sombrear 4/5 de 10 círculos"). Cabe señalar que los estudiantes de ambos grupos mostraron dificultades cuando se les presentaron problemas de estimación de fracciones (por ejemplo, "Estime la suma: 7/8 + 12/13"), los autores del estudio sugieren que se debe dedicar más atención en esta área para todos los estudiantes. Al final del sexto grado, muchos estudiantes con dificultades persistentes en los procedimientos de fracciones experimentaron dificultades en preguntas que implicaban sumas y restas de fracciones, incluso en preguntas con denominadores comunes.

Hansen et al. (2017) destacan que el estudio revela las dificultades casi universales que experimentan los estudiantes en el cálculo de las fracciones. La mayoría de los estudiantes, respondieron correctamente menos de la mitad de los problemas de cálculo de las fracciones al final del estudio, a pesar de que se espera que al final del año escolar los estudiantes de sexto grado sumen, resten, multipliquen y dividan las fracciones. Los autores agregan que los patrones de error en suma y resta indicaron que muchos estudiantes del grupo de bajo rendimiento, operaban con los numeradores y denominadores de las fracciones como si fueran cuatro números enteros separados. La tendencia a generalizar demasiado las estrategias de números enteros cuando se trabaja con fracciones sugiere problemas fundamentales con la estructura bipartita de las fracciones.

Loc et al. (2017) muestran las dificultades y errores que cometen estudiantes al resolver ejercicios relacionados con el concepto de fracción. Participan del estudio 478 estudiantes de cuarto y quinto grado de siete escuelas de Vietnam. A continuación se reportan tres preguntas realizadas a los estudiantes, la pregunta 1 y 2 tuvo por objetivo evaluar la capacidad de los estudiantes para identificar la “fracción” dada por imágenes. En el caso de la pregunta 3, el objetivo fue evaluar la capacidad de los estudiantes para identificar la "fracción" y realizar la suma dada por las imágenes. En la figura 32, se muestra la pregunta 1, relativa al subconstructo parte todo.

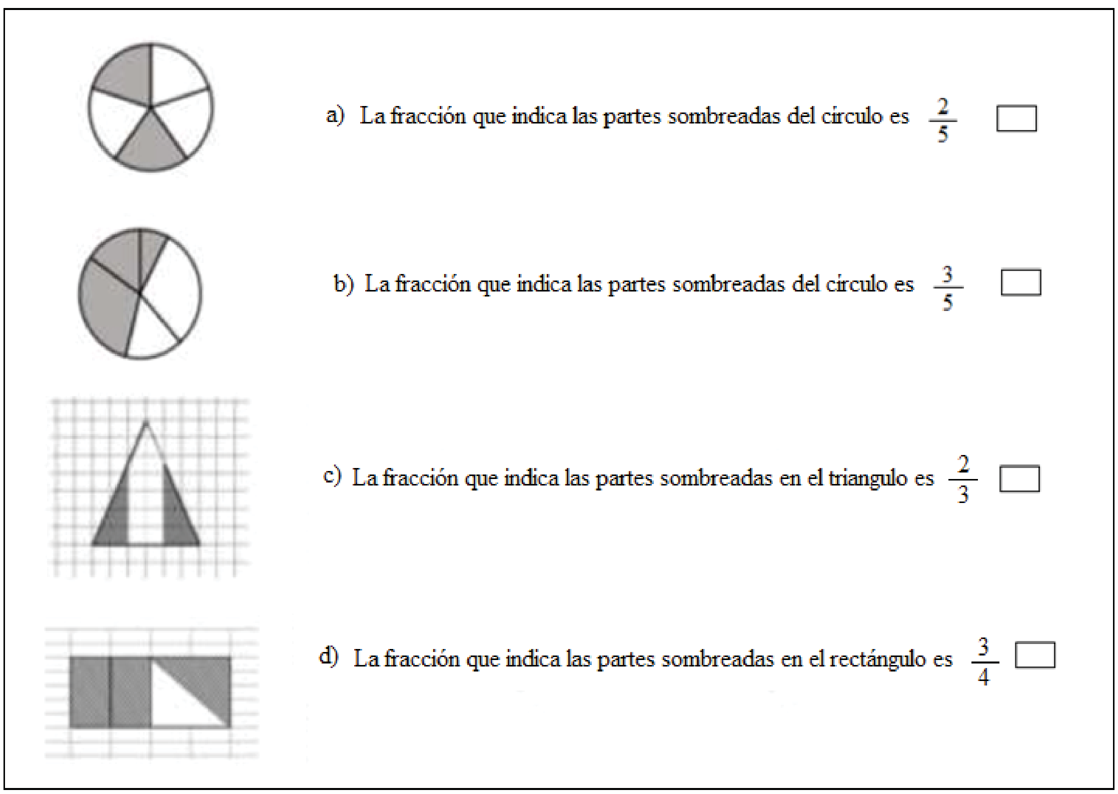


Figura 32. Pregunta 1, parte todo continuo (Loc et al., 2017)

Respecto de la pregunta 1 (figura 32), el 98% de los 478 estudiantes responde correctamente en a) verdadero; el 60% responde correctamente b) falso; el 32.6% de los estudiantes responde correctamente en c) falso; y el 71% responde correctamente en d) verdadero. Muchos estudiantes no prestaron atención a la condición de "partes iguales" para identificar el concepto de fracción, es decir, a muchos estudiantes se les ocurrió la respuesta incorrecta (40% en el ítem b y en el caso de c un 67%).

La pregunta 2 del estudio, consta de 3 partes (a, b y c). Se solicita a los estudiantes (por escrito) que completen escribiendo sobre la línea de puntos la fracción correspondiente. En la figura 33, se muestra la pregunta 2 del estudio.

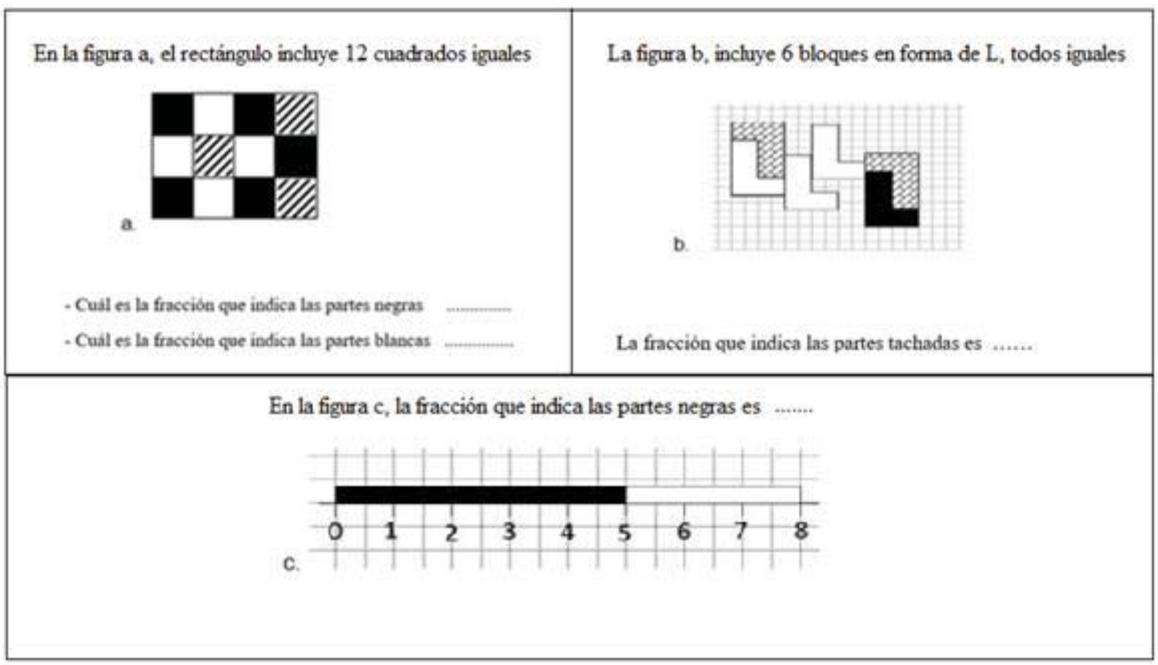


Figura 33. Pregunta 2, parte todo (continuo y discreto) y medida (Loc et al., 2017)

Respecto de la pregunta 2, parte a, el 61% del total de estudiantes responde correctamente que la fracción 5/12 indica las partes negras del total de 12. En la parte b, el 71% del total de estudiantes responde correctamente que la fracción es 2/6 y en la parte c, el 76.8% del total de estudiantes respondieron correctamente que la fracción que indica las partes negras es 5/8. La pregunta 3 del estudio, se muestra en la figura 34.

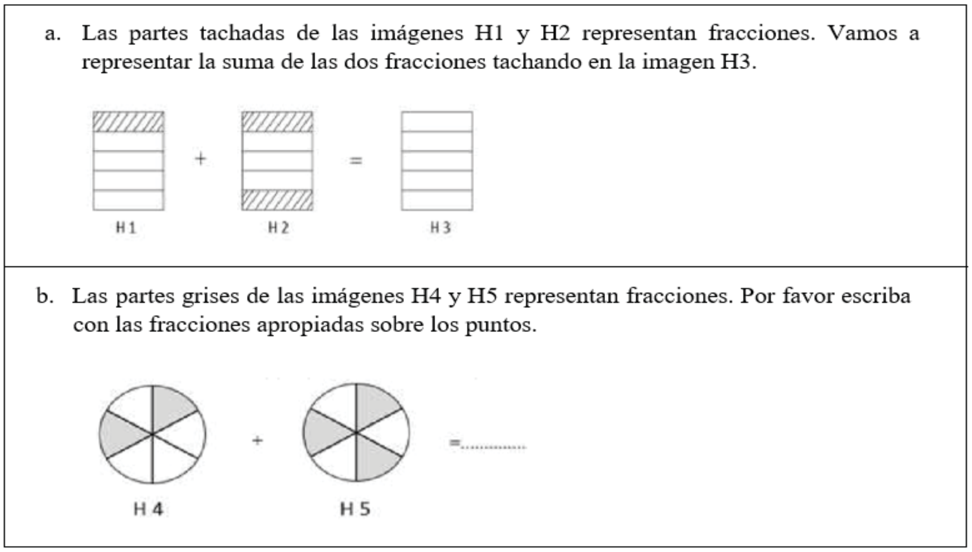


Figura 34. Pregunta 3, sumas de igual denominador dada por imágenes (Loc et al., 2017)

Respecto de la pregunta 3, en la parte a, el 91% del total de los estudiantes responde correctamente y en la parte b, el 44.6% responde correctamente.

Loc et al. (2017) luego de analizar las respuestas erróneas de los estudiantes, concluyen que algunas de las razones que pueden explicar las dificultades y errores que cometieron los alumnos son las siguientes:

(1) Los alumnos de primaria aprendieron el concepto de fracción intuitivamente y de manera informal. Estudiaron este concepto observando figuras, no por definición formal de fracción, en los ejercicios del libro de texto de los alumnos se observa que para identificar la "fracción" no hubo ejercicios considerados como no ejemplos de un todo dividido en partes desiguales como en la pregunta 1, ejercicios muy útiles para que los estudiantes entiendan el concepto.

(2) La noción de una fracción en sí misma es un concepto difícil porque está relacionada con el concepto de números racionales. Por lo tanto, para comprender el concepto de fracción, los estudiantes deben hacer varios ejercicios relacionados.

(3) Debido al hábito de hacer matemática en un entorno de número natural anterior, los estudiantes también cometen fácilmente los errores debido a su confusión de las fracciones con números naturales.

Loc et al. (2017) sugieren usar ejemplos y no ejemplos para ayudar a los estudiantes a entender la fracción de una manera correcta, además de usar representaciones diferentes durante el proceso de enseñanza del tema "Fracción" como: líneas de números, modelos de área, modelos de volúmenes.

En síntesis, las investigaciones centradas en el conocimiento conceptual de las fracciones presentadas en la sección 1.3.1.1, muestran que los estudiantes tienen más éxito en las tareas sencillas y típicas relativas al subconstructo parte todo, desarrollando poco conocimiento en los otros subconstructos (Butto, 2013; Charalambous y Pitta-Pantazi 2007; Clarke, Roche y Mitchell, 2007; Tunç-Pekkan, 2015). Hay estudios que muestran que los alumnos presentan dificultades en tareas poco usuales y que requieren de un pensamiento más avanzado respecto del subconstructo parte todo (Clarke et al., 2007; Loc et al., 2017; Tunç-Pekkan, 2015). Los trabajos de Clarke y Roche (2009) y Cortina et al. (2012) se centran en el subconstructo medida específicamente en el aspecto cuantitativo (que tan grande es la fracción). Los resultados de ambos trabajos muestran que varios estudiantes carecen del sentido de tamaño en relación con las fracciones, en general los alumnos recurren a los conocimientos de los números naturales para resolver las tareas propuestas, centrándose por separado en numerador y denominador.

Varios investigadores coinciden en señalar que la comprensión del subconstructo medida, resulta ser una de las más difíciles para los estudiantes (Butto, 2013; Charalambous y Pitta-Pantazi 2007; Clarke et al., 2007; Tunç-Pekkan, 2015; Hansen et al., 2017).

1.1.3.2 Dificultades de los profesores en la conceptualización de las fracciones

Diversas investigaciones muestran que estudiantes para profesor y profesores en servicio presentan dificultades en fracciones similares a las identificadas en los alumnos (Ma, 2010; Newton, 2008). Estudios previos sugieren que el aprendizaje de las fracciones por parte de los alumnos, puede estar limitado por la comprensión de las fracciones por parte del profesor (Ma, 2010; Van Steenbrugge, Lesage, Valcke y Desoete, 2014). La falta de conocimiento matemático para la enseñanza puede afectar la manera en que los profesores critican los libros de texto, seleccionan el material para enseñar, estructuran sus cursos y conducen la instrucción (Crossman, Wilson y Shulman, 2005).

Van Steenbrugge et al. (2014) señalan que los estudios relativos al conocimiento de los profesores sobre las fracciones se han centrado principalmente en solo uno de los aspectos, como por ejemplo en el subcontructo razón, o en la multiplicación de fracciones o en la división de fracciones, por lo que resulta relevante investigar el conocimiento que los profesores tienen tanto en los cinco subconstructos (parte todo, medida, razón, operador y cociente) como en las cuatro operaciones. A continuación, se reportan estudios relacionados con dificultades que presentan profesores en servicio y estudiantes para profesor en la conceptualización de las fracciones.

Moseley, Okamoto y Ishida (2007) realizan un estudio comparativo cuyo objetivo fue examinar la conceptualización de las fracciones por parte de profesores de cuarto grado de Estados Unidos y Japón. Los autores examinaron el conocimiento de los cinco subconstructos de las fracciones (parte todo, cociente, razón, medida y operador). Se entrevistaron a seis profesores de los Estados Unidos y siete de Japón. Los profesores fueron seleccionados para proporcionar una muestra similar de docentes de escuelas de buen desempeño en ambas naciones. Ambos grupos estaban formados principalmente por maestros experimentados, la mayoría de los cuales tenían una experiencia de más de diez años enseñando.

Para realizar el estudio Moseley et al. (2007), dispusieron de 15 tarjetas, en cada una de ellas se presentan cada uno de los cinco subconstructos (parte todo, cociente, razón, medida y operador) con tres tipos de representaciones: un problema verbal (figura 35), una representación pictórica (figura 36) y un valor expresado en notación matemática (figura 37). Las tarjetas se entregan de manera desordenada a los profesores, se les solicita que agrupen las tarjetas de manera consistente. Por lo tanto, se espera que los profesores realicen cinco agrupaciones, con tres tarjetas en cada grupo (texto, imagen y notación). Todos los participantes fueron instruidos para verbalizar sus pensamientos al hacer sus agrupaciones. Un entrevistador tomó notas mientras los participantes organizaban las tarjetas en grupos, documentando acerca de las agrupaciones realizadas, así como las reacciones importantes de los profesores respecto de la tarea.

Parte todo

Mi familia tiene 10 peces, viviendo en un tanque de 15 galones, el más grande se llama Harvey. Harvey tenia 10 onzas de alimento para él y comió 6 onzas. ¿Qué parte de su alimento comió?

Cociente

Mi hermano decidió tomar nuestra gran pecera de 6 galones y dividirla entre 8 tanques más pequeños de 1 galón. ¿Cuánto del gran tanque puso en cada tanque más pequeño?

Razón

Papá limpió nuestra gran pecera, tiene 9 peces realmente limpios. Puso 18 galones de agua y 6 libras de grava en el tanque. ¿Cuál es la relación de la grava con el agua en el tanque?

Medida

Nuestra familia posee 10 peces tropicales y mi madre va a poner 5 galones de agua en nuestro tanque vacío de 20 galones. ¿Cuánto más lleno estará el tanque después de que ella ponga el agua en él?

Operador

Mi tía estaba preparando una pecera para su pez dorado y las instrucciones le indicaron que usara 18 libras de grava y solo tenía 9. ¿Por cuánto debería reducir la cantidad de otras cosas que planea poner en el tanque para que pueda usar 9 libras en lugar de 18?

Figura 35. Problemas verbales, de los cinco subconstructos de las fracciones (Moseley et al., 2007)

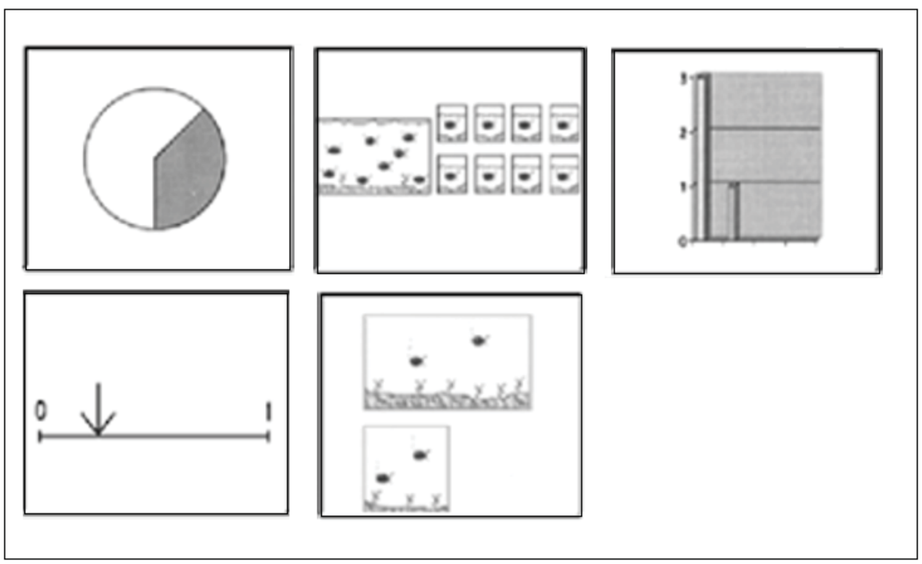


Figura 36. Representación pictorica, de los cinco subconstructos de las fracciones (Moseley et al., 2007)

$\frac{3}{5}$	0.75	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	

Figura 37. Notación matemática de los cinco subconstructos de las fracciones (Moseley et al., 2007)

Los resultados del estudio de Moseley et al. (2007) revelaron que los profesores estadounidenses se centraron en gran medida en el subscontructo parte todo, incluso cuando este era inapropiado, mientras que los profesores japoneses se centraron correctamente en los subscontructos subyacentes. Los profesores de los Estados Unidos, a menudo emparejaron solo dos de las tres tarjetas para cada uno de los subconstructos. En general, fueron capaces de encontrar una sola coincidencia para cada problema verbal, pero luego mostraron dificultad con las tarjetas restantes. Los profesores de los Estados Unidos, rara vez combinaron el símbolo de notación matemática de las fracciones con las imágenes. En cambio, parecen haberse centrado en encontrar una única solución para cada problema verbal. La única excepción fue en el caso de las tarjetas que representan el subconstructo operador. Estas tarjetas se agruparon de manera consistente entre sí.

Las interpretaciones de las tarjetas de los profesores estadounidenses, a menudo carecían de estabilidad a lo largo de la entrevista, en comparación a los profesores japoneses que en general, se tomaron el tiempo para hacer una clasificación altamente detallada de las tarjetas, en la que revelaron sus pensamientos a medida que avanzaban hacia la finalización. Dos de los siete profesores japoneses hicieron cambios en sus agrupaciones iniciales. Pero los cambios que hicieron no alteraron las estructuras básicas. Más bien, cada maestro movió solo dos tarjetas de las ubicaciones originales a grupos nuevos. La organización de dos de los siete maestros japoneses estaba en perfecto acuerdo con el análisis formal. Los otros cinco maestros reconocieron los cinco subconstructos de los números racionales, pero tuvieron dificultades para ubicar las tarjetas de texto, imagen y notación relacionadas con el subconstructo parte todo.

Salazar, Martinic y Maz (2011) realizan una investigación descriptiva y exploratoria, cuyo objetivo fue identificar los significados que ponen de manifiesto 17 profesores chilenos de 5º año básico en la enseñanza de las fracciones, analizando los modelos, las representaciones y los recursos utilizados. Los profesores participantes pertenecen a diversas regiones a lo largo de todo Chile, ellos participaron en el proceso de evaluación del profesor a nivel nacional, del programa Profesor Más, del año 2009. La muestra es intencional y por conveniencia, ya que se eligieron los profesores que trabajaron el concepto de fracción, contenido de estudio de la investigación. Las clases de los profesores son grabadas en videos y posteriormente analizadas.

Salazar et al. (2011) señalan que la interpretación que predomina en los profesores es el subconstructo parte-todo. De acuerdo a un análisis parcial de tres clases, se observa que los profesores utilizan contextos continuos, en dos casos están presentes los modelos de áreas representados por figuras geométricas como cuadrados y rectángulos, sin tomar en cuenta la medida de magnitudes. El vocabulario utilizado por los profesores se relaciona con parte-todo, haciendo alusión al todo como unidad, el que se divide en mitades, tercios, cuartos, etc.

Salazar et al. (2011) concluyen que en la enseñanza de las fracciones predominan las nociones del subconstructo parte-todo, por lo general figuras geométricas como el rectángulo y el cuadrado. Agregando que de esta forma los estudiantes no construyen el concepto de número racional, sino que la fracción resulta ser una relación simbólica compuesta por dos números naturales. Los profesores hacen referencia al todo como unidad, sin precisar que éste debe contener una determinada cantidad de una magnitud medible. A los estudiantes se les oculta el todo medible, evidenciando que existen ciertas limitaciones en la enseñanza de las fracciones en Chile.

Pinto y Ribeiro (2013) administraron tareas a 27 futuros profesores portugueses, de dos instituciones de enseñanza superior. Con las diferentes tareas presentadas a los futuros profesores, se pretende tener acceso al conocimiento relativo al concepto de número racional. En particular, examinan si este conocimiento les permite reconocer diferentes significados de las fracciones (parte-todo, medida, cociente y operador); identificar y reconstruir la unidad de referencia; reconocer fracciones equivalentes y relacionar diferentes representaciones; comparar y ordenar números racionales, reconociendo su densidad. Estas tareas se basan en temas que alumnos de cuarto año de escolaridad debiesen estar en condiciones de resolver. A continuación se presentan algunos ejemplos de las tareas propuestas por los autores y su respectivo análisis.

En una de las tareas (figura 38) se solicitó a los futuros profesores identificar las imágenes que tienen pintados 2/3. El 36% de los estudiantes identifican erróneamente la imagen E, que está dividida en 3 partes, pero no en partes iguales, aunque son todos triángulos no son iguales ni en área, ni en perímetro (Pinto y Ribeiro, 2013).

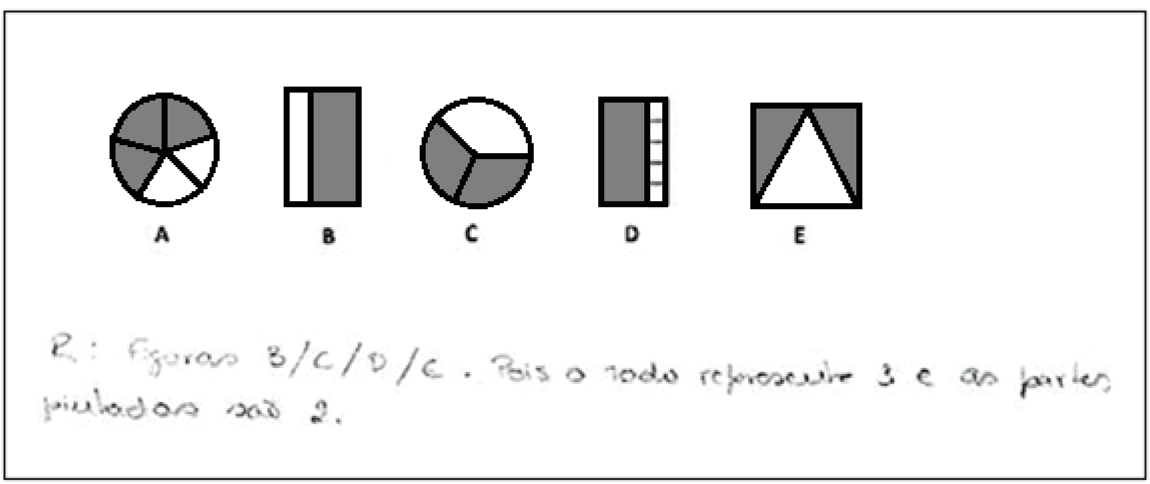


Figura 38. Fracción como parte-todo, respuesta de un estudiante para profesor (Pinto y Ribeiro, 2013)

Una tarea que involucra la fracción como cociente es la siguiente: "10 amigas piden 6 pasteles para compartir, ¿qué parte de pastel come cada una?". Sólo el 21% de los estudiantes respondió correctamente. Sin embargo, la mayoría de las respuestas correctas presentan el recurso de esquemas y la representación decimal, evidenciando procedimientos aditivos (Pinto y Ribeiro, 2013). Ejemplos de respuesta de dos estudiantes se presentan en la figura 39.

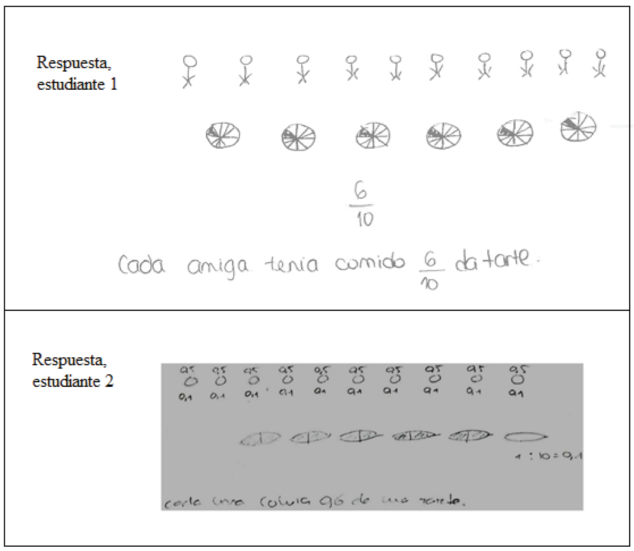


Figura 39. Fracción como cociente, respuestas de dos estudiantes para profesor (Pinto y Ribeiro, 2013)

Del 79% de los estudiantes que evidenciaron poca familiaridad con el significado de la fracción como cociente, en su mayoría presentó el mal entendido: “el dividendo tiene que ser siempre superior al divisor”, lo que lo llevó a intercambiar el dividendo por el divisor (Figura 40). Por lo tanto, los estudiantes no se dieron cuenta de la imposibilidad contextual de dividir amigas por pasteles (Pinto y Ribeiro, 2013).

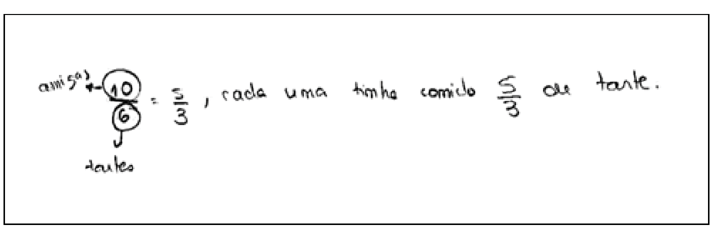


Figura 40. Fracción como cociente, respuesta de un estudiante para profesor (Pinto y Ribeiro, 2013)

Una tarea de este estudio que involucra la fracción como operador es: "En su cumpleaños Manuel llevó a la escuela una bolsa con 30 gomas. Dio a sus compañeros de clase 3/5 de esas gomas. ¿Con cuántas gomas quedó Manuel?". El 64% de los estudiantes no pudo calcular el 3/5 de 30. Los estudiantes plantearon soluciones que evidencian, por un lado, desconocimiento de que la fracción puede tener otros significados más allá de parte-todo, y que los estudiantes recurren al álgebra sin darle sentido, disociada de las representaciones pictóricas empleadas (Pinto y Ribeiro, 2013). Ejemplo de respuesta de un estudiante, se muestran en la figura 41.

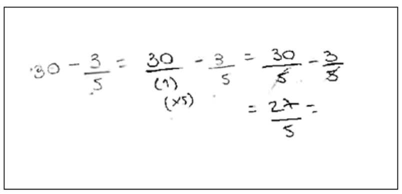


Figura 41. Fracción como operador, respuesta de un estudiante para profesor (Pinto y Ribeiro, 2013)

En una tarea relacionada con la fracción como medida, se solicita a los estudiantes identificar dos fracciones no equivalentes en grupos de cuatro fracciones en las que dos eran equivalentes, en esta tarea el 43% de los estudiantes respondieron incorrectamente. En cuanto a la comparación, ordenación y densidad de números racionales, también se identificaron dificultades en la mayoría de los estudiantes. El 93% mostró dificultades en la comparación de fracciones, del cual el 77% no respondió. El 23% que presentó una respuesta errada mostró dificultades en comparar fracciones, incluso con igual denominador (Figura 42). La densidad de números racionales fue identificada solo por el 27% de los estudiantes. Aunque muchos estudiantes admitieron que había infinitos números entre los números 2 y 21/5, hubo algunos que no pudieron encontrar un número entre los referidos, y surgieron respuestas como 1,5.

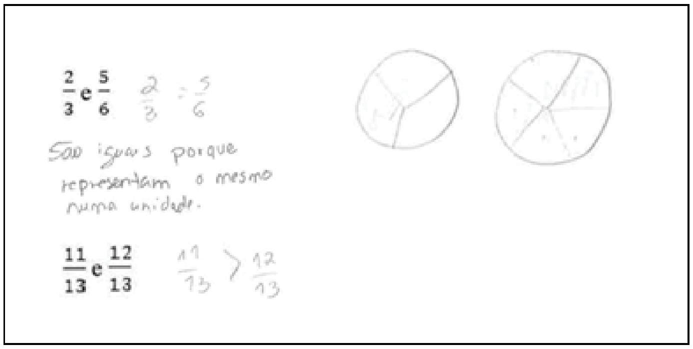


Figura 42. Comparación de fracciones, ejemplo de respuesta de un alumno (Pinto y Ribeiro, 2013)

Pinto y Ribeiro (2013) señalan que la mayoría de los futuros profesores presentan dificultades en todos los subconstructos estudiados, por consiguiente, una falta de sentido del número racional. Las dificultades reveladas definen un punto de partida bastante bajo en la formación de profesores en relación con la conceptualización de las fracciones. Los futuros profesores muestran un conocimiento del sentido de número racional alineado con las mismas dificultades que presentan los alumnos de primaria, descritas en la literatura. Los autores del estudio agregan que estas dificultades reveladas son también responsabilidad de los formadores de profesores y corresponde a uno de los aspectos que urge atender en la formación de profesores.

Jakobsen et al. (2014) diseñan y aplican un cuestionario sobre un problema relativo a fracciones. El cuestionario se diseña para examinar el conocimiento de 49 estudiantes para profesor de primaria de Noruega. El propósito del estudio es contribuir a una mejor comprensión del conocimiento de los futuros profesores sobre el tema. El cuestionario se inicia con la presentación de un problema que supuestamente un estudiante en la escuela primaria (al menos en el grado 6) sería capaz de resolver. El problema es el siguiente: “si dividimos cinco barras de chocolate por igual entre seis niños, ¿qué cantidad de chocolate obtendría cada niño?”. Con el propósito de permitir un espacio para la reflexión, el cuestionario se dividió en dos partes. En la primera parte la tarea consistió en resolver el problema y en la segunda parte se solicitó a los futuros profesores dar sentido a siete producciones de diferentes alumnos para el mismo problema.

Las producciones de los siete alumnos fueron tomadas de investigaciones previas. Jakobsen et al. (2014) señalan que las soluciones de los siete alumnos tienen un razonamiento correcto respaldado por una división representada por dibujos, pero algunas de ellas solo se representan en el registro de dibujo como el de Mariana (figura 43). En el caso de la solución de Mariana, el razonamiento que conduce a la división es correcto, pero no incluye representación numérica de la división efectuada. Una representación numérica correspondiente al dibujo sería: 1/2+1/4+1/12 de una barra.

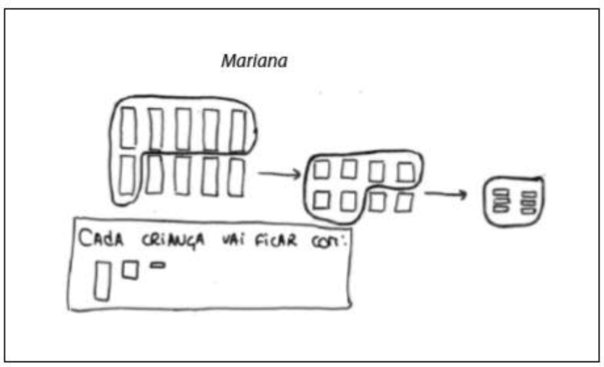


Figura 43. Solución de la alumna Mariana, que dice: “cada niño obtiene:” (Jakobsen et al., 2014)

Jakobsen et al. (2014) señalan que las soluciones de otros alumnos muestran una combinación de dibujos, lenguaje natural y lenguaje numérico y que las respuestas alcanzan diferentes grados de precisión. Por ejemplo, un estudiante dio la siguiente solución: "cada niño obtiene 5/6 de cada barra", lo que significaría que cada niño obtendría 5 barras, lo que es una respuesta incorrecta. La figura 44, muestra que Sofía agrupó de a cinco los rectángulos pequeños rellenándolos con distintos patrones. Cada patrón de relleno se usa para formar la cantidad de chocolate para cada niño. Aunque su dibujo presenta una posible subdivisión de la barra, la respuesta dada no es correcta.

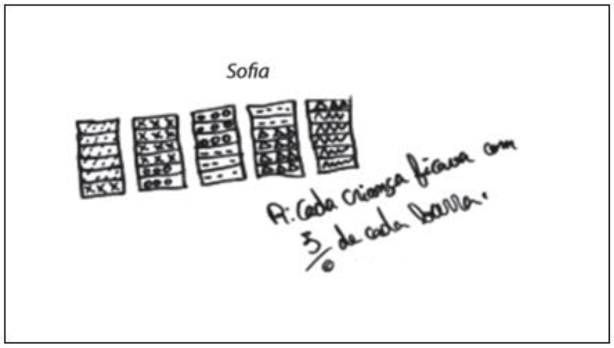


Figura 44. Solución de un alumno que dice: “Cada niño obtiene 5/6 de cada barra” (Jakobsen et al., 2014)

Respecto de la primera parte de la tarea, Jakobsen et al. (2014) clasifican las respuestas de los 49 futuros profesores de primaria en seis categorías de acuerdo con el tipo de representación numérica utilizada (número natural, fracciones diferentes o número decimal), lo que les permite obtener información sobre el conocimiento de los futuros profesores. De los 49 futuros profesores noruegos que participaron, dos de ellos no respondieron la pregunta: “si dividimos cinco barras de chocolate por igual entre seis niños, ¿qué cantidad de chocolate obtendría cada niño?”, pero hicieron algunos comentarios sobre la segunda parte de la tarea, cuando se les dieron las respuestas del alumno. Respecto de las respuestas de los 47 futuros profesores noruegos restantes, algunos de ellos presentaron más de una solución. Las respuestas se agruparon en seis tipos diferentes:

a) La solución indicó que cada niño recibe 5/6 de una barra de chocolate.

b) La solución establece que cada niño recibe 5 piezas de chocolate.

c) La solución establece que cada niño obtiene 0.83.

d) La solución establece que cada niño recibe 1/6 del chocolate.

e) La solución establece que cada niño recibe 5/6 de cada barra de chocolate.

f) Otros intentos de solución que no se ajustan a las categorías anteriores.

La solución a), fue la solución más frecuente, 22 de los 47 futuros profesores tenían esta respuesta como una solución, de ellos 14 tenían esto como la única solución, mientras que ocho lo complementaban con el número decimal 0,83 (solución c). Ocho de ellos presentaron la representación decimal y fraccional sin ninguna explicación sobre cómo y por qué las dos soluciones representaban la misma cantidad. La solución b) fue la segunda solución más frecuente entre los futuros profesores. Una estrategia de solución en esta categoría era dividir cada barra de chocolate en seis piezas "iguales", y luego concluir que tendrían un total de 30 piezas de chocolate, concluyendo que cada niño obtendría 30: 6 = 5 piezas cada una. Cinco de los futuros profesores tenían una solución que encajaba en la categoría d), de estos, tres de ellos tenían esto como la única solución.

Jakobsen et al. (2014) señalan que para la mayoría de los futuros profesores, sus propias respuestas al problema (si dividimos cinco barras de chocolate por igual entre seis niños, ¿qué cantidad de chocolate obtendría cada niño?) involucraron aspectos matemáticos similares a los presentados en las producciones de los alumnos, agregando que los diferentes tipos de respuestas al problema planteado, muestran aspectos que deben enfocarse al comienzo de la formación docente, para elevar su conocimiento de las fracciones.

Van Steenbrugge et al. (2014) analizan el conocimiento de las fracciones de estudiantes para profesor, ellos estudian el conocimiento procedimental y el conocimiento de los subconstructos: parte todo, medida, razón, operador y cociente de las fracciones. Participan del estudio 290 estudiantes para profesores de escuela primaria (184 de primer año y 106 alumnos de último año), matriculados en dos institutos de formación de profesor en Flandes (año académico 2009-2010). Los profesores de las escuelas primarias flamencas son generalistas, por lo tanto, los maestros en prácticas reciben capacitación en todas las materias escolares, incluidas las matemáticas. El grupo total consistió en 43 estudiantes varones y 247 mujeres, lo que es representativo de la población de profesores de Flandes.

Van Steenbrugge et al. (2014) desarrollaron y administraron una prueba para medir la comprensión de las fracciones por parte de los futuros profesores. La primera parte de la prueba incluye 39 preguntas que abordan el conocimiento conceptual de las fracciones, las que se elaboraron en base a estudios previos. La segunda parte de la prueba incluye 13 preguntas que tratan el conocimiento procedimental de las fracciones las cuales se tomaron de libros de texto de matemáticas. Todas las preguntas de la prueba están basadas en el currículo de matemáticas de la escuela primaria. En el momento de la administración de la prueba, a todos los estudiantes para profesor de primer año ya se les había enseñado fracciones; pero no se les había entrenado para enseñar fracciones. A todos los estudiantes de tercer año se les enseñó fracciones y se les entrenó para enseñar fracciones.

Los resultados del estudio de Van Steenbrugge et al. (2014) revelan una jerarquía respecto del nivel de dominio de los cinco subconstructos (parte todo, medida, operador, razón y cociente) por parte de los estudiantes para profesor. Por ejemplo, en la pregunta relativa al subconstructo medida, el 63,10% de los 290 estudiantes no pudo hallar un número ubicado entre 1/8 y 1/9. Algunos estudiantes escribieron una fracción que no se ubicó entre las dos fracciones dadas, otros indicaron explícitamente que no existe una fracción entre 1/8 y 1/9. El 43,44% de los 290 estudiantes no pudo resolver la pregunta, “By how many times should we increase 9 to get 15?”, que interpretamos como “por cuanto debiéramos aumentar 9 para obtener 15? y el 35,52% no pudo ubicar el número uno en una recta numérica cuando se dio el origen y el número mixto 2 ¼. Además, el 35.52% no pudo resolver el problema: "Peter prepara 14 pasteles. Él divide estos pasteles por igual entre sus 6 amigos, ¿cuánto pastel recibe cada uno de ellos? En conclusión, el estudio revela que el conocimiento de los subconstructos de las fracciones por parte de los futuros profesores es insuficiente.

Otro hallazgo del estudio de Van Steenbrugge et al. (2014), revela que los puntajes del conocimiento procedimental fueron significativamente más altos que los puntajes del conocimiento conceptual. Además, se observa que el año de formación docente de los estudiantes no tuvo un impacto significativo sobre el conocimiento procedimental y el conceptual de los futuros profesores, ni en su capacidad para explicar la razón de ser de un procedimiento o del significado conceptual. Los estudiantes para profesor de tercer año no superaron a los de primer año. Los autores del estudio señalan que aunque los hallazgos se refieren solo a dos institutos en Flandes, este resultado cuestiona el impacto de la formación del profesor, considerada un período crucial para obtener una comprensión profunda de las fracciones.

En síntesis, las investigaciones presentadas en la sección 1.3.1.2, muestran que tanto los estudiantes para profesor como profesores en servicio presentan dificultades similares a las identificadas en los alumnos de primaria, reportadas en la sección 1.1.3.1. Hay estudios que muestran las dificultades que presentan futuros profesor en los distintos subcontructos de las fracciones (Jakobsen et al., 2014; Pinto y Ribeiro, 2013; Van Steenbrugge et al., 2014). En general, los estudios revelan la falta de dominio por parte de los profesores en el tema de las fracciones, lo que cuestiona el efecto real de la formación de los profesores de enseñanza primaria.

1.2 Planteamiento del problema de investigación

El conocimiento que los profesores requieren para realizar una enseñanza efectiva en relación con temas matemáticos específicos se ha convertido en un foco de creciente interés, tanto para investigadores que estudian el tema como para autoridades educativas (Pino-Fan, Godino y Font, 2018).

El conocimiento disciplinar y para la enseñanza influye en la calidad de la enseñanza de un profesor, por lo que resulta relevante que la formación inicial docente proporcione los conocimientos requeridos para su práctica profesional. Cabe entonces la pregunta, ¿qué conocimientos permiten que un profesor realice una enseñanza efectiva? En relación al presente trabajo de tesis doctoral, la pregunta es más específica, ¿qué conocimientos permiten a un profesor realizar una enseñanza efectiva sobre las fracciones?

Aunque es obvio que enseñar depende de conocer bien el tema, preguntas sin respuestas sobre el conocimiento específico necesario para enseñar matemáticas siguen preocupando tanto a investigadores como a formadores de profesores (Ball, 2017). En la actualidad, uno de los principales desafíos en la línea de investigación de formación de profesores para enseñar matemáticas es definir el conocimiento profesional requerido para la tarea de enseñar de manera efectiva. Otro desafío es la necesidad de obtener evidencia empírica que vincule la presencia de ciertos conocimientos del profesor con el logro de aprendizaje de los alumnos.

Las investigaciones existentes en países desarrollados muestran que el conocimiento de los profesores sobre la matemática que enseñan tiene un efecto en el aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, en países en desarrollo son escasos los estudios sobre la relación entre el conocimiento de los profesores y el aprendizaje de los alumnos (Cueto, León, Sorto y Miranda, 2017).

Los estudios acerca del efecto del conocimiento del profesor sobre el aprendizaje del alumno han abordado una amplia gama de temas matemáticos, sin centrarse en un tema en particular (Baumert et al., 2010; Carnoy y Arends, 2012; Cueto et al., 2017; Hill, Rowan y Ball, 2005; Marshall et al., 2009; Marshall y Sorto, 2012; Metzler y Woessman, 2012; Tchoshanov, 2011; Tchoshanov et al., 2017). Analizar un tema en profundidad puede permitir detectar las fortalezas y debilidades, tanto de los estudiantes como de los profesores y de las relaciones entre ellas. Desde la perspectiva de lo específico y a partir de la revisión de literatura, la presente investigación explora el conocimiento del profesor como variable explicativa del aprendizaje del alumno, centrándose en la conceptualización de las fracciones.

1.2.1 Relevancia y pertinencia de la investigación

El tema de las fracciones es considerado como uno de los contenidos más relevante, complejo y problemático a tratar en la escuela primaria, tanto a nivel nacional como internacional. Las fracciones se presentan en todos los niveles: enseñanza básica, media y superior. De acuerdo con la Common Core State Standard Initiative (CCSSI, 2010), se espera que los estudiantes de tercer y cuarto grado desarrollen la comprensión de las fracciones como medida; de cuarto a sexto grado adquieran competencia en la aritmética con fracciones y resuelvan problemas; en los grados sexto y séptimo apliquen la aritmética de las fracciones para resolver problemas de proporciones y porcentajes. Más allá de estas pretensiones, muchos estudiantes inclusive algunos con logros destacados muestran escasa competencia con respecto a la comprensión y el uso de las fracciones, después de completar la instrucción primaria (Tian y Siegler, 2017).

En el currículo chileno (Ministerio de Educación, 2012), el estudio de las fracciones se inicia en tercer año de enseñanza básica, nivel en el que se espera que los alumnos sean capaces de explicar que una fracción de uso común representa la parte de un todo y de comparar fracciones con igual denominador. En cuarto año de enseñanza básica se espera que los alumnos expliquen que una fracción representa la parte de un todo o de un grupo de elementos y un lugar en la recta numérica, comparen y ordenen fracciones, resuelvan adiciones y sustracciones de fracciones con igual denominador e identifiquen, escriban y representen fracciones propias y números mixtos hasta el 5. En quinto año de enseñanza básica se espera que los alumnos desarrollen la comprensión de fracciones propias, impropias y equivalentes, y que sean capaces de resolver problemas aplicando adiciones y sustracciones de fracciones propias. En sexto año se espera que los estudiantes sean capaces de comprender las fracciones y los números mixtos, además de resolver adiciones y sustracciones de fracciones propias e impropias y números mixtos con numeradores y denominadores de hasta dos dígitos. Pese a lo que se espera respecto de los aprendizajes señalados sobre el tema de las fracciones, hay investigaciones que muestran que estudiantes chilenos presentan escasa competencia respecto de la conceptualización de las fracciones (Olfos, 2011; Olfos et al., 2014).

El National Mathematics Advisory Panel (2008) indica que la dificultad en el aprendizaje de las fracciones es un fenómeno generalizado y un inconveniente para nuevos avances en matemáticas y otros dominios que dependen de las matemáticas, incluyendo el Algebra. En concordancia con esta información, varias investigaciones proporcionan evidencia de relaciones predictivas entre la comprensión de las fracciones y el aprendizaje del Álgebra, aprendizaje que conforma una base fundamental en la matemática de formación superior (Siegler et al., 2012; Siegler, Fazio, Bailey y Zhou, 2013; Torbeyns, Schneider, Xin y Siegler, 2015). Un estudio con datos representativos de los Estados Unidos y el Reino Unido, reveló que el conocimiento de las fracciones de estudiantes de primaria, predice el conocimiento del Álgebra y el rendimiento de matemáticas en la escuela secundaria, cinco o seis años más tarde, incluso después de controlar estadísticamente el coeficiente intelectual, la memoria de trabajo, el nivel educacional y el nivel socioeconómico de la familia de los estudiantes, además de otros tipos de conocimientos matemáticos (Siegler et al., 2012).

Así, la comprensión de las fracciones es un componente crítico en el aprendizaje de la matemática y una puerta de entrada a muchas ocupaciones, la importancia de las fracciones se extiende más allá de las clases de matemáticas y más allá de los años escolares. Las fracciones son importantes para las ciencias físicas, biológicas, sociales y para una amplia gama de ocupaciones que no requieren matemática avanzada, incluyendo enfermería, carpintería y mecánica automotriz (Tian y Siegler, 2017).

La pertinencia de la investigación está dada tanto por las dificultades que se presentan en el aprendizaje de las fracciones, como por la importancia del conocimiento de los profesores en atención al logro de los aprendizajes de los estudiantes. Diversos investigadores señalan que tanto el conocimiento disciplinar como el conocimiento para la enseñanza de los profesores tiene un efecto sobre el logro de aprendizaje de los alumnos (Baumert et al., 2010; Carnoy y Arends, 2012; Cueto et al., 2017; Hill, Rowan y Ball, 2005; Marshall et al., 2009; Marshall y Sorto, 2012; Metzler y Woessman, 2012; Tchoshanov, 2011; Tchoshanov et al., 2017). Estos estudios no se han focalizado en un tema en particular por lo que resulta pertinente estudiar la influencia del conocimiento del profesor sobre el rendimiento de los estudiantes centrado en la conceptualización de las fracciones. En consecuencia, el estudio resulta ser relevante, pertinente y de interés para la didáctica de la matemática.

1.2.2 Preguntas que orientan la investigación

A partir de la revisión de literatura, el presente estudio se enfoca en dos tipos de conocimientos del profesor, el "conocimiento profundo de las fracciones" y el "conocimiento sobre la enseñanza de las fracciones" (Rodríguez, 2012).

Las preguntas que guían la presente investigación son:

1. ¿Influye el conocimiento del profesor en el aprendizaje de las fracciones en alumnos de cuarto grado, de establecimientos educacionales de las ciudades de La Serena y Coquimbo?
2. ¿Influye el conocimiento profundo del profesor en el aprendizaje de las fracciones en alumnos de cuarto grado, de establecimientos educacionales de las ciudades de La Serena y Coquimbo?
3. ¿Influye el conocimiento sobre la enseñanza de las fracciones del profesor en el aprendizaje de las fracciones en alumnos de cuarto grado, de establecimientos educacionales de las ciudades de La Serena y Coquimbo?

1.2.3 Objetivos General y específicos de la investigación

Objetivo general:

Determinar en qué medida el conocimiento del profesor se constituye en variable explicativa del aprendizaje de las fracciones en alumnos de cuarto grado.

Objetivos específicos:

1. Explorar en qué medida el conocimiento del profesor acerca de las fracciones, en asociación con el nivel socioeconómico de la escuela, los conocimientos previos de los alumnos y el nivel de conocimientos en matemáticas que se alcanza en las escuelas

(SIMCE), contribuye al conocimiento que alcanzan los alumnos en la conceptualización de las fracciones en cuarto grado.

2. Explorar en qué medida el conocimiento profundo del profesor acerca de las fracciones, ajustados por el nivel socioeconómico y el nivel de conocimientos en matemáticas que se alcanza en las escuelas (SIMCE), influye sobre el aprendizaje de las fracciones en alumnos de cuarto grado.
3. Explorar en qué medida el conocimiento sobre la enseñanza de las fracciones, ajustados por el nivel socioeconómico y el nivel de conocimientos en matemáticas que se alcanza en las escuelas (SIMCE), influye sobre el aprendizaje de las fracciones en alumnos de cuarto grado.

Capítulo 2

Marco teórico de la investigación

Índice del capítulo

CAPÍTULO 2. Marco teórico de la investigación

Marco teórico de la investigación

2.1 Antecedentes sobre el Conocimiento para la Enseñanza de las matemáticas

En 1983 Shulman dictó una conferencia en la Universidad de Texas y reflexionó sobre lo que él tituló "El paradigma perdido en investigación para la enseñanza" señalando que ese paradigma era el de la materia de estudio y su interacción con la pedagogía llevada a cabo por los profesores. Hasta ese entonces las investigaciones se habían enfocado en las formas de comportamiento del profesor más que en su pensamiento. Por otra parte, la psicología cognitiva del aprendizaje se había enfocado en los aprendices ignorando los tópicos relacionados con los profesores (Garritz y Trinidad-Velasco, 2004). Para abordar esta problemática Shulman (1986) planteó las siguientes preguntas ¿Cómo los profesores toman una parte de un texto y lo transforman de manera que sea comprensible para sus estudiantes? ¿Cuáles son las fuentes de analogías, metáforas, ejemplos, demostraciones y reformulaciones que el profesor usa en el aula?

Shulman (1986) es pionero en distinguir categorías de contenidos, enfocadas en los conocimientos que desarrollan los profesores para enseñar, él distingue el Conocimiento del Contenido (CK, por sus siglas en inglés), Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK, por sus siglas en Inglés) y conocimiento curricular. De estas tres categorías, el PCK ha captado un alto interés por los investigadores. Shulman (1986, p. 9) identifica el PCK como "la forma particular del conocimiento que incorpora los aspectos del contenido más pertinentes a su enseñanza"; y posteriormente Shulman (1987, p. 8), lo identifica como "esa amalgama especial de contenido y pedagogía que es el campo propio de los profesores, su forma especial de comprensión profesional". La idea principal del PCK radica en la enseñanza, que incluye saber cómo representar el contenido para que otros lo entiendan, además de la comprensión de lo que hace que el aprendizaje de un tema específico sea fácil o difícil.

Shulman (1986, p. 9) define CK como "la cantidad y organización del conocimiento *per se* en la mente de los maestros" y el conocimiento curricular involucra saber cómo se organizan los temas, tanto dentro de un año escolar como a lo largo del tiempo y el conocimiento de la variedad de materiales de enseñanza disponibles en relación con los programas de estudio.

Posteriormente Shulman (1987) presenta siete categorías: conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico general, conocimiento del currículo, conocimiento pedagógico del contenido, conocimiento de los aprendices y de sus características, conocimiento de los contextos educativos, y conocimiento de los fines educativos. Shulman pone énfasis en el conocimiento de los profesores, en las múltiples maneras que ellos presentan el contenido a sus estudiantes. Tal conocimiento se basa en la comprensión de los contenidos de los profesores, y cómo esos contenidos se transforman de manera que sean comprensible para los estudiantes. Chevallard (1991) maneja un concepto similar al PCK, el de transposición didáctica: Un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre modificaciones adaptativas que lo hacen apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. La similitud del PCK y la transposición didáctica es que ambas ponen el foco en la enseñanza de un contenido (Garritz y Trinidad-Velasco, 2004).

El proyecto del equipo de Shulman, puede ser catalogado como un Programa de Investigación Lakatosiano cuyo propósito fue desarrollar un marco teórico que permitiera describir los componentes del "conocimiento base" para la enseñanza. De este modo, se convierte en marco epistemológico para la investigación en didácticas específicas (Bolívar, 1993; 2005).

2.1.1 El conocimiento matemático para la enseñanza

Desde la importante contribución de los trabajos de Shulman (1986, 1987) varios investigadores han mostrado diversas conceptualizaciones, acerca de lo que los profesores necesitan saber para enseñar matemáticas (Ball, 1990; Ball, 2000; Ball, Hill y Bass, 2005; Ball, Thames y Phelps, 2008; Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013; Hill, Ball y Schilling, 2008; Krauss, 2007; Ma, 1999; Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005; Sánchez, 2011).

Ma (1999) alineada con la conceptualización de Shulman (1986) realiza un estudio de corte cualitativo en el que compara el conocimiento que ponen en juego en la tarea de enseñar profesores chinos y norteamericanos. En su trabajo se evidencia que los profesores chinos del nivel primario disponen de un conocimiento profundo y sustancial del contenido matemático, claramente mayor que el de los profesores norteamericanos; esto es, una Comprensión Profunda de las Matemáticas Fundamentales (CPMF), que contribuiría a explicar el éxito de los estudiantes chinos por sobre los estudiantes norteamericanos en las pruebas internacionales. Un profesor con CPMF posee un conocimiento profundo del currículo escolar, conceptual e interconectado, un conocimiento del contenido matemático que "va más allá de poder calcular en forma correcta y dar fundamentos para algoritmos de cálculo” (Ma, 2010, p. 9).

Según Ma (1999), los profesores deben conocer bien las matemáticas que enseñan cada día, sentir seguridad y comodidad al referirse a los contenidos, es decir, un conocimiento esencialmente matemático. En su estudio la noción de CPMF se muestra habilitadora del conocimiento didáctico del contenido matemático. El marco de la CPMF tiene las siguientes cuatro propiedades:

Conectividad: El conocimiento del profesor debe estar completamente conectado, debe ser capaz de ver como los conceptos matemáticos se relacionan entre sí. El profesor siente que es necesario enfatizar y hacer conexiones explícitas entre los conceptos y los procedimientos que los estudiantes están aprendiendo. Para evitar una experiencia fragmentada de temas aislados en matemáticas, estos maestros tratan de presentar un "cuerpo unificado de conocimiento" (Ma, 1999, p.122).

Múltiples Perspectivas: El conocimiento del profesor le permite acercarse a la matemática de diversas maneras, lo que significa que el profesor debe tener un completo conocimiento de cada tema matemático que enseña. Los profesores harán hincapié en la idea de que son posibles múltiples soluciones, pero también hacen hincapié en las ventajas y desventajas del uso de ciertos métodos en determinadas situaciones. El objetivo es dar a los estudiantes una comprensión flexible del contenido.

Ideas básicas: El conocimiento del profesor le permite comprender que las matemáticas fundamentales se componen de ideas básicas, las cuales se repiten a lo largo del aprendizaje de las matemáticas. Los profesores deben construir una base sólida sobre la que se construirá el futuro aprendizaje de sus alumnos.

Coherencia Longitudinal: El profesor debe saber que el conocimiento se construye sobre el conocimiento anterior. Los profesores CPMF están conscientes de todo el currículo elemental (y no sólo a los grados que están enseñando o han enseñado). Estos maestros saben de dónde vienen sus alumnos y hacia dónde se dirigen en el currículo de matemáticas. Por lo tanto, se darán la oportunidad de revisar lo que ellos sienten que son "piezas claves" en los paquetes de conocimientos, o sentar las bases adecuadas para algo que será aprendido en el futuro. De esta forma, Ma ofrece el marco CPMF para captar el contenido matemático necesario para comprender e instruir el pensamiento de los escolares.

Rowland et al. (2005) realizan un estudio acerca del conocimiento del contenido matemático de profesores en formación de educación primaria del Reino Unido, analizan 24 videos de sesiones de aula de 149 profesores principiantes que impartieron clases a estudiantes de tres a ocho años de edad y de siete a once años de edad. El objetivo de esta investigación fue localizar las formas en que se funda el conocimiento y la enseñanza del profesor de matemática. A los profesores participantes se les pide una copia de la planificación de la clase observada. El investigador/observador escribe un extracto de la lección (400-500 palabras) relatando lo que sucedió en la clase. La investigación de Rowland y colaboradores surge del análisis de datos que llevó a la identificación de un "cuarteto de conocimiento", con cuatro dimensiones o unidades, a través de los cuales se puede observar los conocimientos matemáticos y didácticos puestos en práctica de estos profesores principiantes. De esta forma surge el modelo el cuarteto de Conocimiento (*The Knowledge Quartet* – KQ) cuyas dimensiones o unidades se denominan: fundamento, transformación, conexión y contingencia (figura 45).

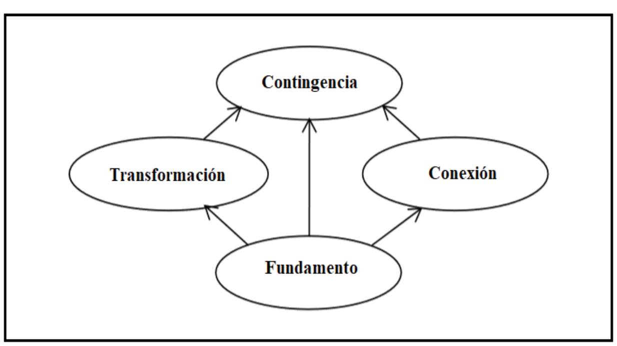


Figura 45. Modelo el cuarteto de Conocimiento (Rowland et al., 2005)

El fundamento es la primera dimensión del modelo KQ y tiene sus raíces en la fundamentación de los antecedentes teóricos y en las creencias de los alumnos en práctica. Se refiere al conocimiento, la comprensión y al aprendizaje de los alumnos practicantes antes y después de la academia, en la preparación intencionadamente o no, de su rol en el aula. Esta dimensión se diferencia de las otras tres dimensiones en el sentido de que se trata del conocimiento que poseen. Las componentes clave de este marco conceptual son: el conocimiento y la comprensión de las matemáticas. Esta categoría que Rowland y colaboradores denominan "fundamento" coincide con lo que Shulman (1987) llama "comprensión".

Las tres categorías restantes, se diferencian de la primera debido a que estas se refieren a las formas y contextos en los que el conocimiento influye en la preparación y desarrollo de la enseñanza. Estas categorías se centran en el conocimiento en acción que se demuestra tanto en la planificación como en el acto de enseñar. En el caso de la transformación se basa en la observación de Shulman de los conocimientos para la enseñanza caracterizado por la capacidad de un maestro para transformar el conocimiento que posee de manera que sean pedagógicamente poderoso. Esta caracterización se pone de manifiesto en la redacción de Ball que distingue entre saber algo de matemáticas "para sí mismo" con la finalidad de poder ayudar a otra persona a aprenderlo. Como indica Shulman (1986), el exponer ideas a los alumnos implica representarlas en forma de analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones. Esto incluye el uso de ejemplos para ayudar a la formación de conceptos, para demostrar los procedimientos, y la selección de actividades para los estudiantes.

La siguiente dimensión denominada Conexión se refiere a la coherencia en la planificación o la enseñanza que se muestra a través de un episodio, una clase o una serie de clases. La

Matemáticas es notable por su coherencia como un cuerpo de conocimiento y como un campo de investigación. En una discusión de "comprensión profunda de las matemáticas fundamentales", Duckworth señala que "profundidad" y "amplitud" intelectual es cuestión de hacer conexiones (Ma, 1999). Además de la integridad de los contenidos matemáticos en la mente del maestro y su gestión a través del discurso matemático en el aula, la concepción de la coherencia incluye la secuenciación de los temas de instrucción dentro y entre las clases, incluyendo el orden de tareas y ejercicios. En gran medida, estos reflejan las decisiones que implican no sólo el conocimiento de las conexiones estructurales dentro de las matemáticas mismas, sino también el conocimiento de las demandas cognitivas relativas a diferentes temas y tareas.

La cuarta dimensión denominada contingencia se refiere a lo que es casi imposible de planificar. Los dos componentes que constituyen esta categoría se derivan de los datos y son la preparación para responder a las ideas de los niños y la preparación en caso de tener que desviarse de la planificación. Shulman (1987) propone que la enseñanza generalmente comienza a partir de algún tipo de texto, un programa de estudios, en última instancia, una secuencia de acciones planificadas, destinados a ser llevado a cabo por el profesor dentro de una lección o unidad de algún tipo. Mientras que el estímulo para la enseñanza de los profesores puede ser planificado, algunas de las respuestas de los estudiantes no se pueden prever. Una visión constructivista del aprendizaje proporciona una perspectiva valiosa sobre las contribuciones de los niños dentro de las clases. Cuando un niño articula una idea, esto apunta a la naturaleza de su construcción del conocimiento, que puede o no puede ser exactamente lo que el profesor anticipó.

Al reflexionar respecto de las cuatro dimensiones presentadas en el modelo de Rowland et al. (2005) surgen ciertas interrogantes. Si el Fundamento se refiere al conocimiento y las comprensiones adquiridas antes y durante la formación Universitaria de los profesores, es válido cuestionar si el profesor practicante tiene un sólido conocimiento de las matemáticas que va a enseñar, ¿Puede este conocimiento ser suficiente o necesario para lograr aprendizaje en los alumnos?, tras esta interrogante ¿Puede el profesor realizar una adecuada transformación de sus conocimientos? ¿Puede el profesor responder a situaciones inesperadas que ocurren en el aula? ¿Qué tipo de conocimientos necesita? Hay investigaciones que han puesto de manifiesto la insuficiencia de conocimiento procedimental, instrumental de profesores, incluso de temas elementales para la enseñanza de la matemática (Ball 1990; Ma, 1999). Aludiendo a Ma (1999) ¿Puede un profesor realizar conexiones o responder a preguntas de sus alumnos que no están planificadas sin tener una comprensión profunda de las matemáticas fundamentales?

Pareciera ser que la fluidez de estas cuatro dimensiones se dará si el profesor tiene una comprensión profunda de las matemáticas elementales, pero sin duda que existen otros conocimientos que permiten realizar una enseñanza efectiva, el tema es de real importancia debido al creciente interés que existe en la actualidad por detectar cuáles son esos conocimientos matemáticos y didácticos que permiten enseñar de manera que los alumnos puedan aprender. El marco conceptual de Rowland et al. (2005) introduce un instrumento útil para observar, describir y reflexionar sobre cómo el conocimiento matemático y didáctico del profesor de educación primaria entra en juego en el aula, es decir, cómo lo implementa en su práctica.

El estudio de Rowland y colaboradores tiene la fortaleza de investigar la práctica de los profesores, considerando que los trabajos en esta línea de investigación ponen énfasis en la importancia de estudiar el conocimiento profesional de los docentes en el día a día de lo que ocurre en sus aulas, esto puede contribuir a identificar desde la práctica el dominio de los conocimiento necesarios para enseñar y posteriormente ofrecer un indicador, algo que oriente a los profesores de tal forma que puedan adquirir este tipo de conocimientos y de esa forma evidenciar si esos son los conocimientos requeridos para la tarea de enseñar matemática de manera efectiva, como también sería útil investigar cuál de las dimensiones del cuarteto de conocimiento KQ, son mejores predictores del rendimiento estudiantil. Así, por ejemplo, si el fundamento o la contingencia son mejores predictores se podría dirigir los esfuerzos a mejorar este tipo de conocimiento en los profesores.

De manera análoga al estudio de Rowland et al. (2005), Ball et al. (2005) sobre la base de muchos estudios de casos distinguen cuatro categorías del conocimientos, a saber, el conocimiento común del contenido, el conocimiento especializado del contenido, el conocimiento del contenido y de los estudiantes y el conocimiento del contenido y de la enseñanza. Con posterioridad Ball et al. (2008) señalan que en el pasado, el enfoque de aquello que los profesores necesitaban saber condujo a una serie de posiciones, cada una de ellas con sus propios argumentos. Actualmente se ha establecido como primera hipótesis que los profesores necesitan saber, lo que está en el plan de estudios, más un número adicional de años de estudios universitarios en matemáticas. Una segunda hipótesis es que los profesores necesitan conocer el plan de estudios, pero "más profundo", además de una cierta cantidad de conocimientos pedagógicos del contenido y advierten que en ambos casos, no está claro qué es exactamente lo que constituye el conocimiento adicional de las matemáticas.

Una pregunta central que guía la investigación de Ball y colaboradores es ¿Qué necesitan saber los docentes para ser capaz de enseñar de manera efectiva?, esta es una pregunta que podría ser investigada tomando varios caminos, examinando los planes de estudio, pedir a los matemáticos expertos y educadores de las matemáticas identificar el núcleo de las nociones matemáticas y habilidades que los docentes debiesen desarrollar, o mediante la revisión de investigación referente a los estudiantes, conocer aquellos aspectos de las matemáticas en que los alumnos tienen dificultades (Stylianides y Ball, 2004).

En el año 2008, Debora Ball y el equipo de la Universidad de Michigan, concentrados en torno al proyecto Learning Mathematics for Teaching (LMT), a través del estudio de la práctica de profesores de primaria lograron caracterizar con detalle el conocimiento requerido para enseñar matemática; y han señalado que el PCK de los profesores es un significativo predictor de los logros de aprendizaje matemático de los alumnos. La figura 46 muestra la propuesta del modelo de conocimiento matemático para la enseñaza (MKT) originado en el proyecto LMT (Aprendizaje de la matemática para la enseñanza) de la Universidad de Michigan (Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008).

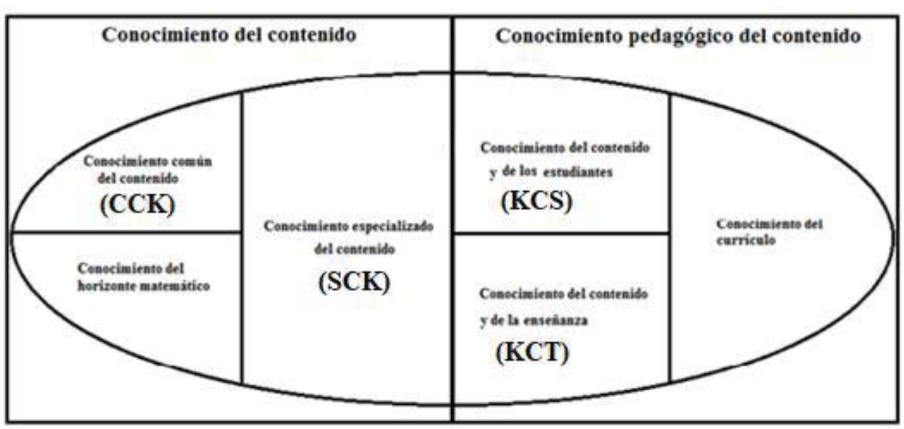


Figura 46. Modelo del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT)

El modelo MKT se divide en dos dominios del conocimiento: el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido. El lado izquierdo del óvalo muestra “conocimiento del contenido” que se encuentra fuera de la conceptualización del PCK de Shulman y contiene:

Conocimiento común del contenido (Common Content Knowledge – CCK) se describe como el conocimiento que toda persona educada debiese tener, operar correctamente, conocer definiciones, propiedades, teoremas, es decir, el conocimiento que se utiliza en muchas otras profesiones u ocupaciones que también utilizan las matemáticas.

Conocimiento especializado del contenido (Specialized Content Knowledge – SCK) que permite a los maestros participar en tareas específicas de enseñanza, por ejemplo elegir y usar representaciones eficaces para enseñar, incluir la precisión de las ideas matemáticas, dar explicaciones matemáticas de reglas y procedimientos comunes. Examinar y entender los métodos inusuales de resolución a problemas (Ball et al., 2005).

Conocimiento del horizonte matemático se refiere a los conocimientos de las conexiones con contenidos anteriores y posteriores, así como conocimientos de los principios del conocimiento matemático. Por ejemplo, conectar la división con la teoría de la divisibilidad en Z (Climent, Romero-Cortés, Muñoz- Catalán y Contreras, 2013).

Hill et al. (2008) contribuyendo a precisar este conocimiento, establecen tres categorías del PCK propuesto por Shulman. El lado derecho del óvalo del modelo MKT muestra conocimientos asociados al PCK y contiene:

Conocimiento del contenido y los estudiantes (Knowledge of Content and Students – KCS) es el conocimiento que los profesores tienen de sus alumnos en relación a su saber matemático, conocer el razonamiento de los aprendices, sus errores típicos, sus dificultades, sus estrategias más frecuentes en relación a tópicos de la matemática.

Conocimiento del contenido y de la enseñanza (Knowledge of Content and teaching – KCT) es el conocimiento mediante el cual el profesor sabe construir a partir del razonamiento de los estudiantes estrategias adecuadas para lograr aprendizaje y para tratar de corregir sus concepciones erróneas.

Conocimiento del currículum se refiere al conocimiento de los cursos en donde se imparten los distintos contenidos y materiales curriculares, por ejemplo, saber en qué curso se inicia la división. (Climent et al., 2013).

En la actualidad el modelo MKT de Ball et al. (2008) se ha convertido en un importante referente a nivel internacional. Sin embargo, los autores del MKT han señalado que se requiere una mayor precisión en la naturaleza de cada subdominio del conocimiento del profesor. Atendiendo a esta necesidad, Carrillo y su grupo de investigación de la Universidad de Huelva han precisado algunos aspectos del modelo MKT y han considerado el carácter especializado del modelo completo, no solamente de uno de sus subdominios, redefinen el modelo MKT dando origen al modelo MTSK: conocimiento especializado del profesor de matemáticas (Carrillo et al, 2013).

Carrillo et al. (2013) toman como sustento teórico las nociones de Shulman (1986) y de Ball et al. (2008) y destacan la importancia que tiene diferenciar entre el conocimiento matemático para la enseñanza y el conocimiento matemático que tienen otros profesionales. Carrillo y su grupo de investigación de la Universidad de Huelva, presentan el modelo MTSK cuyo propósito es avanzar en el análisis y la conceptualización del conocimiento específico que el profesor tiene o puede tener para la enseñanza de las matemáticas (figura 47).

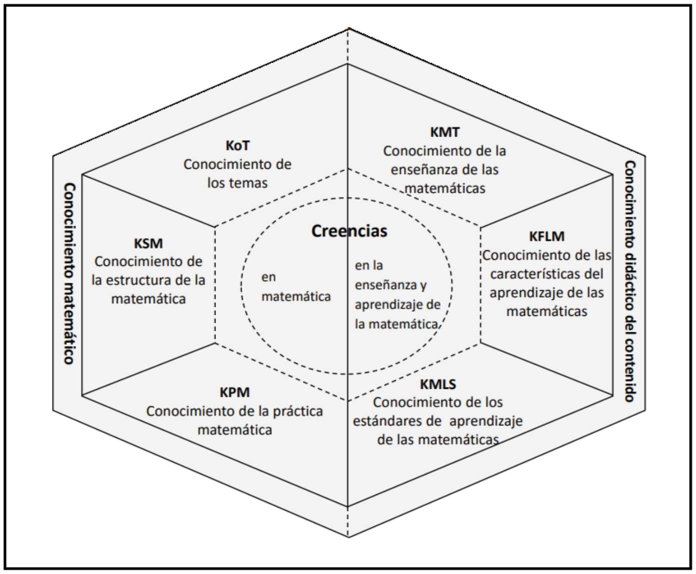


Figura 47. Modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK)

Aguilar et al. (2013) explican los subdominios del conocimiento del contenido matemático CK:

Conocimiento de los Temas: aspectos fenomenológicos, significados, definiciones, ejemplos, que caractericen aspectos del tema abordado, además de referirse al contenido disciplinar de las matemáticas que figura en manuales y textos matemáticos.

Conocimiento de la Estructura de la Matemática: sistema integrado de conexiones que le permita comprender y desarrollar conceptos avanzados desde una perspectiva elemental y conceptos elementales mediante el tratamiento a través de una visión avanzada.

Conocimiento de la Práctica Matemática: conocimiento de las formas de conocer, crear o producir en matemáticas, conocimiento de aspectos de la comunicación matemática, del razonamiento y la prueba. Saber, por ejemplo, qué es definir y cómo usar definiciones.

Aguilar et al. (2013) explican los subdominios del conocimiento didáctico del contenido PCK:

Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas: distintas estrategias que permitan al profesor fomentar un desarrollo de las capacidades matemáticas procedimentales o conceptuales. Conocer la potencialidad de recursos, ejemplos o modos de representación para hacer comprensible un contenido determinado.

Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas: características del proceso de comprensión de los estudiantes sobre los distintos contenidos, del lenguaje asociado a cada concepto, así como de errores, dificultades u obstáculos posibles.

Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas: conocimiento acerca de lo que el estudiante debe/puede alcanzar en un curso escolar determinado; conocimiento de las capacidades conceptuales, procedimentales y de razonamiento matemático que se promueve en determinados momentos educativos. Consideramos, además de lo prescrito en el currículo institucional, lo que proviene de las investigaciones y de las opiniones de profesores expertos acerca de logros de aprendizaje.

Así, la litertatura muestra que los investigadores han avanzado en la caracterización del dominio de conocimientos que los profesores requieren para la enseñanza de las matemáticas.

2.1.2 El conocimiento profundo sobre las fracciones

Ma (1999) comparó el conocimiento que ponen en juego en la tarea de enseñar profesores norteamericanos y chinos. En su estudio, Ma (1999) analiza el tipo de comprensión que distingue a los dos grupos de profesores uno es procedimental, es decir, saber cómo realizar un algoritmo y el otro es conceptual, es decir, saber por qué tiene sentido matemáticamente realizar ese algoritmo. Ma considera que los profesores deben poseer un conocimiento profundo del currículo escolar, conceptual y conectado.

En general en el campo de la cognición matemática existe cierto acuerdo en diferenciar dos tipos de conocimientos: el procedimental y el conceptual. Rittle-Johnson, Siegler y Alibali (2001) definen el conocimiento procedimental como la capacidad de ejecutar pasos para resolver rutinas de tareas, y conocimiento conceptual como una "comprensión implícita o explícita, de los principios que rigen un dominio y de las interrelaciones entre unidades de conocimiento en un dominio" (p. 346).

Pero ¿Qué significa tener un conocimiento conceptual de las fracciones? varios investigadores proponen que el conocimiento conceptual de las fracciones incluye la comprensión de sus diferentes significados tales como parte todo, cociente, operador, razón y medida (Behr, Harel, Post y Lesh, 1992; Escolano y Gairín, 2005; Kieren, 1993). En base a estos estudios Gallardo, González y Quispe (2008, p. 362) distinguen los distintos significados de las fracciones:

> *Parte-todo*. Significado que se manifiesta al concebir a la fracción *a/b* como la relación existente entre dos cantidades específicas: un "todo" o unidad *b* (continua o discreta), representando un número total de partes iguales, y una "parte" *a*, destacando un número particular de esas partes iguales tomadas del total.
>
> *Cociente.* Significado que enfatiza la fracción *a/b* como la operación de dividir un número natural entre otro no nulo. En este caso, la fracción es el resultado de una situación de reparto donde se busca conocer el tamaño de cada una de las partes resultantes al distribuir *a* unidades en *b* partes iguales.
>
> *Medida.* Significado que tiene su origen en medir cantidades de magnitudes que, siendo conmensurables, no se corresponden con un múltiplo entero de la unidad de medida. La fracción *a/b* emerge entonces de la necesidad natural de dividir la unidad

de medida en *b* subunidades iguales y de tomar *a* de ellas hasta completar la cantidad exacta deseada.

Razón. Este significado muestra a la fracción como índice comparativo entre dos cantidades o conjuntos de unidades. La fracción *a/b* como razón evidencia la comparación bidireccional entre los valores *a* y *b*, siendo esencial el orden en el que se citan las magnitudes comparadas: si la relación de A respecto de B es *a/b*, entonces B es *a/b* respecto de A.

Operador. Significado que hace actuar a la fracción como transformador o función de cambio de un determinado estado inicial. Así, la fracción *a/b* empleada como operador es el número que modifica un valor particular *n* multiplicándolo por *a* y dividiéndolo por *b*. Los porcentajes, por ejemplo, son un caso particular de fracción como operador.

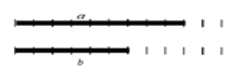
Gallardo et al. (2008) realizaron un estudio de corte cualitativo en el que participaron profesores en formación, quienes resolvieron ejemplos de los significados de fracción: parte-todo, en sus contextos continuo y discreto, cociente, medida, razón y operador, respectivamente (Tabla 3).

El estudio de Gallardo et al. (2008) proporciona un método para la organización de situaciones matemáticas, así como una referencia objetiva con la que es posible enfrentar la interpretación en términos de comprensión de las acciones de los estudiantes.

Varios estudios han considerado a las fracciones como una relación parte-todo, un cociente, un operador, una razón y una medida. La tabla 4, muestra ejemplos de diferentes tareas que evalúan los distintos significados de las fracciones.

Tabla 3

*Ejemplos de tareas asociadas a los significados de la fracción**

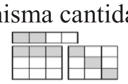
Parte-todo (continuo)	Si divido una barra de chocolate en cuatro trozos iguales y tomo tres, ¿qué significado matemático tiene para usted la acción de tomar tres de un total de cuatro trozos?
Parte-todo (discreto)	Si en una reunión de amigos son tres chicos y cuatro chicas, ¿qué parte del grupo de amigos son chicos?
Cociente	Tres amigos quieren repartirse cinco chocolates de manera equitativa, ¿cuánto chocolate corresponde a cada uno de los amigos?
Medida	De la observación de la figura. ¿Qué parte de *a* es *b*? 
Razón	En una mesa hay nueve libros de los cuales cinco son de matemáticas y cuatro de investigación, ¿qué se puede decir del número de libros de investigación respecto al número de libros de matemática?
Operador	En un salón de los 35 alumnos aprueban matemática los $\frac{4}{5}$, ¿cuántos aprueban matemática? ¿Qué significado matemático tiene aquí la fracción $\frac{4}{5}$?

*Nota Fuente: Distribución de las tareas atendiendo a los significados de la fracción, (modificada desde Gallardo et al., 2008)

Varios investigadores señalan que el conocimiento conceptual de las fracciones es un factor que explica el aprendizaje de matemáticas más avanzadas. Por ejemplo, Byrnes y Wasik (1991) mostraron que el conocimiento conceptual de las fracciones explica el aprendizaje de la capacidad de realizar procedimientos de adición y multiplicación con fracciones. Por ejemplo, indican que los niños con alto conocimiento conceptual sobre las fracciones detectarían el error de sumar numerador con numerador y denominador con denominador $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}\right)$ corrigiéndose a sí mismos, porque notarían que la respuesta es una cantidad menor que uno de los sumandos. Byrnes y Wasik (1991) señalan que el conocimiento conceptual hace posible la construcción de nuevos procedimientos. La aplicación de procedimientos en ocasiones produce resultados que deben ser explicados y al tratar de explicar tales resultados, el conocimiento conceptual se enriquece. Por lo tanto, los conocimientos conceptual y procedimental se afectan mutuamente a lo largo del tiempo. Lo cual sugiere que si existen altos niveles de conocimiento conceptual, los procedimientos se realizarán correctamente.

Tabla 4

*Principales tareas utilizadas para la medición de los diferentes sentidos de las fracciones **

Significado	Ejemplo	Estudios que la utilizaron
Parte-todo	Indique el número fraccionario que representa este gráfico 	Byrnes y Wasik (1991); Hetch y Vagi (2010; 2012); Osana y Pitsolantis (2013)
	Represente en el siguiente cuadrado la fracción $\frac{3}{4}$ 	Fuchs et al. (2013; 2014); Hallett, Nunes y Bryant (2010); Hallett, Nunes, Bryant y Thorpe (2012); Hecht y Vagi (2010; 2012); Osana y Pitsolantis (2013)
	Indique cuáles de los siguientes gráficos representan la misma cantidad 	Byrnes y Wasik (1991)
Medida	Escriba un numero fraccionario que se sitúe entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{4}$	Rittle-Johnson, Siegler y Alibali (2001).
	Indique una fracción equivalente a $\frac{4}{8}$	Hallet et al. (2010; 2012); Rittle-Johnson, Siegler y Alibali (2001).
	-2____-1____0____+1____+2 Ubique los números $\frac{1}{2}$; $\frac{8}{4}$; $-\frac{3}{4}$	Charalambous y Pitta-Pantazi (2007); Fuchs et al. (2013; 2014); Hallet et al. (2010)
	Señale el número de mayor valor ¿$\frac{1}{2}$ vs. 1? ¿$\frac{4}{2}$ vs. 2? ¿$\frac{2}{4}$ vs. $\frac{2}{16}$?	Fuchs et al. (2013); Hallet et al. (2010; 2012); Hetch y Vagi (2010; 2012); Rittle-Johnson, Siegler y Alibali (2001).
Razón	Ocho niñas se reparten tres pizzas mientras que tres niños se reparten una pizza. ¿Quiénes comerán más pizza, los niños o las niñas?	Byrnes y Wasik (1991); Charalambous y Pitta-Pantazi (2007); Hallet et al. (2012)
Operador	Sin efectuar el cálculo, señale si el siguiente enunciado es correcto: "Si se divide un número por cuatro y luego se multiplica el mismo por tres se obtendría el mismo resultado que si multiplicáramos tal número por 3/4".	Charalambous y Pitta-Pantazi (2007)
Cociente	Decida si la siguiente afirmación es correcta "2/3 es igual al resultado de 2 divido en 3"	Charalambous y Pitta-Pantazi (2007); Osana y Pitsolantis (2013)

*Fuente: Tabla modificada desde Stelzer, Andrés, Canet Juric, Introzzi y Urquijo (2016).

De manera análoga al estudio de Byrnes y Wasik (1991), los hallazgos del estudio de Charalambous y Pitta-Pantazi (2007) indican que el conocimiento conceptual, en este caso una comprensión profunda de los diferentes significados de las fracciones, puede elevar el rendimiento de los estudiantes en tareas relacionadas con las operaciones. Es decir, el conocimiento conceptual puede predecir el desempeño procedimental. Estos hallazgos sugieren que, en vez de apresurarse para proporcionar a los estudiantes diferentes algoritmos para ejecutar operaciones con fracciones, los profesores deberían poner énfasis en la comprensión de fracciones.

Fuchs et al. (2013) señalan que aunque se ha demostrado que el conocimiento conceptual interviene en el desarrollo del procedimental y viceversa, el conocimiento conceptual tiende a tener un efecto mayor sobre el desarrollo del conocimiento procedimental que al revés. El enfoque principal del estudio de Fuchs et al. (2013) fue la interpretación de la fracción como medida, a pesar de que es una forma menos intuitiva que la interpretación parte todo. Los resultados de su estudio muestran que en cuarto grado la instrucción centrada en el sentido de medida, producía un mayor aprendizaje de la capacidad de efectuar cálculos aritméticos con fracciones, respecto de la instrucción centrada en el sentido de las fracciones como parte-todo.

Fuchs et al. (2014) señalan que en Estados Unidos, el curriculum en cuarto grado presenta las fracciones asociadas a dos subconstructos. Uno se refiere a la comprensión de la relación parte-todo, con la cual los niños entienden una fracción como una o más partes de un objeto (por ejemplo, cinco partes de una pizza) o un subconjunto de un grupo de objetos (por ejemplo, dos de cinco pizzas). La comprensión de parte-todo se representa típicamente utilizando un modelo de área, en el que una región de una figura se sombrea o un subconjunto de objetos se distingue de otros objetos. El otro subconstructo se refiere a la comprensión de la fracción como medida, que a menudo se representa por medio de rectas numéricas. La interpretación de la medida es menos intuitiva que la comprensión parte-todo. Los hallazgos de la investigación de Fuchs et al. (2013; 2014) sugieren que la enseñanza centrada en el subconstructo medida sería clave para el aprendizaje de las fracciones.

En concordancia con las investigaciones expuestas en los párrafos anteriores, Rittle-Johnson, Schneider y Star (2015) señalan que existe cierto consenso en señalar que el conocimiento conceptual a menudo apoya y conduce al conocimiento procedimental.

La autora de la presente tesis doctoral propone el constructo del conocimiento profundo de las fracciones como un conocimiento conceptual y conectado, en el sentido de Ma (2010) y Tchoshanov et al. (2011; 2017). Los autores Behr et al. (1983), Charalambous y Pitta-Pantazi (2007), Gallardo et al. (2008) y Kieren (1976) han estudiado cinco subconstructos: parte todo, cociente, razón, medida y operador. Considerando que este estudio se realiza en cuarto grado, queda afuera el subconstructo razón que es un contenido de sexto básico. Los significados de los cuatro subconstructos se obtienen de Gallardo et al. (2008).

El constructo conocimiento profundo de las fracciones se compone de los subconstructos que a continuación se describen:

1) Parte todo. El profesor manifiesta el significado del subconstructo al concebir a la fracción $\frac{a}{b}$ como la relación entre dos cantidades, "b" representa el número de partes iguales en que se ha dividido un todo (discreto o continuo) y "a" representa el número de partes iguales tomadas de "b". Por ejemplo, lo manifiesta al indicar la fracción que representa un gráfico y al representar gráficamente una fracción.

2) Cociente. El profesor manifiesta el significado del subconstructo al concebir a la fracción $\frac{a}{b}$ como la operación de dividir un número natural "a" entre otro no nulo "b". La fracción $\frac{a}{b}$ es el resultado de una situación de reparto donde se busca conocer el tamaño de cada una de las partes resultantes al distribuir *a* unidades en *b* partes iguales, o bien determinar la cantidad de partes. Por ejemplo, lo manifiesta al identificar esquemas que representan situaciones de reparto equitativo.

3) Medida. El profesor manifiesta el significado del subconstructo al concebir la fracción $\frac{a}{b}$ como un número que hace referencia a una magnitud que, siendo conmensurable, no se corresponde con un múltiplo entero de la unidad de medida. Por ejemplo, lo manifiesta al ubicar números fraccionarios en la recta numérica, al indicar números fraccionarios entre dos números, al indicar cuál de dos fracciones es mayor y al indicar valores equivalentes a una fracción.

4) Operador. El profesor manifiesta el significado del subconstructo al concebir a la fracción $\frac{a}{b}$ como un transformador. La fracción $\frac{a}{b}$ es el número que modifica un valor n multiplicándolo por "a" y dividiéndolo por "b". Por ejemplo, lo manifiesta al calcular la fracción de un número.

2.1.3 El conocimiento sobre la enseñanza de las fracciones

La literatura advierte, que el conocimiento que requiere un profesor para enseñar matemática no se limita al conocimiento matemático. Existe un conocimiento complementario que se mantiene en discusión desde que Shulman (1986) identificara el revolucionario constructo del PCK. En su forma más simple, el PCK se refiere al conocimiento de cómo hacer que el contenido sea comprensible a los alumnos, lo que implica el conocimiento necesario para realizar con éxito la tarea de enseñar. Shulman (1986) señala que un componente primario del PCK se refiere al saber del profesor respecto de cómo los alumnos aprenden un contenido, dicho conocimiento se compone de la comprensión de lo que hace que el aprendizaje de temas específicos sean fáciles o difíciles para los estudiantes. Según Shulman (1987), el PCK es de especial interés porque identifica los cuerpos distintivos del conocimiento para la enseñanza. Representa la mezcla entre contenido y pedagogía por la que se llega a una comprensión de cómo determinados temas se organizan, representan y adaptan a los diversos intereses y habilidades de los alumnos, y se presentan para la instrucción. El PCK es la categoría que con mayor probabilidad distingue entre la comprensión del especialista en un contenido del saber y la comprensión del pedagogo.

Tomando como sustento la noción del PCK de Shulman (1986), el grupo de investigación de Ball (Ball et al., 2008) señala que los profesores deben anticiparse a las dificultades que una tarea puede presentar a los estudiantes. Esta componente del PCK, denominada "conocimiento del contenido y de los estudiantes" fue identificada en Hill et al. (2008) como un componente clave del PCK, requerido para enseñar, distinto al conocimiento que los docentes tienen del contenido en sí, un profesor podría tener un sólido conocimiento del contenido matemático, y escasos conocimientos de cómo los estudiantes aprenden ese contenido en particular. Así, esta noción adquiere particular interés para los investigadores porque identifica los conocimientos específicos para la enseñanza.

El PCK ha sido capturado por los investigadores de diversas formas. Por ejemplo, en su estudio Marshall et al. (2009) solicitan a profesores de Camboya que construyan una actividad de enseñanza y respondan preguntas sobre los tipos de errores que cometen los estudiantes. La enseñanza del profesor se mide por el trabajo en la pizarra, se captura el grado de actividad en la clase basado en las respuestas del profesor y del alumno.

En la investigación de Marshall y Sorto (2012) capturan el PCK de los profesores por medio de la observación de clases. Ellos advierten que los puntajes de matemáticas de los estudiantes son más bajos en las escuelas donde pasan más tiempo copiando y resolviendo problemas individualmente, siendo esta una actividad predominante en áreas de zonas rurales de Guatemala. Las actividades más productivas en su lugar parecen ser aquellas que involucran a los estudiantes en el proceso de aprendizaje, que incluyen conversaciones directas, trabajo en grupos y envían estudiantes a la pizarra.

Carnoy y Arends (2012) usan cintas de videos para evaluar la profundidad de la enseñanza en el aula y así obtener una mayor comprensión de cómo la calidad de la enseñanza puede influir en el aprendizaje de los estudiantes. Se filmaron lecciones por cada profesor durante el año 2009. Dos expertos en enseñanza de las matemáticas utilizaron un protocolo para evaluar cada lección. Carnoy y Arends (2012) señalan que el esfuerzo invertido en cubrir el plan de estudios, por parte de los profesores, es un factor importante en los logros de aprendizaje que los estudiantes obtienen en las aulas de sexto grado en Sudáfrica.

Cueto et al. (2017) analizan un subdominio del PCK de profesores de Perú, denominado el conocimiento de los estudiantes y el contenido, el cual se midió a través de una prueba donde se les solicita a los profesores que expliquen los errores comunes de los estudiantes en suma, resta, multiplicación y división de números enteros y fracciones. La prueba de los profesores cubre contenidos de pruebas nacionales estandarizadas del Perú para estudiantes.

En Chile, Varas et al. (2013) tomando como sustento el estudio de Hill et al. (2008) desarrollan un instrumento para evaluar el subdominio del PCK denominado el conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS). El instrumento fue administrado a 83 profesores en servicio y a 156 estudiantes para profesor. Del estudio se concluye que el conocimiento del contenido y de los estudiantes, no se expresa ni se puede evaluar en ausencia de un contexto matemático. En general, se observa que los profesores con mejores resultados en la prueba tenían mayor formación matemática.

Olfos et al. (2014) examinan y estiman el PCK de 53 profesores chilenos mediante la evaluación de dos componentes: las concepciones de la enseñanza y su organización, y el conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS). Respecto a la concepción de la enseñanza y su organización evalúan dos componentes: la orientación constructivista del profesor hacia el aprendizaje y las matemáticas, y su conocimiento de cómo organizar su enseñanza. Respecto del KCS se evalúa el conocimiento del profesor relativo al pensamiento de los estudiantes, es decir, las dificultades, los conocimientos adquiridos, los errores frecuentes y estrategias habituales utilizadas por los estudiantes.

Olfos et al. (2014) sustentados en las ideas de Shulman examinan el conocimiento de la enseñanza del contenido, el cual incluye el conocimiento del profesor sobre la organización del currículo matemático de la escuela y su secuenciación, así como las concepciones constructivistas de las matemáticas y las teorías del aprendizaje propuestas por conductistas o académicos, en la medida en que orientan la toma de decisiones, la planificación y las acciones del docente en el aula. Los autores señalan que las acciones incluyen:

a) Organización de tareas. El reconocimiento de secuencias de contenido adecuadas y el diseño de escenarios de enseñanza se consideran en la organización de tareas matemáticas en el contexto del aula. Las secuencias adecuadas están vinculadas tanto al currículo escolar como a los análisis o al desglose de las tareas matemáticas de los alumnos. El diseño de escenarios de aprendizaje depende de la situación; por lo tanto, incluye potencializar las conexiones entre ideas, como la contextualización, las analogías, los ejemplos y los contraejemplos, y las ideas unificadoras. El diseño de escenarios también considera cómo el profesor construirá una escena para el aprendizaje, usará analogías, creará conflictos cognitivos o integrará otras disciplinas, mientras mantiene el enfoque constructivista del aprendizaje.

b) Orientación constructivista. Este subcomponente de la enseñanza incluye las concepciones del profesor sobre el significado del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Las concepciones del profesor sobre el aprendizaje de las matemáticas están asociados con sus creencias sobre cómo se produce el aprendizaje y, en consecuencia, sobre cómo el contenido matemático se transforma en contenido educativo. Las siguientes categorías emergen de la perspectiva de las concepciones del maestro sobre las teorías del aprendizaje: conductismo, cognición, significativismo y socioconstructivismo, relacionadas respectivamente con exponer y organizar redes de conceptos, unir diferentes conocimientos, participar y argumentar en grupos.

El conocimiento que el profesor alcanza respecto a la relación de los alumnos con el contenido matemático, es decir, conocer sus errores típicos, dificultades y estrategias más frecuentes, utilizadas por los estudiantes en relación a los temas de la matemática escolar, forma parte del conocimiento didáctico del profesor (Artigue, Douady, Moreno y Gómez, 1995; Carrillo et al., 2013; Hill et al., 2008).

La didáctica francesa ha producido numerosos conocimientos sobre las concepciones de los alumnos, los obstáculos y dificultades que intervienen en el aprendizaje de una noción de un dominio matemático, como por ejemplo las fracciones, números decimales, álgebra, geometría, entre otros (Artigue et al., 1995).

Artigue (1990) señala que para Brousseau el error no es simplemente el efecto de la ignorancia, del azar, sino el efecto de un conocimiento anterior, que fue exitoso, pero que ahora se revela falso y que se establece como obstáculo. Él distingue tres orígenes fundamentales de los obstáculos que se encuentran en la enseñanza de las matemáticas, a saber, un origen ontogenético correspondiente a los obstáculos unidos a limitaciones de las capacidades cognitivas de los estudiantes. Un origen didáctico correspondiente a obstáculos ligados a opciones del sistema de enseñanza y otro epistemológico correspondiente a obstáculos relacionados a la resistencia de un saber mal adaptado, en el sentido de Bachelard.

Rico (1995) señala que cuando un alumno proporciona una respuesta incorrecta a una cuestión matemática, se puede decir que su respuesta es errónea, el error es conocimiento deficiente y es un dato objetivo que se encuentran en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Socas (2007) señala que la mayoría de los investigadores considera que los errores no tienen un carácter accidental, sino que surgen de estrategias que los alumnos emplean en la solución de una situación problemática y son consecuencia de experiencias anteriores en matemáticas.

Así desde la didáctica de la matemática, parece necesario avanzar en la delimitación de las causa de los errores que cometen los alumnos, además de tener una explicación de cada error, para ser conscientes de lo que condiciona el error y que se convierte en dificultades u obstáculos en el aprendizaje. En particular, varios investigadores señalan que las dificultades que tienen los alumnos en el uso de las fracciones, se deben tanto a la gran cantidad de significados que tienen las fracciones como también a los conocimientos previos que tienen los alumnos.

González (2015) presenta una clasificación de los errores más importantes que muestran los alumnos en el uso de las fracciones, en base a los estudios previos realizados por autores como, por ejemplo Llinares y Sánchez (1998), Godino (2004) y Egodawatte (2011). La clasificación que presenta es la siguiente:

1) Errores por descuido o distracción, estos tienen que ver con falta de concentración de los alumnos.
2) Errores por desconocimiento de la respuesta estos incluyen respuestas en blancos e incompletas o resultados propuestos al azar, por ejemplo, simplificación incompleta, operaciones con enteros o error en la jerarquía de las operaciones.
3) Errores por defecto en la comprensión del concepto (González, 2015):
    a) Error en la conmutatividad de las operaciones en la resta y la división de fracciones: $a - b = b - a$; $a : b = b : a$.
    b) Error en la ordenación de fracciones como por ejemplo, los alumnos consideran que $\frac{1}{2} < \frac{1}{3}$ porque 2 es menor que 3. De esto se desprende que las propiedades de los números naturales pueden ser un obstáculo para el aprendizaje de los números racionales.
    c) Comparación cualitativa incorrecta. Aquí se incluyen errores que comete el alumno como por ejemplo, señala que la mitad de $\frac{1}{6}$ es un $\frac{1}{3}$ argumentando que la mitad de 6 es 3.
    d) Consideración ilegítima de dividir o restar un número con otro mayor.

e) Relacionar multiplicar con ampliar y dividir con reducir.

f) Extrapolación del cálculo de los naturales a las fracciones como por ejemplo, los alumnos suman los numeradores y los denominadores $\frac{1}{4}+\frac{2}{3}=\frac{3}{7}$. Los alumnos no consideran la fracción como un número en sí mismo sino como dos números naturales sin relación entre sí.

g) Error relacionado con equivalencia de fracciones. Ante la búsqueda de fracciones equivalentes los alumnos utilizan el método aditivo de los naturales en numeradores y denominadores, por ejemplo: $\frac{2}{5}=\frac{8}{11}=\frac{14}{17}$.

h) Aplicación sistemática de procedimientos erróneos: sobresimplificación, error en el algoritmo de la suma, error en el algoritmo de la multiplicación, multiplicación cruzada incorrecta, común denominador incorrecto, división o multiplicación incorrecta, dividir en lugar de multiplicar y visceversa.

Hill et al. (2008) establecen tres categorías del PCK, presentadas en el modelo MKT que contiene: conocimiento del contenido y los estudiantes, conocimiento del contenido y de la enseñanza y conocimiento del currículum. Hill et al. (2008) definen el conocimiento del contenido y de los estudiantes como "el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben o aprenden un contenido en particular" (p. 375). Esta definición incluye el conocimiento de las concepciones erróneas, dificultades y estrategias utilizadas por el alumno.

Un ejemplo referido a los errores de los estudiantes corresponde a los malos entendidos que se producen al sumar fracciones (por ejemplo, $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$). Un ejemplo referido a estrategias consistiría en saber que los estudiantes abordarán de diversas maneras el problema de sumar 56+9, algunos estudiantes contarán, otros añadirán 10 y luego restarán 1 y otros utilizarán un algoritmo estándar (Hill et al., 2008). Nótese que este conocimiento, en base a los ejemplos dados, se muestra útil durante la enseñanza y en su preparación.

En la presente investigación la autora trabajará parte del constructo de Hill et al. (2008) y de Olfos et al. (2014). Del estudio de Hill et al. (2014) se abordará la componente conocimiento del contenido y de los estudiantes y del estudio de Olfos et al. (2014) la componente orientación constructivista. Estas componentes formaran parte del constructo propuesto "conocimiento sobre la enseñanza de las fracciones", el cual incluyen los siguientes subconstructos:

1) Conocimiento de errores comunes de los alumnos. El profesor identifica y obtiene explicaciones de los errores de los alumnos, advierte que los errores surgen del contenido.

2) Conocimiento de las dificultades de los alumnos. El profesor identifica y comprende cuáles son las dificultades o barreras más frecuentes de los alumnos y que inducen al error.

3) Conocimientos adquiridos por los alumnos. El profesor conoce las conceptualizaciones y los conocimientos previos adquiridos del alumno; por ejemplo, el profesor sabe lo que son capaces de hacer los estudiantes de tercer grado.

4) Estrategias usadas por los alumnos. El profesor está familiarizado con las posibles soluciones que utilizarán sus alumnos al resolver una cuestión matemática.

5) Orientación constructivista. Incluye las concepciones del profesor sobre el significado de aprender matemáticas y sobre el proceso enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, así como las creencias constructivistas de las matemáticas y las teorías del aprendizaje propuestas por conductistas o académicos, en la medida en que orientan la toma de decisiones, la planificación y las acciones del docente (Olfos et al., 2014).

De esta forma, el constructo propuesto conocimiento sobre la enseñanza de las fracciones, se refiere al conocimiento que el profesor tiene de los errores comunes de los alumnos, de las dificultades, de los conocimientos adquiridos, de las estrategias comúnmente usadas por los alumnos respecto a la conceptualización de las fracciones y de su orientación constructivista.

2.2 Efecto del conocimiento del profesor sobre el rendimiento de los estudiantes

Ante el cuestionamiento de por qué la enseñanza de algunos profesores es más efectiva que la de otros, tiene sentido pensar intuitivamente, que el conocimiento matemático de un profesor afecte su capacidad de enseñar matemáticas y por extensión, influya en el aprendizaje de sus alumnos (Marshall y Sorto, 2012). Los primeros estudios que relacionaron el conocimiento matemático del profesor con el rendimiento de los estudiantes, en su mayoría lo midieron con variables próximas tales como: cursos de matemáticas, experiencia, certificados de títulos y grados. Las variables próximas representan una medida indirecta del conocimiento matemático del profesor. Estas investigaciones que utilizaron variables próximas mostraban poca o ninguna relación estadística entre el conocimiento del profesor y el aprendizaje del estudiante (Grossman, Wilson y Shulman, 1989).

En la década del 90, se presentan estudios en los cuales se obtiene una medida más directa del conocimiento matemático del profesor, por medio de pruebas validadas. Estos estudios muestran un efecto positivo entre el conocimiento matemático del profesor y el rendimiento estudiantil (Harbison y Hanushek 1992; Mullens, Murnane y Willett, 1996). En su estudio Harbison y Hanushek (1992) relacionan características del profesor como la experiencia docente, salario, años de educación formal y el rendimiento en pruebas de matemáticas. El estudio se realiza en escuelas primarias en una zona rural del noreste de Brasil.

Los resultados del estudio de Harbison y Hanushek (1992) muestran que la relación entre la experiencia docente y el rendimiento de los estudiantes en matemáticas no es estadísticamente significativa. Sin tener en cuenta la significación estadística, la conclusión nuevamente es que los efectos son pequeños. Un año adicional de experiencia equivale aproximadamente a un cuarto de un punto adicional de ganancia en logros de matemáticas, esto implica que un aumento de una desviación estándar en la experiencia (siete años) corresponde a menos de dos puntos de ganancia. Las características de los profesores, tales como años de educación formal, salario, experiencia docente e incluso participación en programas de formación tienen poco o ningún impacto en el rendimiento de los estudiantes.

El hallazgo más interesante del estudio de Harbison y Hanushek (1992) se refiere a la competencia de los profesores en las mismas pruebas de matemáticas que se administraron a los estudiantes de cuarto grado. Harbison y Hanushek (1992) encuentran que el conocimiento de las matemáticas de los profesores tiene un efecto positivo en el rendimiento de sus estudiantes de cuarto grado, ellos escriben: " En cuarto grado, una mejora de diez puntos en el promedio del conocimiento matemático del profesor… produciría un incremento de cinco puntos en el logro de los estudiantes; esto es equivalente a una mejora del 10% respecto de las puntuaciones medias de los estudiantes " (p. 114).

Mullens et al. (1996) señalan que los estudios cuantitativos que abordan el tema del efecto del conocimiento del profesor sobre el aprendizaje de los alumnos, generalmente utilizan cuatro tipos de variables, como indicadores potenciales de la eficacia de la enseñanza, estas son: logros educativos de los docentes, participación en programas de formación, el conocimiento de la materia (puntajes en pruebas) y estrategias de instrucción usadas por los profesores. La lógica que subyace a medidas de este tipo de variables, es que la enseñanza es una actividad compleja que requiere tanto del conocimiento de la materia como las habilidades pedagógicas.

Mullens et al. (1996) relacionan características de los profesores con el rendimiento de los estudiantes. Las características de los profesores son: el nivel de competencia del profesor en matemáticas (nivel de una prueba de finalización de la escuela primaria), programas de formación pedagógica y graduados de la escuela secundaria. El rendimiento del estudiante se mide por medio de pruebas cuyas preguntas se elaboraron en base al currículo de segundo y tercer grado. El estudio se realiza en escuelas primarias de la ciudad de Belice, participaron alumnos de tercer grado y sus respectivos profesores.

Los resultados del estudio muestran que los estudiantes aprendieron conceptos más avanzados, si sus profesores mostraron una fuerte capacidad matemática durante su propia escolarización en la escuela primaria. Si se conoce la competencia matemática de un maestro de la escuela primaria, la información sobre la finalización de la escuela secundaria proporciona pocos datos adicionales útiles. Sin embargo, si la información sobre la capacidad matemática no está disponible, el conocimiento de la graduación de la escuela secundaria es útil. Esta relación entre la finalización de la escuela secundaria y el aprendizaje del estudiante tiene una base sustantiva. En Belice, todos los estudiantes de secundaria toman cuatro años de matemáticas cubriendo una gama más amplia de conceptos que de la escuela primaria. Por otra parte, respecto del programa de formación pedagógica, los resultados muestran que no existe una relación estadísticamente significativa entre la formación pedagógica en Belice y el aprendizaje de conceptos avanzados por parte de los estudiantes.

Mullens et al. (1996) concluyen que el conocimiento matemático de un maestro es importante para el aprendizaje del estudiante y que la finalización de la escuela secundaria puede ser un indicador secundario confiable de la competencia de la materia. Los autores aclaran que aunque cada estudiante de secundaria completa el mismo proceso de escolarización, los graduados poseen diferentes niveles de conocimiento matemático. Si el conocimiento del maestro es de hecho, es un determinante clave del aprendizaje del estudiante, entonces una medida más directa de ese conocimiento será el mejor predictor de ese aprendizaje.

En el año 2008, en el informe National Mathematics Advisory Panel se establece la importancia del conocimiento matemático de los profesores, como factor en los logros de aprendizaje de sus alumnos. No obstante, en el informe se critica la falta de evidencia científica que vincule la presencia de ciertos conocimientos matemáticos específicos para la enseñanza con los logros de aprendizaje de los alumnos, pues la mayoría de las investigaciones miden otras variables, tales como: certificado de título, cursos de matemáticas y/o grados y pruebas validadas. En general, estos estudios mostraron resultados inconsistentes, de cinco estudios de alta calidad que usaron certificado del profesor como una variable próxima, tres informaron de una relación positiva con el rendimiento de los estudiantes, mientras que dos informaron que la relación no fue significativa. Del mismo modo, de los siete estudios de alta calidad, que utilizaron cursos del profesor y/o grado como medidas de conocimiento matemático para la enseñanza, cuatro informaron de una relación positiva entre estas medidas y el rendimiento de los estudiantes, y tres informaron una relación negativa.

En el informe del National Mathematics Advisory Panel (2008) se señala que el único estudio que midió directamente el conocimiento matemático utilizado al enseñar por medio de pruebas y su incidencia en los logros de aprendizaje es el trabajo de Hill et al. (2005). Desde entonces, varios investigadores han estimado la incidencia de conocimientos matemáticos para la enseñanza de los profesores sobre los logros de aprendizaje de los alumnos (Baumert et al., 2010; Carnoy y Arends, 2012; Cueto et al., 2017; Marshall et al., 2009; Marshall y Sorto, 2012; Metzler y Woessman, 2012; Olfos et al., 2014; Tchoshanov, 2011; Tchoshanov et al., 2017).

2.2.1 Estudios realizados en países desarrollados acerca del efecto del conocimiento del profesor sobre el rendimiento de los estudiantes

El trabajo de Hill et al. (2005) es pionero en estimar el efecto del conocimiento matemático para la enseñanza de los profesores sobre los logros de aprendizaje de los alumnos. En su estudio, se describen los resultados del proyecto Learning Mathematics for Teaching. Las pruebas elaboradas en el proyecto miden el MKT de los profesores, que incluye conocimiento matemático común, conocimiento especializado del contenido matemático y conocimiento del contenido matemático y de los estudiantes. Participan del estudio 334 profesores de primer grado y 365 de tercer grado con 1.190 y 1.773 alumnos, respectivamente, dentro de 115 escuelas de los Estados Unidos.

La recolección de datos se centró en dos cohortes de estudiantes, uno que ingresó al estudio en el jardín infantil y fue seguido hasta el segundo grado y otro que ingresó al estudio en tercer grado y fue seguido hasta el final del quinto grado. En el caso de cada cohorte, los datos se recopilaron en dos oleadas: en 2000-2001, se recogió información sobre estudiantes de primer y tercer grado en 53 escuelas; en 2001-2002, se recopiló información sobre 62 escuelas adicionales. En el estudio se discuten solo los datos sobre los estudiantes de primer y tercer grado. Se administra una prueba Terra Nova a los estudiantes en el otoño y primavera de cada año académico. La prueba Terra Nova administrada a los estudiantes incluye preguntas acerca de números, operaciones o pre-álgebra y álgebra.

El estudio realizado por Hill et al. (2005) incluyó tres formas de medir el conocimiento matemático de los profesores a través de cursos, certificados y pruebas de conocimientos matemáticos para la enseñanza, que incluyeron preguntas relativas a los contenidos de números, operaciones y geometría. Se informó de una relación positiva y significativa entre las puntuaciones de las pruebas de los profesores y los resultados de sus alumnos en la prueba Terra Nova. Pero la relación entre cursos, certificados de los profesores y el rendimiento de los alumnos no fue significativa.

Los resultados del estudio de Hill et al. (2005) indican que el conocimiento matemático para la enseñanza que se relaciona con el aprendizaje de los estudiantes, no fue capturado por los cursos o certificados de los profesores, sino por sus resultados en pruebas con preguntas específicamente diseñadas para medir su conocimiento utilizado en la enseñanza. Hill y sus colaboradores precisan que solo un 43% (primer grado) y un 53% (tercer grado) de las preguntas de las prueba de Terra Nova cubren temas relacionados con las pruebas de conocimientos matemáticos para la enseñanza, lo que lleva a tener una alineación imperfecta entre la variable conocimiento matemático de los estudiantes y la variable conocimiento de los profesores, siendo probable que se subestime el tamaño del efecto del conocimiento de los profesores sobre el logro de aprendizaje de los estudiantes en matemática. Posiblemente dicho efecto sea mayor que el estimado en su estudio, así este resultado es relevante dado que puede orientar a las políticas destinadas a mejorar el rendimiento en matemáticas de los alumnos.

Posterior al reporte del informe del National Mathematics Advisory Panel (2008), se publica el trabajo de Baumert et al. (2010) donde se presentan los hallazgos del proyecto COACTIV en Alemania, que evalúa el logro de aprendizaje de 4.353 alumnos de décimo grado en el transcurso de un año, medidos con dos pruebas PISA y los conocimientos de sus 181 profesores en 194 cursos. Los conocimientos evaluados son CK, PCK y conocimiento pedagógico general de los profesores. La prueba de papel y lápiz utilizada para evaluar el CK de los profesores cubre temas relativos a aritmética, álgebra, geometría, funciones y probabilidad, contenidos matemáticos que son obligatorios de quinto a décimo grado. Para evaluar el PCK del profesor se incluyeron preguntas relativas a su capacidad para reconocer conceptos erróneos, dificultades y estrategias de solución de los estudiantes.

Baumert et al. (2010) utilizan la técnica de análisis estadístico multivariante denominada modelos de ecuaciones estructurales multinivel. Los resultados del estudio revelaron un efecto positivo del conocimiento pedagógico del contenido matemático de los profesores sobre el avance de aprendizaje de los estudiantes. Baumert et al. (2010) señalan que tanto en Estados Unidos como en Europa, se han planteado preocupaciones acerca de la formación de pregrado, cuestionando si dicha formación tiene éxito en entregar el conocimiento profesional que los futuros profesores necesitan para realizar una instrucción de alta calidad.

Otro estudio que otorga evidencias acerca de las afirmaciones de que el conocimiento matemático de los profesores juega un papel importante en la enseñanza de esta materia es el trabajo de Hill, Blunk, Charalambous, Lewis et al. (2008), quienes utilizan una metodología mixta con cinco estudios de casos y datos cuantitativos para estudiar el MKT de los profesores. En lugar de estudiar a cada profesor por separado se compara sus diferentes niveles de MKT para comprender cómo se expresa en la instrucción. Los niveles de MKT son medidos con un instrumento rigurosamente desarrollado y probado por Hill et al. (2005).

Hill, Blunk et al. (2008) desarrollan un marco conceptual para visualizar la calidad de la instrucción matemática (MQI) y lo utilizan para cuantificar la relación entre MKT y MQI.

Registran las lecciones de los maestros en una rúbrica diseñada para representar las fases de MQI y correlacionan estos resultados con la puntuación de los profesores en una evaluación de lápiz y papel relacionada con el MKT.

Los resultados del estudio de Hill, Blunk et al. (2008) revelan una asociación positiva en los niveles de MKT y el MQI, mostrando fuertes vínculos entre el conocimiento del profesor y la calidad matemática de su práctica en el aula. La conclusión de este estudio es que existe una poderosa relación entre lo que un maestro sabe, cómo lo sabe y lo que puede hacer en el contexto de la instrucción. Una limitación del estudio es que no tiene datos del rendimiento de los estudiantes, por lo que no es posible mostrar el efecto de la calidad matemática de la práctica en el aula del profesor sobre el rendimiento estudiantil. Sin embargo, Hill y sus colaboradores creen que es probable que así sea, argumentando que el hecho de que los profesores presenten representaciones y ofrezcan explicaciones matemáticas precisas a sus estudiantes aumentaría las oportunidades de aprendizaje.

Tchoshanov (2011) parte de un supuesto similar al del Panel (2008) al señalar que no solamente importa la cantidad de cursos de matemáticas que tiene un profesor, sino más bien, saber qué tipo específico de conocimiento matemático posee un profesor. El objetivo principal de su estudio consistió en medir el tipo cognitivo del profesor y su asociación con el éxito de estudiantes de sexto a octavo grado medidos con una prueba estatal estandarizada. En el estudio participaron 102 profesores y 2.400 alumnos. El estudio se realizó en una zona urbana en el suroeste de EE.UU., con el 70% de la población de origen mexicano.

El tipo cognitivo se refiere al tipo de conocimiento del contenido del profesor y procesos de pensamiento necesarios para llevar a cabo una tarea exitosamente, en términos de conocimiento de hechos y procedimientos (Tipo 1), conocimiento de conceptos y conexiones

(Tipo 2) y conocimiento de modelos y generalizaciones (Tipo 3). Se estudian los tres tipos cognitivos. La prueba administrada a los profesores incluyó preguntas relativas a sentido numérico, álgebra, geometría y medida, probabilidad y estadística. Los objetivos de la prueba de los profesores fueron alineados con los objetivos correspondientes a las pruebas estatales estandarizadas para estudiantes.

Tchoshanov (2011) también examinó la relación entre el tipo de conocimiento de los profesores y la práctica docente. En general, se examinaron las siguientes preguntas de investigación: ¿qué tipo de conocimiento del contenido del profesor es fundamental para el éxito del estudiante? ¿En qué medida el tipo cognitivo del profesor está asociado con el rendimiento de los estudiantes? ¿El tipo cognitivo del profesor se correlaciona con la práctica docente y la calidad de la lección? El estudio explora si el conocimiento de los hechos y procedimientos de los profesores tendrá un efecto diferente en el éxito o logro de los alumnos, en relación con el conocimiento de los conceptos y las conexiones, o el conocimiento de modelos y generalizaciones.

El conocimiento Tipo 1, requiere el conocimiento de recuerdo y aplicación de matemáticas básicas, reglas y algoritmos para llevar a cabo los procedimientos de rutina. Por ejemplo, si un maestro es capaz de recordar una regla de división de fracciones o resolver un problema sencillo de división de fracciones tal como $1\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$, entonces se dice que él tiene conocimiento de los procedimientos de la división de fracciones.

El conocimiento Tipo 2, es diferente que el tipo 1 en el sentido que se centra en la comprensión conceptual a través de una mayor cantidad y calidad de las conexiones entre los procedimientos y las ideas matemáticas. Por ejemplo, tareas tales como resolver el siguiente problema de división de fracciones $1\frac{3}{4}:\frac{1}{2}$ en más de una forma (por ejemplo, dibujar un diagrama o ilustrarlo con objetos manipulables) o crear una historia para el problema de división de una fracción dada requiere un conocimiento conceptual más que solo el procedimental.

El conocimiento Tipo 3, es más teórico requiere probar conjeturas, haciendo generalizaciones, la demostración de teoremas, etc. Por ejemplo, más de la mitad de los profesores analizados en el estudio tuvieron dificultades para responder correctamente a la siguiente pregunta ¿Es la siguiente afirmación $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ $(a, b, c\ y\ d$ son enteros positivos) siempre verdadera? Tal tarea requiere un tipo diferente de conocimiento que se denomina el conocimiento de modelos y generalizaciones.

Tchoshanov (2011) señala que los tipos cognitivos del conocimiento de los maestros no son jerárquicos en el sentido de que el maestro no necesariamente debe poseer un tipo cognitivo previo. Los objetivos de la investigación fueron los siguientes:

▪ Se diseñó una Encuesta del Conocimiento del Contenido del Profesor (TCKS) para evaluar el tipo cognitivo del conocimiento del contenido de los profesores.

▪ Se evaluó el tipo de conocimiento del contenido de los profesores y la correlación con el logro del estudiante en la prueba estandarizada obligatoria del estado.

▪ Se examinó la asociación entre el tipo de conocimiento del contenido docente, la práctica docente, y la calidad de la lección.

▪ Se evaluó el conocimiento y la comprensión del profesor de un tema de contenido específico, la división de fracciones.

El estudio de Tchoshanov (2011) exploró si el conocimiento del contenido de los hechos y procedimientos docentes tienen diferentes efectos sobre el rendimiento de los estudiantes y la práctica docente, en relación con el conocimiento de los conceptos y las conexiones o el conocimiento de modelos y generalizaciones. Un hallazgo importante de su estudio fue que la correlación entre el rendimiento de los alumnos en las pruebas estandarizadas y los tipos 1 y 3 de los conocimientos del contenido del profesorado fue cercana a cero y no significativa ($r = 0.06$, $p = 0.537$, $r = 0.02$, $p = 0.853$ respectivamente). Por el contrario, la correlación entre el rendimiento y el tipo 2 de los conocimientos de contenidos del profesorado fue positiva, débil pero significativa ($r = 0.26$, $p = 0.009 <0.01$). Los resultados del estudio sugieren que el conocimiento del profesor de los conceptos y las conexiones tiene un potencial para ser un buen predictor de profesores exitosos, que puedan impactar positivamente en el rendimiento de los estudiantes en matemáticas.

Tchoshanov (2011) señala que el tipo de conocimiento del contenido es importante, un profesor con conocimiento del contenido limitado solo a procedimientos matemáticos tiene menos oportunidad de influir sobre el éxito estudiantil que un profesor que conceptualmente entiende el tema. Sin embargo, resulta evidente que no sólo el conocimiento del contenido matemático del profesorado es importante, sino también la capacidad de enseñar con eficacia. El conocimiento del contenido docente, aísla otras categorías del conocimiento del profesor y puede no proporcionar una imagen completa de una relación entre el conocimiento de los maestros y el logro del estudiante. Por lo tanto, se necesitan estudios futuros sobre el conocimiento integrado de los profesores y su impacto en el éxito del estudiante.

Tchoshanov et al. (2017) señala que aunque existen numerosos estudios que se centran en la comprensión de los conocimientos de los profesores, hay una escasez de investigaciones que proporcionen un estudio en profundidad sobre las diversas facetas de dichos conocimientos y su relación con el rendimiento de los estudiantes. De esta forma su estudio considera los siguientes tipos cognitivos de los conocimientos de contenidos del profesorado: el conocimiento de los hechos y procedimientos, el conocimiento de los conceptos y las conexiones, y el conocimiento de modelos y generalizaciones. El estudio se basó en las siguientes preguntas de investigación: ¿En qué medida los diferentes tipos cognitivos del conocimiento de los contenidos matemáticos del profesor se asocia con el rendimiento de los estudiantes en Rusia? ¿Cuál es la naturaleza de la relación entre los diferentes tipos cognitivos del conocimiento del contenido matemático de los profesores?

En el estudio de Tchoshanov et al. (2017) participaron 90 profesores con 6.478 estudiantes de quinto a décimo primer grado en escuelas de diferentes regiones de Rusia. El estudio comprendió dos niveles de análisis de datos cuantitativos. Primero, se exploró la relación entre cada tipo cognitivo del conocimiento del contenido de los profesores y el puntaje general de la prueba de conocimiento del contenido del profesor (TCKS) y su relación con el rendimiento del estudiante. En segundo lugar, se estudia la relación entre cada tipo cognitivo del conocimiento del contenido del profesor, para profundizar la comprensión de las asociaciones. En el estudio, se usó una prueba de conocimientos del contenido del profesor sobre los tipos cognitivos del docente y datos de rendimiento del alumno, estos últimos fueron informados por los profesores participantes y verificados con precisión por los jefes de departamento.

El desempeño del estudiante se refiere al grado obtenido en una evaluación acumulativa a final del año académico, que se compone de cinco a seis problemas abiertos que reflejan los principales conceptos abordados en el curso. Este criterio de rendimiento del estudiante es utilizado como uno de los indicadores de calidad docente en las escuelas rusas. La prueba de los profesores aborda los temas principales del currículo de quinto a noveno grado:

aritmética, álgebra y funciones, probabilidad y estadísticas y geometría (incluida la medición).

Los resultados del estudio muestran que la correlación entre el tipo cognitivo T1 y el rendimiento del alumno fue positiva, débil pero significativa ($r = 0.2076$, $p = 0.0496$) y la correlación entre el tipo cognitivos T2 y el rendimiento del alumno también fue positiva, débil pero significativa ($r = 0.2295$, $p = .0296$). Sin embargo, la correlación entre el tipo cognitivo T3 y el rendimiento del alumno fue débil pero no alcanza significación estadística ($r = 0.1904$, $p = 0.678$). El hallazgo más importante fue la correlación entre el puntaje total en el TCKS de los profesores y el rendimiento del estudiante fue positiva, débil pero significativa ($r = 0.2903$, $p = 0.0055 < 0.01$). Estos resultados, sugieren que el conocimiento del contenido de los maestros juega un papel importante en el rendimiento del alumno en la escuela secundaria inferior.

Así, en las últimas tres décadas varios investigadores han recurrido a variables relacionadas con los conocimientos y habilidades de la práctica en el aula de los profesores, con la hipótesis de que tanto los conocimientos como las prácticas pedagógicas, pueden ser clave para aumentar el nivel de aprendizaje de los estudiantes. Esto incluiría el conocimiento de la matemática de los docentes como también otros tipos de conocimiento, como por ejemplo relacionados con el PCK. Sin embargo, en países en desarrollo, incluyendo los de América Latina, hay escasez de estudios sobre el tema (Cueto et al., 2017).

2.2.2 Estudios realizados en países en desarrollo acerca del efecto del conocimiento del profesor sobre el rendimiento de los estudiantes

Marshall y Sorto (2012) señalan que considerando los resultados de más de 40 años de análisis estadísticos, relacionados con el efecto del conocimiento del profesor con el aprendizaje del alumno, la mayoría de los estudios han tenido que conformarse con características de los docentes basadas en cursos de matemáticas, certificación y grados, estos son sustitutos pobres para medir el conocimiento real del profesor. Lo que ha motivado a desarrollar una nueva línea de investigación centrada en el conocimiento del profesor.

El aumento de la calidad del profesor es un objetivo deseable en países en desarrollo, la literatura en educación matemática informa que el CK y el PCK de los profesores son componentes claves de la calidad del docente y estrechamente relacionado con el rendimiento del alumno. Considerando la falta de estudios en torno al tema, en especial en países en desarrollo, algunos investigadores han explorado la relación y el efecto del conocimiento del profesor sobre el aprendizaje del estudiante.

Algunos estudios realizados en países en desarrollo muestran que el conocimiento matemático de los profesores es relevante para el aprendizaje (Harbison y Hanushek, 1992; Metzler y Woessman, 2012; Mullens et al., 1996). Sin embargo, la literatura sugiere que otros tipos de conocimientos del profesor también pueden contribuir a promover el aprendizaje de los estudiantes. Shulman sugirió que el conocimiento de la materia es necesario, pero no suficiente para una enseñanza de alta calidad; los maestros deben saber cómo importar el conocimiento y tener en cuenta los procesos cognitivos de los estudiantes en contextos específicos (Cueto et al., 2017).

Metzler y Woessman (2012) señalan que uno de los enigmas más grandes en la función de producción educacional, lo constituye el problema de la calidad del profesor, si bien hay pruebas claras de que la calidad docente es un determinante clave del aprendizaje del estudiante, poco se sabe sobre qué características observables específicas de los docentes pueden afectar el aprendizaje de los alumnos. Un atributo que se ha demostrado que con mayor frecuencia se correlaciona de forma significativa con el rendimiento del alumno, es la habilidad académica de los docentes, medida por puntajes en pruebas de rendimiento.

Metzler y Woessman (2012) estiman el impacto de las habilidades académicas de los profesores (medidas por pruebas) sobre el rendimiento estudiantil de una escuela de primaria de Perú, utilizan datos de una "evaluación nacional peruana de logros estudiantiles" del año 2004, se evalúan dos materias: matemáticas y lectura. Las pruebas por asignatura administradas a los profesores permiten una medición que abarca el conocimiento del docente en matemáticas y lectura. Tanto las pruebas de los estudiantes como las de los docentes en ambas asignaturas, fueron escaladas utilizando el modelo de Rasch en la Unidad de Medición de la Calidad del Ministerio de Educación del Perú.

En el estudio de Metzler y Woessman (2012) se evaluó una muestra representativa de estudiantes de sexto grado, cubriendo un total de más de 12.000 estudiantes en casi 900 escuelas primarias seleccionadas al azar. La muestra es representativa a nivel nacional, se comparan áreas urbanas vs. rurales, públicas vs. Privadas, y multi-grado vs. escuelas "completas", lo que permite identificar el impacto del rendimiento de los profesores en una materia específica (lenguaje o matemática) sobre el rendimiento de los estudiantes.

De manera análoga al estudio de Harbison y Hanushek (1992) y Mullens et al. (1996) los resultados del estudio de Metzler y Woessman (2012) muestran que el conocimiento de la materia del profesor ejerce un impacto estadísticamente significativo en el rendimiento del estudiante. Una vez corregidos los errores de medición en las calificaciones de los exámenes docentes, los resultados sugieren que un aumento de una desviación estándar en los puntajes de los exámenes de los profesores, aumenta los puntajes de las exámenes de los alumnos en alrededor del 9% de una desviación estándar en matemáticas. Esto indica que en contextos en desarrollo como el peruano, el conocimiento matemático de los profesores tiene un efecto en los logros de aprendizaje de los estudiantes.

Marshall et al. (2009) realizan un estudio en el que relaciona el rendimiento del estudiante con variables relativas a los antecedentes familiares, características del docente y de la escuela en Camboya. Participan del estudio aproximadamente 200 escuelas visitadas en 2006 (tercer grado) y 2007 (sexto grado). El tamaño de la muestra efectivo es de al menos 400 estudiantes, para analizar los datos se utiliza un modelo lineal jerárquico (multinivel). El rendimiento de los estudiantes se obtiene de los puntajes de pruebas que fueron diseñadas para medir los componentes básicos del plan de estudios, utilizando los estándares oficiales y los textos de tercer y sexto grado. Hay un gran énfasis en las habilidades cognitivas, como el conocimiento, comprensión, con algunas preguntas de aplicación y de análisis.

Los resultados del estudio de Marshall et al. (2009) indican que en ambas materias en sexto grado, el rendimiento es significativamente mayor cuando más estudiantes informaron que fueron enviados a la pizarra para trabajar en actividades. En sexto grado el rendimiento estudiantil en matemáticas es significativamente más alto cuando los profesores pueden responder correctamente a las preguntas de nivel primario del contenido matemático. El logro de matemáticas de tercer grado es aproximadamente 25 puntos más alto (0.25 desviaciones estándar) cuando el docente está en el grupo de mayor puntaje del PCK y 18 puntos más para maestros con niveles medios de PCK, en relación con los profesores que tienen una menor puntuación.

Marshall et al. (2009) concluye que los profesores deben estar bien informados sobre el contenido a enseñar. Los resultados de su estudio muestran que el conocimiento del contenido matemático de los profesores predice puntajes más altos en el rendimiento en matemáticas de los estudiantes en sexto y tercer grado. Por otra parte, la asociación positiva entre logro del estudiante y el uso de la pizarra en clase, sugiere que enviando niños a la pizarra permite una instrucción individualizada y oportunidades para explicar los errores y resaltar las respuestas correctas.

Marshall y Sorto (2012) tomando como sustento el PCK de Shulman, realizan un estudio en el que utilizan datos del área rural de Guatemala para analizar el efecto del conocimiento de los profesores sobre el logro del aprendizaje en matemáticas de los estudiantes. La recolección de datos comenzó a fines del año escolar 2001, con un conjunto de pruebas de español y de matemáticas en una muestra representativa a nivel nacional de aulas rurales de tercer grado. Se recolectaron datos durante todo el año escolar 2002 en una submuestra de 55 escuelas extraídas de la muestra del Programa PRONERE (Proyecto de evaluación Nacional de Evaluación del Rendimiento Escolar) en tres estados. Los estados fueron seleccionados para cubrir los tres principales tipos de comunidad en zonas rurales de Guatemala: en su mayoría indígenas. Los profesores participantes respondieron una prueba de matemáticas con preguntas relativas a los niveles de primaria y secundaria, además se realizaron observación de las clases.

Marshall y Sorto (2012) encuentran que la variable conocimiento especializado del conocimiento matemático del profesor se correlaciona significativamente con la variable conocimiento matemático común (r = 0.4) y evidencian de que el acceso de los profesores a los cursos universitarios está asociado a niveles más elevados de conocimiento del contenido especializado en matemáticas. Esto apoya los esfuerzos continuos en países como Guatemala para mejorar los niveles de capacitación docente. Por otra parte, los puntajes de matemáticas de los estudiantes son más bajos en las escuelas donde pasan más tiempo copiando y resolviendo problemas individualmente, siendo esta una actividad predominante en áreas como las zonas rurales de Guatemala. Las actividades más productivas en su lugar parecen ser aquellos que involucran a los estudiantes en el proceso de aprendizaje, que incluyen conversaciones directas, trabajo en grupos y envían estudiantes a la pizarra. Así, los resultados sugieren mecanismos específicos por los cuales los maestros pueden tener un impacto sustancial en el aprendizaje de los estudiantes, incluso en contextos extremadamente pobres.

Carnoy y Arends (2012) realizan un estudio cuyo propósito es evaluar empíricamente factores asociados a la escuela y al aula que contribuyen a los logros de aprendizaje en matemáticas de estudiantes de sexto grado, en la región fronteriza ubicada al noroeste de Sudáfrica y el sudeste de Botswana. En el aula, se pone énfasis en el conocimiento matemático de los profesores, la pedagogía y la oportunidad de aprender. La hipótesis del estudio es que el conocimiento matemático y el pedagógico del profesor se relacionan con la amplitud y profundidad de su enseñanza en las aulas, además de la efectividad de su enseñanza, medida por los logros de aprendizaje de los estudiantes.

Carnoy y Arends (2012) recopilan datos durante el año académico 2009. Investigadores de la Universidad de Botswana, el Consejo de Investigación de Ciencias Humanas en Sudáfrica y la Universidad de Stanford muestrearon aleatoriamente 130 aulas de matemáticas de sexto grado en 120 escuelas (60 en cada país). De las escuelas y aulas de la muestra, 116 escuelas y 126 aulas suministraron datos incluidos en el análisis. Para obtener la información necesaria, evalúan el conocimiento matemático de los estudiantes en marzo y noviembre del año 2009. La prueba del estudiante fue la misma para ambos países. Fue esencialmente una prueba de quinto grado con algunas preguntas relacionadas con el plan de estudios de sexto grado, que es muy similar en los dos países. Algunas de las preguntas de la prueba administrada a los profesores fueron tomadas de la prueba del estudiante.

Carnoy y Arends (2012) señalan que la gran mayoría de los 5.500 estudiantes de la muestra total provenía de familias pobres y asistían a escuelas gratuitas. Esto puede ayudar a explicar por qué los estudiantes en ambos países obtuvieron resultados bajos en la prueba del nivel de quinto grado (promedio de 28.6% en la prueba inicial al Noroeste de Sudáfrica y 34.6% en Botswana) y obtuvieron ganancias relativamente pequeñas (tres puntos porcentuales en Sudáfrica y cuatro puntos porcentuales en Botswana). Estas diferencias fueron estadísticamente significativas. Los resultados sugieren que para ambas regiones, mejorar la calidad de la enseñanza tiene un impacto importante en la cantidad de matemáticas que aprenden los estudiantes durante el año.

Cueto et al. (2017) realizan un estudio en el que analizan el PCK de profesores, específicamente el subdominio que se refiere al conocimiento de los estudiantes y el contenido matemático. Los datos utilizados provinieron del estudio longitudinal Young Lives. En este estudio, utilizan datos de una submuestra de 572 estudiantes en 132 escuelas primarias del Perú, seleccionadas al azar. El estudio se enfoca solo en los niños de Young Lives que estaban en cuarto grado y sus respectivos profesores de matemáticas. Se seleccionó el cuarto grado porque era el grado predominante en la muestra.

En primer lugar, se explora si el PCK de los profesores se asocia positivamente con el nivel socioeconómico. En segundo lugar, se explora si existe una asociación positiva entre PCK y el rendimiento de los estudiantes controlando las variables individuales, familiares, docentes y de nivel escolar. Finalmente, se explora qué características de los maestros se asocian con puntajes más altos del PCK.

Los resultados del estudio de Cueto et al. (2017) muestran que el nivel socioeconómico del estudiante a la edad de un año, el nivel socioeconómico para los mismos niños a los ocho años y los años de escolaridad de la madre en el momento en que el niño tenía un año de edad se correlacionan con el puntaje del PCK de los profesores ($r = 0.21$, $r = 0.19$ y $r = 0.28$, respectivamente), todos estadísticamente significativo ($p <0.05$). Estos resultados refuerzan la idea de que el nivel socioeconómico está relacionado con la distribución de la calidad del profesor. Si bien la asociación entre el nivel socioeconómico y el rendimiento en las escuelas ha sido informada, hay menos estudios que muestran una asociación entre el nivel socioeconómico y calidad de los profesores. Este hallazgo lleva a pensar en formas de evaluar las habilidades de los profesores y asignarlos de una manera más equitativa o tal vez promover la igualdad mediante la asignación de profesores más calificados para estudiantes que son más pobres.

Cueto et al. (2017) encuentran una correlación débil, positiva pero significativa entre el PCK de los profesores y el rendimiento estudiantil en matemáticas ($r= 0.17$, $p <0.05$). Los resultados mostraron que los estudiantes con puntajes más altos tienen más probabilidades de tener un maestro con PCK más alto. Sin embargo, esta asociación fue significativa solo en el modelo que usa el PCK como una variable dicotómica. En el modelo final, el efecto PCK ya no era significativo, el mejor predictor del rendimiento estudiantil para el final de cuarto grado fue el nivel socioeconómico, capturado a la edad de un año. Así como la educación materna y la ubicación de la escuela en un área rural, lo que representa un sistema desigual para los estudiantes respecto al aprendizaje de las matemáticas. Cueto et al. (2017) ponen énfasis en la necesidad de una asignación justa de maestros y señalan que parece que hay un círculo de refuerzo entre el nivel socioeconómico, las habilidades de sus profesores y las puntuaciones de los estudiantes en una prueba de matemáticas.

2.3 Marco conceptual de la investigación: conocimiento profundo y conocimiento sobre la enseñanza

Considerando la complejidad del problema de la presente investigación se ha preferido estudiar más allá de las conceptualizaciones existentes en una teoría. Para estudiar los conocimientos matemáticos para la enseñanza se utilizan nociones del modelo MKT (Ball et al., 2008). Para estudiar el CK se utiliza la noción de conocimiento profundo (Ma, 2010; Tchoshanov, 2011; Tchoshanov et al., 2017). Para estudiar el PCK se utilizan la noción del conocimiento del contenido y los estudiantes (Hill et al., 2008) y la orientación constructivista (Olfos et al., 2014). Para estudiar el objeto matemático se utilizan los significados de cuatro subconstructos de las fracciones que se obtienen de Gallardo et al. (2008).

A continuación se ofrece una síntesis del marco conceptual asociado a este estudio. La Figura 48, proporciona una visión del marco conceptual del estudio. En la presente investigación se utilizan nociones del modelo conocimiento matemático para la enseñanza MKT (Ball et al., 2008). Una de esas nociones corresponde al dominio CK, específicamente al subdominio del conocimiento especializado del contenido. La otra noción corresponde a al dominio del PCK, específicamente al subdominio conocimiento del contenido y los estudiantes y conocimiento del contenido y de la enseñanza.

En la figura 48, se observa que del subdominio conocimiento especializado del contenido matemático (SCK), se desprende el constructo conocimiento profundo de las fracciones y del subdominio conocimiento del contenido y los estudiantes (KCS) y conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT), se desprende el constructo conocimiento sobre la enseñanza de las fracciones. Ambos constructos adaptados para cumplir con los objetivos de la investigación.

El constructo conocimiento profundo de las fracciones se define como un conocimiento conceptual y conectado (Ma, 2010; Tchoshanov, 2011; Tchoshanov et al., 2017) que incluye la comprensión de diferentes subconstructos que se manifiestan al concebir a la fracción como parte todo, cociente, operador y medida (Gallardo et al., 2008). Con base en la investigación de Hill et al. (2008), en este estudio el constructo conocimiento sobre la enseñanza de las fracciones se refiere al conocimiento que tiene el profesor respecto del pensamiento de los alumnos; los errores comunes, dificultades, conocimientos adquiridos y estrategias utilizadas por los estudiantes. Del subdominio conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT) se desprende la componente orientación constructivista, que incluye las concepciones constructivistas y no constructivistas del profesor acerca del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Las concepciones del profesor están relacionadas con sus creencias sobre cómo se produce el aprendizaje lo que puede incidir en la forma en como el profesor transforma el contenido matemático en contenido a enseñar (Olfos et al., 2014).

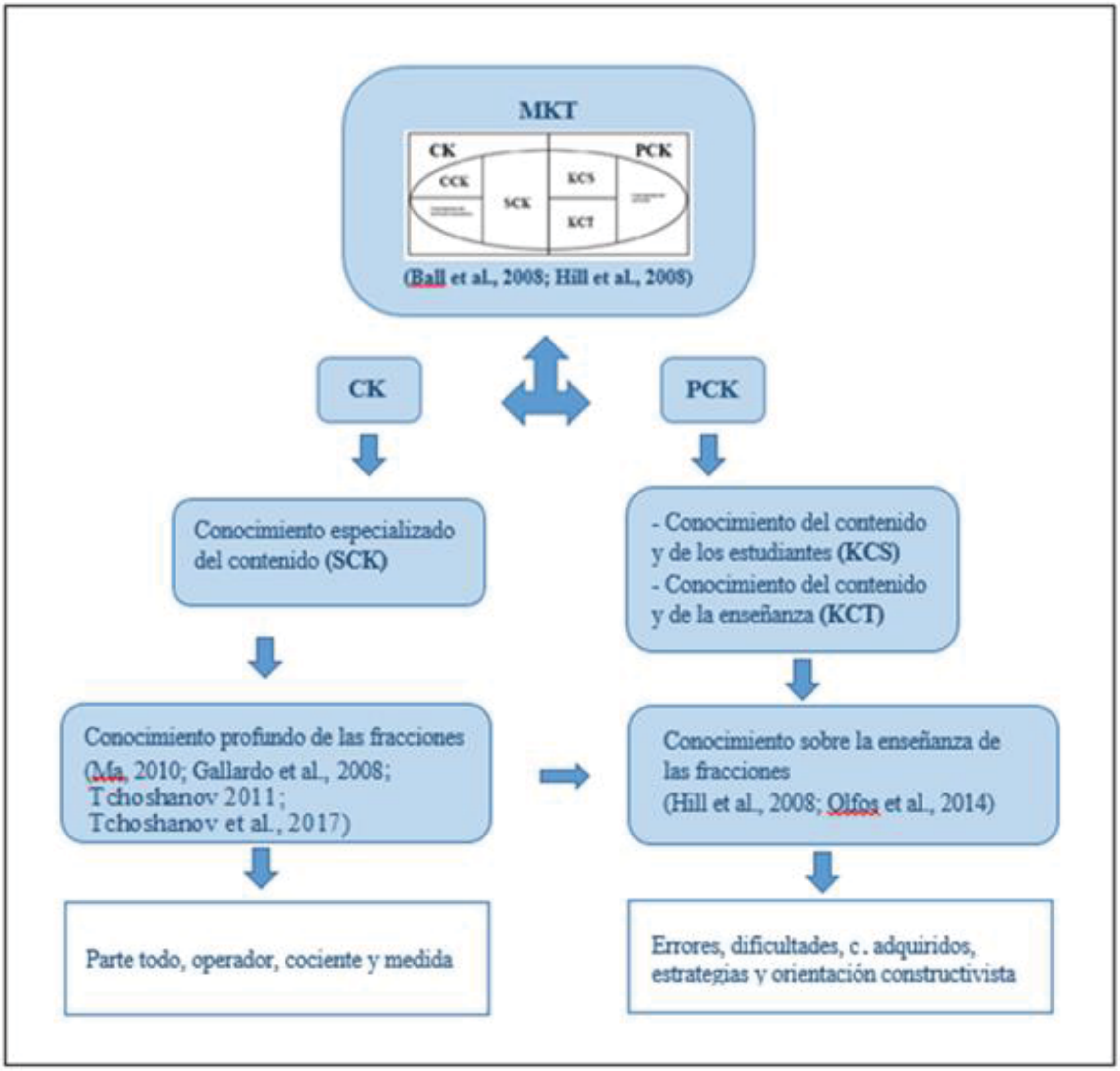


Figura 48. Marco Conceptual del Estudio

RESUMEN

Hace tres décadas, Shulman (1986) argumentó que el conocimiento de los profesores es complejo y multidimensional. Él fue pionero en distinguir tipos de conocimientos para la enseñanza de un contenido, a saber, Conocimiento del Contenido (CK), Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK) y conocimiento curricular. Desde la categorización inicial de Shulman, varios investigadores han presentado diversas conceptualizaciones acerca de los conocimientos requeridos para la enseñanza de la matemática (Ball et al., 2008; Hill et al., 2008; Ma, 1999; Tchoshanov et al., 2017).

Ball et al. (2008) y Hill et al. (2008), a través del modelo conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) presentan categorías de conocimientos asociados al CK y al PCK. En cuanto al CK, distinguen: conocimiento común del contenido (CCK) y conocimiento especializado del contenido (SCK). En cuanto al PCK, distinguen: conocimiento del contenido y los estudiantes (KCS), Conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT) y Conocimiento del currículum. Ma (1999), alineada con la conceptualización de Shulman (1986), considera que es deseable que los profesores posean un conocimiento profundo del currículo escolar, conceptual e interconectado. En su estudio, el conocimiento profundo de los profesores chinos se muestra habilitador del PCK.

Parte de los esfuerzos que realizan los investigadores en la modelación de los conocimientos necesarios para la enseñanza de la matemática comprende la elaboración de instrumentos válidos, para medir ese conocimiento en los profesores. Hill et al. (2005) son pioneros en medir el conocimiento matemático utilizado al enseñar, por medio de pruebas, y su efecto en los logros de aprendizaje de los estudiantes. Con posterioridad al trabajo de Hill et al. (2005), algunos investigadores han estimado el efecto tanto del CK como el PCK de los profesores

sobre los logros de aprendizaje de los alumnos en matemáticas (Baumert et al., 2010; Carnoy y Arends, 2012; Cueto et al., 2017; Marshall et al., 2009; Marshall y Sorto, 2012; Metzler y Woessman, 2012; Olfos et al., 2014; Tchoshanov, 2011; Tchoshanov et al., 2017). En general, estos estudios han abordado una amplia gama de temas matemáticos, sin centrarse en un tema en particular. Desde la perspectiva de lo específico, el presente estudio explora el efecto del conocimiento del profesor sobre el conocimiento del alumno, centrándose en la conceptualización de las fracciones.

A partir del modelo MKT (Ball et al., 2008) y la revisión de literatura sobre el conocimiento del profesor para enseñar matemáticas, en el presente trabajo de tesis se construye un marco conceptual, constituido por el constructo conocimiento profundo de las fracciones y por el constructo conocimiento sobre la enseñanza de las fracciones. El primero, conocimiento profundo, se desprende del SCK, y el segundo, conocimiento sobre la enseñanza se desprende del KCS y KCT. La autora de la presente tesis propone el constructo "conocimiento profundo de las fracciones" como un conocimiento conceptual y conectado (Ma, 2010; Tchoshanov., 2011; Tchoshanov et al., 2017).

En cuanto al conocimiento profundo de las fracciones el modelo abarca los cuatro significados de la fracción: parte todo, cociente, operador y medida (Behr et al., 1983; Charalambous y Pitta-Pantazi, 2007; Gallardo et al., 2008; Kieren, 1976, 1993). En cuanto al "conocimiento sobre la enseñanza de las fracciones" el modelo abarca el conocimiento del profesor sobre conocimientos adquiridos por los alumnos, sus errores, dificultades y estrategias, además de la orientación del profesor en tanto es más o menos constructivista (Hill et al., 2008; Olfos et al., 2014).

Capítulo 3

Cuatro estudios sobre las fracciones

Cuatro estudios sobre las fracciones

Introducción a los cuatro Estudios

Los bajos niveles de logros alcanzados por estudiantes chilenos tanto en pruebas nacionales como internacionales (MINEDUC, 2017) constituyen un desafío para que los investigadores logren esclarecer qué factores inciden en el éxito de los estudiantes en matemáticas. Aunque internacionalmente se reconoce que un factor clave lo constituye el conocimiento del profesor, aún se mantiene en discusión la identificación de ese conocimiento. Así, el presente trabajo de tesis doctoral emerge frente a la problemática de identificar qué conocimientos matemáticos y didácticos requiere un profesor para realizar una enseñanza efectiva.

Shulman (1986) introdujo por primera vez tipologías de conocimiento del profesor requeridos para enseñar: CK, PCK y conocimiento curricular. Con posterioridad al trabajo de Shulman (1986), en el campo de la educación matemática, varios investigadores han presentado diversas conceptualizaciones acerca de los conocimientos requeridos para la enseñanza (Ball et al., 2008; Hill et al., 2008; Ma, 1999; Tchoshanov et al., 2017). Tomando como sustento estas investigaciones y en base al modelo MKT de Ball et al. (2008) y Hill et al. (2008) se construye el marco conceptual para el estudio (sección 2.3, capítulo 2).

En el marco conceptual del estudio se presentan dos tipos de conocimiento del profesor: "el conocimiento profundo" y "el conocimiento sobre la enseñanza" centrado en las fracciones. La literatura muestra que las fracciones son un tema relevante, además es un tema especializado que no se aprende en la vida cotidiana. Su tratamiento depende del currículo y se aprende o no se aprende, según lo enseñe o no lo enseñe el profesor. Por ende, el conocimiento del profesor ocupa un lugar importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las fracciones.

El objetivo del trabajo de tesis doctoral es determinar en qué medida el conocimiento profundo y el conocimiento sobre la enseñanza del profesor, se constituyen en variables explicativas del aprendizaje del alumno en fracciones. Para cumplir con este objetivo, un primer paso consistió en elaborar instrumentos válidos y confiables que midan el conocimiento del profesor y el aprendizaje del alumno en los temas mencionados. Para la elaboración de estos instrumentos se utilizaron de base las preguntas de dos pruebas previamente elaboradas, en el contexto del trabajo de tesis de magíster en didáctica de la matemática (Rodríguez, 2012). Algunas preguntas de las pruebas (Rodríguez, 2012) se modificaron y administraron a grupos de profesores con el propósito de mejorar las propiedades de los instrumentos. Finalmente se logra construir dos instrumentos válidos y confiables. Este estudio de los instrumentos corresponde al ESTUDIO 1 de esta tesis doctoral.

Un segundo paso para cumplir con el objetivo de la tesis consistió en establecer un nivel de asociación entre el aprendizaje del alumno y del profesor. Para ello, la autora de la presente tesis elabora un instrumento con validez y confiabilidad aceptable para medir el aprendizaje de los alumnos en fracciones enmarcado en el currículo de 4° básico (Rodríguez y Navarrete, 2020). Luego se administran los respectivos instrumentos tanto para los alumnos como para sus profesores. En este estudio se aplicó pretest y postest a los alumnos, utilizando el postest como variable dependiente. Los datos se analizan utilizando modelos multinivel. Los resultados muestran que el conocimiento del profesor, solo o en combinación con otros factores, explica alrededor del 10% de la variabilidad en el postest de los alumnos, con una significación del 10% (ESTUDIO 2).

Considerando que en el ESTUDIO 2, el conocimiento del profesor no alcanzó una significación estadística al 5%, se optó por una estrategia utilizada en la literatura (Mullens et al., 1996), que substrae el puntaje del pretest al postest de cada alumno y así proporciona una puntuación de ganancia o avance de aprendizaje, que se convierte en la variable dependiente en los análisis de regresión subsiguientes. La principal ventaja de utilizar puntuaciones de avance es que son estimaciones imparciales del crecimiento académico de los alumnos. Con este nuevo diseño y una ampliación de la muestra, la autora realiza el tercer estudio (ESTUDIO 3), posteriormente los datos son analizados utilizando modelos multinivel. Los resultados indican que, de la variabilidad observada en la conceptualización de las fracciones por los alumnos, el 76% se podría atribuir al conocimiento previo de los alumnos y del 24% restante a las variables a nivel de la escuela. La varianza entre las escuelas estaría explicada en un 26% por el conocimiento del profesor, con una significación al 5%.

El "conocimiento profundo" y el "conocimiento sobre la enseñanza" fueron tratadas como una sola covariable en los estudios 2 y 3 debido a que por sí solas no tenían suficiente significación estadística. La autora decide realizar un cuarto estudio (ESTUDIO 4) en el que se tratan las variables "conocimiento profundo" y "conocimiento sobre la enseñanza" de manera independiente. Los resultados de los análisis de regresión muestran que el efecto conocimiento profundo del profesor es significativo en el aprendizaje del alumno ($p= 0.001$).

El primer estudio se publica en enero del año 2018 en la Revista Electrónica de Investigación Educativa (Scopus). El segundo estudio, fue aceptado en la Revista Cultura y Educación (WOS). En el año 2017, el tercer estudio pasó al proceso de revisión por pares en la Revista de Investigación Educativa (Scopus), pero no fue aceptado para su publicación debido a que los revisores de la revista consideraron que era necesario ampliar la muestra de profesores. El cuarto estudio fue aceptado en la Revista Electrónica de Investigación Educativa (Scopus) para ser publicado en el volumen 22(1), enero-marzo de 2020. A continuación se presentan los cuatro estudios.

Estudio 1: Instrumentos consistentes para la enseñanza de las fracciones en 4º grado

Resumen

En Chile y, en general, para todos los sistemas educativos del mundo es conveniente disponer de instrumentos consistentes que midan los conocimientos que requiere un profesor para lograr que sus alumnos aprendan; instrumentos útiles para la formación inicial y continua del profesorado. El propósito de este estudio consistió en elaborar dos instrumentos consistentes, uno sobre el conocimiento profundo del profesor acerca de las fracciones y otro sobre el saber del profesor acerca del conocimiento que el alumno pone en juego al conceptualizar las fracciones en 4° grado. Los instrumentos fueron aplicados en dos oportunidades a grupos de 30 profesores de primaria y una vez a 20 estudiantes de la carrera de Pedagogía en Matemáticas. Tras los respectivos procedimientos psicométricos se obtuvieron dos instrumentos, de 12 y 10 preguntas, con una consistencia interna de 0.74 y 0.75 alfa de Cronbach.

Palabras clave: Fracciones, validación de instrumentos, enseñanza de las Matemáticas.

1. Introducción

En el informe de la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO, 2012) se declara que los profesores son la clave para el desarrollo sostenible de la educación. Diversas investigaciones han puesto de manifiesto la relevancia de la calidad de los profesores respecto a los resultados de aprendizaje de los alumnos (Eurydice, 2013).

El estudio Teacher Education Study in Mathematics (TEDS-M) revela que Chile no está preparando a sus futuros profesores de educación primaria para enseñar matemáticas.

Algunos factores que pueden explicar esos resultados son la insuficiencia de conocimientos matemáticos adquiridos en la enseñanza media (Ávalos y Matus, 2010).

En Chile, a los profesores noveles se les están haciendo evaluaciones masivas que miden conocimientos disciplinarios y didácticos, pero se requieren instrumentos consistentes para la evaluación del profesorado. Considerando los recientes hallazgos internacionales –que coinciden en identificar al profesor como el principal factor para el mejoramiento en la calidad de la educación (Bruns y Luque, 2014; UNESCO, 2012), y la necesidad de disponer de instrumentos de calidad que midan los conocimientos del profesorado– esta investigación tuvo por objetivo elaborar dos instrumentos consistentes sobre el conocimiento del profesor acerca de la enseñanza de las fracciones en 4° grado.

Shulman (1986) es precursor en identificar el conocimiento que requiere un profesor para enseñar un contenido, al que denomina "conocimiento pedagógico del contenido" (CPC), reconociéndolo como "la forma particular del conocimiento que incorpora el aspecto del contenido que guarda más relación con la enseñanza". Así, desde que Shulman identificara el CPC, en las últimas tres décadas diversos investigadores han contribuido a precisar el dominio de los contenidos requeridos para enseñar matemáticas (Ball, 1990; Ball, 2000; Ball, Hill y Bass, 2005; Ball, Thames y Phelps, 2008; Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013; Hill y Ball, 2004; Hill, Ball y Schilling, 2008; Krauss, 2007; Ma, 1999; Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005).

Este estudio se basó en dos subdominios de conocimientos del modelo Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) (Ball et al., 2008): uno es el conocimiento especializado del contenido y otro es el conocimiento del contenido y de los estudiantes, específicamente se analizó el conocimiento matemático para la enseñanza.

Parece ser evidente que un profesor debe manejar los conocimientos que enseña; sin embargo, hay investigaciones que ponen de manifiesto la insuficiencia en temas elementales para la enseñanza de las matemáticas (Ball 1990; Ma, 2010; Sorto, Marshall, Luschei y Carnoy, 2009).

Mediante un estudio de corte cualitativo, Ma (1999) comparó el conocimiento que ponen en juego en la tarea de enseñar profesores estadounidenses y profesores chinos. Ma analiza el tipo de comprensión que distingue a los dos grupos de profesores: uno es procedimental, es decir, saber cómo realizar un algoritmo, y el otro es conceptual, es decir, saber por qué tiene sentido matemáticamente realizar ese algoritmo.

Según Ma (1999), corroborado por MT21 (2007), un factor clave para otorgar educación matemática de calidad es un conocimiento profundo del contenido matemático por parte del profesor. Para promover el aprendizaje de las matemáticas los profesores deben tener una comprensión profunda de las matemáticas fundamentales (CPMF). En este estudio adaptamos las características de CPMF de Ma (2010) y presentamos las categorías del conocimiento profundo de las fracciones (Cprofu-f):

1) Conectividad. El profesor realiza conexiones explícitas entre los conceptos y los procedimientos matemáticos. Por ejemplo, propone ordenar fracciones en la recta numérica.
2) Múltiples perspectivas. El profesor aprecia varios enfoques para una solución, y puede dar explicaciones matemáticas para esos enfoques. Los profesores muestran una comprensión flexible de las fracciones, por ejemplo, presentan diversas representaciones en contextos discretos y/o continuos.

3) Ideas básicas. El profesor es consciente de los conceptos y principios matemáticos. Los profesores tienden a repasar y reforzar estas ideas básicas. Por ejemplo, plantea situaciones de fracciones en que la unidad difiere de 1.
4) Coherencia longitudinal. El profesor muestra una comprensión fundamental del currículo escolar, da oportunidad de repasar conceptos previos y sentar las bases de un concepto que será aprendido en el futuro. Por ejemplo, comprende la importancia de la propiedad de densidad en los números reales.

En este estudio se aborda particularmente la enseñanza de las fracciones, tema recurrente en los niveles escolares primario a terciario, central en el desarrollo del pensamiento proporcional, y en el estudio de los números racionales, los porcentajes, los decimales y las razones (Cortina, Cardoso y Zúñiga, 2012).

Las fracciones son difíciles de aprender y de enseñar, su complejidad ha llevado a muchas investigaciones (Behr, Harel, Post y Lesh, 1993; Block y Solares, 2001; Carpenter, Fennema y Romberg, 1993; Fandiño, 2009; Freundenthal, 1983; Kieren, 1993; Rojas, Flores y Carrillo, 2011; Salazar, Martinic y Maz, 2011; Streefland, 1991; Valdemoros, 2010). Las fracciones se asocian a diversas situaciones y toman distintos significados, por ejemplo, parte-todo, cociente, medida, razón y operador, lo que las ubica en un contexto de aprendizaje complejo que demanda altas exigencias cognitivas para su conceptualización (Gallardo, González y Quispe, 2008).

El conocimiento que el profesor alcanza respecto a la relación de los alumnos con el contenido, es decir, errores, dificultades y estrategias utilizadas por los estudiantes, es uno de las componentes del conocimiento didáctico del profesor. Este conocimiento docente considera cómo los alumnos razonan y aprenden un contenido en particular (Artigue, Douady, Moreno y Gómez, 1995; Carrillo et al., 2013; Hill et al., 2008).

Con base en la investigación de Hill et al. (2008), en este estudio las características del saber del profesor acerca del conocimiento que el alumno pone en juego al conceptualizar las fracciones (Cconceptua-F) son las siguientes:

1) Conocimiento de errores comunes de los alumnos: El profesor identifica y obtiene explicaciones de los errores de los alumnos, advierte que los errores surgen del contenido.

2) Conocimiento de las dificultades de los alumnos: El profesor identifica y comprende cuáles son las dificultades o barreras más frecuentes de los alumnos y que inducen al error.

3) Conocimientos adquiridos por los alumnos: El profesor conoce las conceptualizaciones y los conocimientos previos adquiridos del alumno; por ejemplo, el profesor sabe lo que son capaces de hacer los estudiantes de tercer grado.

4) Estrategias usadas por los alumnos: El profesor está familiarizado con las posibles soluciones que utilizarán sus alumnos al resolver una cuestión matemática.

1.1 Marco conceptual para la construcción de los instrumentos

En la presente investigación utilizamos nociones del modelo del conocimiento para la enseñanza de matemáticas propuesto por Hill et al. (2008), enriquecido con las ideas de Ma (1999). Las dimensiones del marco conceptual se declaran en los siguientes términos (ver figura 49); se operacionaliza el conocimiento profundo de las fracciones presentes en el currículo y para conceptualizar la dimensión Cprofu-F utilizaremos las características del conocimiento del profesor respecto a la conectividad, múltiples perspectivas, ideas básicas y coherencia longitudinal. Además, se operacionaliza el conocimiento del profesor acerca del saber del alumno Cconceptua-F, en cuanto los conocimientos adquiridos, a las dificultades, errores, estrategias usuales en el tema de las fracciones y el conocimiento del currículo.

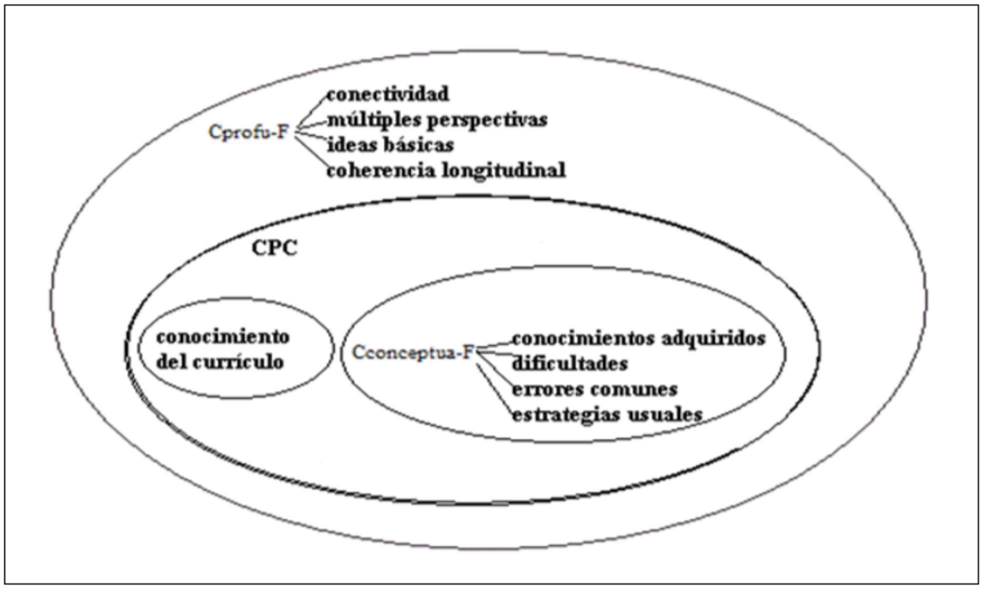


Figura 49. Esquema del marco conceptual.

2. Método

Este estudio se circunscribe al contenido de las fracciones según lo que establece el currículo chileno en el Programa de Estudio de 4° grado (Mineduc, 2003). En la tabla 5 se observa que tales contenidos están presentes en la construcción de las preguntas de los instrumentos, proveyendo validez de contenido.

Tabla 5

*Contenidos mínimos obligatorios para fracciones 4° grado**

Contenidos del Programa 4° grado Unidad fracciones	Test Cprofu-F N° Pregunta	Test Cconceptua-F N° Pregunta
Situaciones de reparto equitativo	11-12	2-9
Lectura y escritura de fracciones	4-5	6-7
Familias de fracciones de igual valor	9-10	3-8
Ubicación de fracciones mayores que la unidad en la recta numérica	3	10
Uso de fracciones para precisar la descripción de la realidad	6-7-8	1
Total	12	10

*Fuente: Mineduc (2003).

El instrumento para medir el Cprofu-F contiene preguntas referidas a las cuatro categorías (ver tabla 6). Lo que ofrece validez de contenido del instrumento en relación al constructo Cprofu-F.

Tabla 6

Categorías contenidas en el instrumento sobre el Cprofu-F de los profesores

Cprofu-F	N° Pregunta
Conectividad	1-2-3
Múltiples Perspectivas	6-9-10
Ideas básicas	4-5-11-12
Coherencia Longitudinal	7-8

El instrumento para medir el Cconceptua-F contiene preguntas referidas a las cuatro categorías (ver tabla 7), lo que ofrece validez de contenido al instrumento en relación al constructo Cconceptua-F.

Tabla 7

Categorías Cconceptua-F contenidas en el instrumento sobre el Cconceptua-F de los profesores

Cconceptua-F	N° Pregunta
Conocimientos Adquiridos	1-2-3
Dificultades más frecuentes de los alumnos	6-9-10
Errores posibles de los alumnos	4-5-11-12
Estrategias usuales de los alumnos	7-8

2.1 Etapas y procedimientos

Para analizar el grado de dificultad y discriminación de las preguntas se utilizaron los parámetros establecidos para la aceptación de preguntas, planteados por Guilford (1975) donde el rango aceptable para el índice de dificultad oscila entre 0.2 y 0.85, y en el caso de la discriminación se asume un índice mínimo de 0.3. También consideramos a Backhoff, Larrazolo y Rosas (2000), quienes clasifican las preguntas según su nivel de dificultad, agrupándolas como “altamente difíciles” (<0.32); “medianamente difíciles” (0.33 a 0.52); “de dificultad media” (0.53 a 0.73); “medianamente fáciles” (0.74 a 0.86); y “altamente fáciles" (> 0.86). Backhoff et al. (2000) señalan que entre más alto es el índice de discriminación, la pregunta diferenciará mejor a las personas con altas y bajas calificaciones.

1a. etapa: Elección de un instrumento desarrollado y probado. Se comenzó con un instrumento que constaba de 37 preguntas relativas al conocimiento matemático y didáctico sobre fracciones (Olfos, Guzmán y Galbiati, 2010). Del total de preguntas de ese instrumento se eligieron 23 preguntas pertinentes para la investigación, posteriormente se analizaron en función de sus índices de discriminación y de dificultad, y se mejoró su redacción.

2a. etapa: Revisión y redacción de preguntas Cprofu-F. De las 23 preguntas elegidas, se consideran 10 preguntas relativas al conocimiento del profesor acerca de las fracciones, 4 de las preguntas no fueron modificadas y 6 fueron adaptadas. Se agregaron 4 preguntas con el propósito de cubrir contenidos del currículo. Las preguntas se aparearon para medir lo mismo, esto permitió construir el instrumento Cprofu-F con 14 preguntas.

3a. etapa: *Construcción y redacción de preguntas de Cconceptua-F.* De las 23 preguntas seleccionadas, se eligieron 13 preguntas relativas al conocimiento del profesor respecto del saber del alumno, las cuales se agruparon de diversas formas para ver cuál de ellas presentaba mejor índice de discriminación y dificultad. Finalmente se eligieron 6 preguntas que fueron modificadas, luego se duplicaron las preguntas para medir lo mismo, se revisó la redacción y los distractores. Esto permitió construir el instrumento final Cconceptua-F constituido por 10 preguntas.

4a. Etapa: *Primera aplicación del instrumento Cprofu-F y Cconceptua-F.* El instrumento Cprofu-F fue respondido por 30 profesores de primaria y el instrumento Cconceptua-F fue respondido por 27 de los 30 profesores de primaria.

5a. Etapa: Modificación del instrumento Cconceptua-F. La consistencia de Cprofu-F fue aceptable, no así la de Cconceptua-F, por lo que se examinaron y mejoraron los enunciados de las preguntas.

6a. Etapa: Segunda aplicación de los instrumentos Cprofu-F y Cconceptua-F. Los instrumentos se aplicaron a 30 profesores de primaria y posteriormente a 20 estudiantes de la carrera de pedagogía en matemática.

3. Resultados

Se obtuvo un instrumento Cprofu-F con una confiabilidad aceptable, estimada con el coeficiente alfa de Cronbach 0.74 y un instrumento Cconceptua-F con una confiabilidad también aceptable, estimada con el 0.75. En la tabla 8 se muestran los índices de dificultad y discriminación de los instrumentos Cprofu-F y Cconceptua-F.

Tabla 8

Índices de discriminación y dificultad de los instrumentos Cprofu-F y Cconceptua-F

Pregunta Cprofu-F	Índice de dificultad	Índice de discriminación	Pregunta Cconceptua-F	Índice de dificultad	Índice de discriminación
1	0.9	0.4	1	0.8	0.2
2	0.7	0.3	2	0.6	0.4
3	0.6	0.9	3	0.7	0.4
4	0.7	0.6	4	0.4	0.6
5	0.8	0.5	5	0.6	0.7
6	0.6	0.8	6	0.7	0.7
7	0.8	0.4	7	0.7	0.6
8	0.8	0.3	8	0.5	0.8
9	0.8	0.3	9	0.5	0.9
10	0.8	0.4	10	0.7	0.8
11	0.8	0.4			
12	0.8	0.5			

Con el fin de ilustrar el contenido de los instrumentos se presenta una pregunta de Cprofu-F y una pregunta de Cconceptua-F.

La pregunta 7 del instrumento Cprofu-F (ver tabla 9) se relaciona con la categoría coherencia longitudinal, en la cual la respuesta del profesor debe reflejar que no sólo sabe lo que enseña en cierto nivel, sino que maneja un conocimiento de todo el currículo. El profesor que responde que muchas fracciones cumplen esa condición, sabe que Q es denso en R.

Tabla 9
Pregunta 7 Cprofu-F

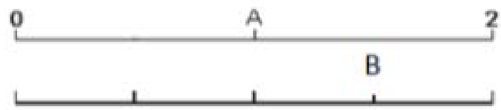
Juan busca una fracción entre 7/8 y 1, ¿qué frase es correcta?
a. No la encontrará, puesto que 8/8 es igual a 1. b. Sólo es posible encontrar una fracción entre esos números. c. Muchas fracciones cumplen esa condición. d. Ninguna de las anteriores.
Respuesta correcta: c. Categoría: Coherencia Longitudinal

La pregunta 10 del instrumento Cconceptua-F (ver tabla 10), corresponde a la categoría conocimiento del profesor sobre las dificultades frecuentes de los alumnos. La respuesta correcta del profesor se basa en su conocimiento para comprender la dificultad común que presentan los alumnos en este tipo de preguntas. La literatura advierte que los niños no siempre comprenden la representación de las fracciones en la recta numérica. El profesor que responde correctamente se da cuenta que el entero es dos, y que el alumno usualmente no ve dos enteros.

Tabla 10

Pregunta 10 Cconceptua-F

Aquí hay dos segmentos de recta numérica de 2 unidades de longitud cada una. En cada segmento las distancias entre las marcas son iguales. La profesora solicitó escribir la fracción representada por la letra B. Algunos alumnos escribieron 3/4. Ello puede deberse principalmente a que:



a. 3/4 de 2 es 3/2.
b. La ubicación de A corresponde a 1.
c. B está ubicado en las tres cuartas parte del segmento de recta dibujado.
d. No me parece clara la pregunta.

Respuesta correcta: c. Categoría: Dificultades más frecuentes de los alumnos

4. Discusión y conclusiones del estudio 1

El estudio se enfocó en la construcción de dos instrumentos consistentes, uno que evalúa el conocimiento profundo del contenido acerca de las fracciones enmarcado en el currículo, Cprofu-F, y otro que evalúa el saber del profesor respecto al conocimiento que el alumno pone en juego al conceptualizar las fracciones en 4° básico, Cconceptua-F.

El análisis de los índices de dificultad y discriminación, además de la revisión de los distractores y de la redacción de las preguntas del instrumento inicial (Olfos et al., 2010) permitieron dilucidar que las preguntas referentes al conocimiento del contenido que presentaban mejores índices de dificultad y discriminación medían un conocimiento matemático que difiere en ciertos aspectos al presentado en otras investigaciones relacionadas con el tema. Por ejemplo, Ball et al. (2008) utilizan la expresión “conocimiento matemático” para enseñar, distinguiendo las componentes, “conocimiento del contenido común” (CCK) y “conocimiento del contenido específico” (SCK). Si el profesor reconoce una respuesta incorrecta es el CCK, mientras que dimensionar la naturaleza del error es el SCK, si el profesor se basa principalmente en su conocimiento matemático.

El instrumento inicial del proyecto FONIDE (Fondo de Investigación y Desarrollo en Educación) presentaba preguntas que medían las componentes del CCK y del SCK propuestos por Ball (2008), estas preguntas presentaban grados de dificultad y discriminación aceptable, pero además advertimos que aquellas preguntas que presentaban mejores índices de dificultad y de discriminación medían un conocimiento matemático del profesor que se aproximaba más a la idea de comprensión profunda de las matemáticas fundamentales de Ma (2010). Asumimos que este saber del profesor es un tipo "especial" de conocimiento matemático para la enseñanza, que denominamos "conocimiento profundo", y supusimos que este conocimiento se podía evaluar confiablemente.

Al analizar las preguntas Cconceptua-F del instrumento inicial FONIDE, advertimos que las que mejor discriminaban eran aquellas que medían el conocimiento profundo referente a la comprensión conceptual del profesor, estos hallazgos nos condujeron a elaborar un esquema del marco conceptual en base a los objetivos presentados. En este estudio se presenta un esquema que difiere en parte del modelo matemático para la enseñanza de Hill et al. (2008), asumimos que el Cconceptua-F está contenido en el CPC, y este a su vez está contenido dentro del Cprofu-F, lo que es consistente con las ideas de Shulman (1986), que ubica el CPC entre el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico. Hill et al. (2008) diferencian el conocimiento del contenido, del conocimiento pedagógico del contenido. El conocimiento de los estudiantes y el contenido (KCS), se encuentra dentro del CPC.

La construcción del esquema del marco conceptual, además de las investigaciones expuestas en este trabajo, permitió construir las preguntas de los instrumentos Cprofu-F y Cconceptua-

F. El instrumento Cprofu-F mostró confiabilidad aceptable en las tres aplicaciones, por lo que no fue modificado. Este resultado se acerca a los resultados de Ball (2008), que logró medir con éxito el conocimiento matemático para enseñar.

El análisis de la confiabilidad de la primera versión del instrumento Cconceptua-F, no era aceptable (alfa de Cronbach 0.6), como ocurre en otros estudios que declaran que el Cconceptua-F es una componente que resulta difícil medir. Por ejemplo, Ball y su grupo de investigación no lograron las propiedades sicométricas aceptables para medir el conocimiento de los estudiantes y el contenido (alfa de Cronbach 0.5). Al reflexionar respecto a las preguntas que presentaban mejor grado de dificultad y discriminación, advertimos que además de medir Cconceptua-F estas medían conocimiento profundo, lo que incidió en la adopción del marco conceptual esquematizado en la figura 49, y consecuentemente, en la reformulación de las preguntas del Cconceptua-F.

En síntesis, se evalúa las dimensiones Cprofu-F y Cconceptua-F, conformando dos instrumentos con validez de contenido y confiabilidad aceptable. El trabajo de validación presenta definición conceptual para medir el constructo, mostramos tres tablas de especificaciones que proporcionan validez de contenido a ambos instrumentos. Cabe hacer notar que estos instrumentos tienen validez teórica y permiten identificar cuál es el nivel de conocimiento de un profesor. Se postula que este es el conocimiento que requiere para enseñar. Pero no hay evidencias de que este conocimiento sea una condición necesaria o suficiente para favorecer los aprendizajes de los estudiantes o al menos llevar adelante una instrucción de calidad. En este sentido, emerge el desafío de recabar evidencias al respecto, ámbito de investigación al que se abren los resultados de este estudio.

Los antecedentes del Estudio 1 se encuentran en tesis de magíster (Rodríguez, 2012). Con posterioridad a este estudio, los instrumentos se refinaron. El instrumento “conocimiento profundo” no se modificó para el trabajo de tesis doctoral. El instrumento “el saber del profesor acerca del conocimiento que el alumno pone en juego al conceptualizar las fracciones en 4° grado” se modificó levemente y se agregó la componente “orientación constructivista”, dicha componente se muestra como un factor que se asocia con el aprendizaje del estudiante (Olfos et al., 2014). En el presente trabajo de tesis doctoral el instrumento modificado se denomina “conocimiento sobre la enseñanza”.

Los instrumentos “conocimiento profundo” y “conocimiento sobre la enseñanza” fueron administrados a una muestra de 62 profesores de cuarto básico de 60 escuelas de la ciudad de La Serena correspondiente al 66% de la población de profesores de cuarto básico de la ciudad de La Serena en el año 2015. La participación de los profesores fue voluntaria. Ambos instrumentos mostraron una confiabilidad aceptable (> 0.7).

Estudio 2: Contribución del conocimiento del profesor al conocimiento del alumno en matemáticas

Resumen

El objetivo de este estudio es establecer en qué medida el conocimiento del profesor, en asociación con el nivel socioeconómico de la escuela, los conocimientos previos de los alumnos y el nivel de conocimientos en matemáticas que se alcanza en las escuelas, contribuye al conocimiento que alcanzan los alumnos en la conceptualización de las fracciones en cuarto grado. Se obtuvo información de 328 alumnos de 4º grado de 9 escuelas y de sus respectivos profesores de matemáticas. Los resultados revelan que, de la variabilidad observada en la conceptualización de las fracciones, el 77% se podría atribuir a las variables de nivel del alumno mientras que el 23% restante a las variables de nivel de la escuela. El 38% de la varianza intra-escuela se explicaría por los conocimientos previos de los alumnos, y prácticamente toda la varianza entre-escuelas estaría explicada por el nivel académico de la escuela o bien en un 32% por el nivel socioeconómico de la escuela. El conocimiento del profesor, solo o en combinación con otros factores, explica alrededor del 10% con una significación del 10%.

Palabras clave: Fracciones, Conocimiento del profesor, análisis multinivel.

1. Introducción

Las diferencias en los niveles de logros alcanzados por distintos países en las pruebas de matemáticas TIMSS y PISA han abierto nuevas interrogantes sobre los factores que explicarían tales diferencias. Los conocimientos previos y las habilidades de los alumnos explican en parte la variabilidad en el aula, pero ello no explica las diferencias entre escuelas o más aún, entre países. Otra variable que explica las diferencias de logro en matemáticas es el capital cultural o el nivel socioeconómico de la familia del alumno (OCDE, 2016). Pero ello, como se observa en TIMSS y PISA, no explica que China o Finlandia tengan mejores resultados que Alemania o EEUU. Otros factores que explican los logros del alumno son el ambiente de aprendizaje en la escuela, el liderazgo del director y, los resultados de la escuela en evaluaciones nacionales (Printy, 2010).

El conocimiento que el profesor requiere para enseñar matemáticas y lograr que sus alumnos aprendan, efectivamente, está asociado al nivel de conocimiento que alcanzan los alumnos. En el estudio PISA (OCDE, 2016) se informa que algunos países que han reducido su porcentaje de alumnos con bajo rendimiento se benefician de profesores más cualificados. En el informe de la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la ciencia y la Cultura (UNESCO, 2012) se declara que los profesores son la clave para el desarrollo sostenible de la educación y que constituyen el principal reto para una educación de calidad para todos. Diversas investigaciones han puesto de manifiesto la relevancia de la calidad de los profesores respecto de los resultados de aprendizaje de los alumnos (Eurydice, 2013; OECD, 2009).

Shulman (1986) es pionero en distinguir categorías de contenidos, enfocadas en los conocimientos que desarrollan los profesores para enseñar, él distingue el conocimiento del contenido (CC), conocimiento pedagógico del contenido (CPC) y conocimiento curricular. De estas tres categorías, el CPC ha captado un alto interés por los investigadores. Shulman (1986, p. 9) identifica el CPC como "la forma particular del conocimiento que incorpora los aspectos del contenido más pertinentes a su enseñanza"; y posteriormente Shulman (1987, p. 8), lo identifica como "esa amalgama especial de contenido y pedagogía que es el campo propio de los profesores, su forma especial de comprensión profesional".

En 1987 Shulman hace referencia a siete tipos de conocimientos, a saber: CC, conocimiento pedagógico general, conocimiento curricular, CPC, conocimiento de los aprendices y de sus características, conocimiento del contexto educativo, y conocimiento de los fines educativos. Categorización que desafió a varios investigadores a proponer otras tipologías y a precisar los dominios asociados a los conocimientos que desarrollan los docentes al enseñar matemáticas (Ball, 1990; Ball, 2000; Ball, Hill y Bass, 2005; Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill y Ball, 2004; Hill, Rowan y Ball, 2005; Hill, Ball y Schilling, 2008; Krauss, 2007; Krauss, Baumert y Blum, 2008; Ma, 1999).

Por su parte, Ma (1999) evidencia que los profesores chinos del nivel primario disponen de un conocimiento profundo y sustancial del contenido matemático, claramente mayor que el de profesores de nivel primario norteamericanos; esto es, una Comprensión Profunda de las Matemáticas Fundamentales, que contribuiría a explicar el éxito de los estudiantes chinos sobre los estudiantes norteamericanos en las pruebas internacionales. Esta concepción acerca de la relevancia del conocimiento matemático del profesor en los logros de sus alumnos ha sido corroborada en otros estudios (Schmidt, Blömeke y Tatto, 2011).

Ball et al. (2005), sustentados en varios estudios de caso, distinguen cuatro categorías de conocimiento en el profesor, a saber, el conocimiento del contenido común, el conocimiento especializado del contenido, el conocimiento de los alumnos y el contenido, y el conocimiento de la enseñanza y el contenido. Posteriormente Ball et al. (2008) señalan que el CPC de los profesores es un predictor significativo de los logros de aprendizaje matemático de los alumnos, y presentan el modelo Conocimiento Matemático para la Enseñanza con tres categorías asociadas al CPC y tres al CC. Las categorías asociadas al CPC son: conocimiento del contenido y de los estudiantes, conocimiento del contenido y de la enseñanza, y conocimiento del currículum. Las categorías asociadas al contenido matemático son: conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido y conocimiento del horizonte matemático.

Asociado a estos avances en la literatura, Rodríguez (2012) construye instrumentos para medir dos tipos de conocimientos del profesor de primaria, centrado en el contenido de las fracciones; a saber, el conocimiento profundo de las fracciones y el conocimiento sobre la enseñanza de las fracciones. Olfos, Goldrine y Estrella (2014) publican un estudio sobre la relación entre el CPC del profesor y su relación con el conocimiento del alumno. Dado que el conocimiento del alumno sobre las fracciones está asociado al aprendizaje del álgebra y al éxito en matemáticas superiores el tema tiene impacto en la formación científica de los jóvenes (Siegler et al., 2012; Torbeyns, Schneider, Xin, y Siegler, 2015).

El presente trabajo se suma a un grupo de investigaciones que estudia la relación entre el conocimiento de los profesores y el rendimiento de los estudiantes (Baumert et al., 2010; Harbison y Hanushek, 1992; Hill et al., 2005). El objetivo de la presente investigación es establecer en qué medida el conocimiento del profesor, en asociación con el nivel socioeconómico (NSE) de la escuela, los conocimientos previos de los alumnos y el nivel de conocimientos en matemáticas que se alcanza en las escuelas, contribuye al conocimiento que alcanzan los alumnos en la conceptualización de las fracciones en cuarto grado. Así este estudio expo-facto con pre y post test, bajo un modelo multinivel, siguiendo la metodología expuesta por Pardo, Ruiz y San Martín (2007), se explora el conocimiento del profesor como factor explicativo del conocimiento del alumno en fracciones.

2. Método

2.1 Participantes

En este estudio participaron 328 estudiantes de 4to básico ubicados en 13 aulas atendidas por 9 profesores de 9 establecimientos escolares, 3 municipales y 6 subvencionados, proporcional a la cantidad de estos tipos de escuelas en la ciudad de La Serena; cercano al 10% de la población de establecimientos. Los grupos se obtuvieron de un muestreo proporcional, con participación voluntaria y corresponden a un grupo de escuelas que dista en ½ desviación estándar de la media poblacional (Sig< .01). Los 9 establecimientos de la muestra constituyen una cifra cercana a la estimada como suficiente para llevar adelante el análisis estadístico. En efecto, Mass y Hox (2005) sostienen que si se está interesado en los efectos fijos del modelo, 10 grupos de 30 individuos en el segundo nivel son suficientes para llevar adelante el estudio. Los datos fueron tomados durante el año escolar 2015. El número de alumnos oscila entre 9 y 76 por escuela (ver Tabla 11). Seis de los 9 profesores son mujeres. En promedio tienen 13 años de experiencia, con un mínimo de 2 y máximo de 34. Todos los docentes tienen el título de profesor, 8 de educación básica y 1 de matemática. De los profesores generalistas de educación básica 2 tienen cursos de especialización en matemáticas, 4 tienen pos-título de mención en matemáticas y 1 en Ciencias Naturales y 1 tiene la mención en trastornos del aprendizaje.

Tabla 11

Tipos de Escuela y Número de Cursos y Alumnos por Escuela

Escuelas	MA	CG	ME	AE	TR	CO	JC	GR	SB	Total
Tipo	P-sub	P-sub	P-sub	P-sub	Mun	Mun	P-sub	P-sub	Mun	
Cursos	1	2	2	2	1	1	1	2	1	13
Alumnos	28	48	47	58	18	9	26	76	18	328

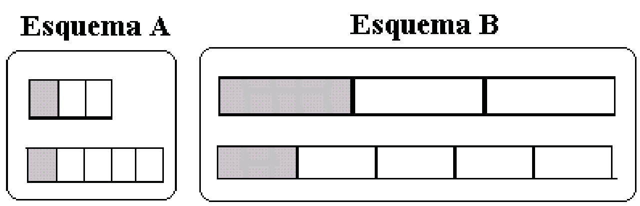
2.2 Instrumentos

Prueba de conocimientos de los alumnos sobre las fracciones

Esta prueba se administró a los alumnos en dos oportunidades, al inicio del año escolar como *Pretest* y al final del año como *Postest.* La prueba consta de 22 ítems de selección múltiple organizados de acuerdo a una matriz de especificaciones enmarcada en los contenidos curriculares (MINEDUC, 2012) de la unidad de "Fracciones", según lo muestra la Tabla 12. La prueba mostró una confiabilidad de .77 según el coeficiente alfa de Cronbach. A continuación se presentan dos ejemplos de preguntas del test para los alumnos.

Pregunta 10: Dimensión Concepto de fracción

<table>
<tr>
<td>
10. ¿Qué relación se muestra correctamente en los esquemas?



a) El esquema A muestra que $\frac{1}{3}$ es menor que $\frac{1}{5}$
b) El esquema A muestra que $\frac{1}{3}$ es igual a $\frac{1}{5}$
c) El esquema B muestra que $\frac{1}{3}$ es mayor que $\frac{1}{5}$
d) En ambos esquemas se muestra que $\frac{1}{3}$ es menor que $\frac{1}{5}$
</td>
<td>
Dificultad ítem .43
Dicriminación .58
Correl item test .41
</td>
</tr>
</table>

Pregunta 16: Dimensión Identificación y representación de fracciones

<table>
<tr>
<td>
16. Pamela y Daniela comparten 3 chocolates en partes iguales, y sin que le sobre chocolate, ¿qué cantidad le toco a cada una?

a) Un chocolate a cada una.
b) Un chocolate y medio para cada una.
c) Un chocolate a cada una, y quedó el tercero.
d) Dos chocolates para Pamela y un chocolate Daniela.
</td>
<td>
Dificultad ítem .73
Dicriminación .48
Correl item test .57
</td>
</tr>
</table>

Tabla 12

Matriz de Especificaciones Prueba para los Alumnos

	ítems
Conocimientos previos	6
Comprensión de las fracciones	9
Adición y sustracción de fracciones de igual denominador en contexto	3
Identificación y representación de fracciones propias y números mixtos hasta 5	4

Prueba de conocimiento del profesor sobre fracciones y su enseñanza.

Esta prueba fue administrada a inicios de año a los 9 profesores que enseñaron matemáticas a los alumnos participantes en el 4º grado. El instrumento está conformado por 24 ítems de selección múltiple, 10 referidos al conocimiento profundo sobre las fracciones y 14 al conocimiento sobre la enseñanza de las fracciones. La fiabilidad del instrumento es .74 según el coeficiente alfa de Cronbach. En la dimensión de conocimiento profundo de las fracciones la consistencia interna es .58 y en conocimiento sobre la enseñanza es .60 (Rodríguez y Olfos, 2018). A continuación se presentan dos ejemplos de ítems del test para los profesores.

Pregunta 14: Dimensión Conocimiento de la enseñanza de las fracciones

Laura y Andrés, alumnos de 4º básico, discuten la justificación de la regla: "para determinar si una fracción es mayor que otra, se verifica que el producto del numerador de la primera por el denominador de la segunda sea mayor que el producto entre el denominador de la primera y el numerador de la segunda". ¿Quién justifica correctamente?

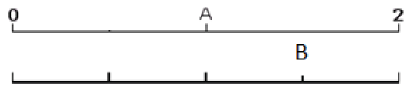
- Justificación de Laura: "La regla es válida porque en las fracciones propias el numerador es menor que el denominador"
- Justificación de Andrés: "Esa regla se obtiene de amplificar cada una de las fracciones por el denominador de la otra y constatar que se comparan los numeradores de fracciones de igual denominador"

a. La de Laura
b. La de Andrés
c. Ambos dan argumentos incorrectos.
d. En realidad, no sé bien qué argumento es correcto.

- Índice de dificultad: 0,40
- Índice de discriminación: 0,67
- Correlación con el instrumento: 0,58

Pregunta 23: Dimensión conocimiento sobre las fracciones

Aquí hay dos segmentos de recta numérica de 2 unidades de longitud cada una. En cada segmento las distancias entre las marcas son iguales. ¿Qué fracción corresponde a B?



A. 3/4
B. 2/3
C. 3/2
D. 4/5

- Índice de dificultad: 0,43
- Índice de discriminación: 0,78
- Correlación con el instrumento: 0,58

Variables contextuales

- Puntuaciones SIMCE Matemáticas

El índice SIMCE (Sistema de Medición de la calidad de la Educación) Matemáticas corresponde al promedio alcanzado por el establecimiento escolar en las últimas 5 mediciones censales anuales que realizó el gobierno a los alumnos de cuarto grado, abarcando una muestra representativa de los contenidos curriculares de matemáticas de tercer y cuarto grado (MINEDUC, 2012).

- Puntuaciones NSE

El índice NSE corresponde al nivel económico medio de las familias de los estudiantes de la escuela. Los índices son públicos y están disponibles en http://www.simce.cl/. Se sabe que el NSE está relacionado con la calidad de las condiciones de vida del alumnado y el contexto en que se desarrolla la actividad pedagógica en la escuela: el NSE alto se vincula con mejores condiciones que tienden a ayudar a los alumnos a aprender. En consecuencia, puesto que el NSE medio de los estudiantes no es el mismo en todas las escuelas, las diferencias observadas tanto en el pre-test como en el post-test de los alumnos de distintas escuelas podrían estar explicadas, al menos en parte, por las diferencias en el NSE de los alumnos.

2.4 Procedimientos

Para la administración de las pruebas a los alumnos se solicitó autorización a los directores y apoderados. Las pruebas fueron administradas por un asistente del proyecto en las primeras horas de las jornadas habituales de los alumnos, dando 60 minutos de tiempo. La prueba a los profesores fue administrada en conjunto a todos en una sala, dando 60 minutos de tiempo. Se proveyó a los docentes un estímulo económico por su participación en el proyecto.

El análisis de los datos incluyó estadística descriptiva sobre las variables *SIMCE, NSE* y *Cono_profe* como medidas a nivel de escuela, y sobre las variables *Pretest y Postest* como medidas a nivel de alumnos. Luego se realizó el análisis inferencial con asociaciones lineales y modelos multinivel. Se exploraron distintos modelos multinivel, incluso el del efecto conjunto de las co-variables. Finalmente se presenta la mejor cadena de resultados. En estos modelos, las escuelas constituyen una variable categórica (Escuela) que contribuye a explicar las variaciones en la variable dependiente, *Postest*. Los análisis multinivel se inician con el Modelo ANOVA de un Factor de Efectos Aleatorios (AEA), denominado incondicional o AEA, que no incluye variables independientes y adopta la forma $Y_{ij} = \beta_{0j} + e_{ij}$, donde las β_{0j} representan las medias de las escuelas para la variable *Postest* y los residuos e_{ij} constituyen la variación aleatoria en torno a la media poblacional. En este modelo la Escuela se considera como un factor de efectos aleatorios. La ganancia que aporta el factor Escuela se evalúa comparando el modelo AEA con un modelo inicial que no incluye el factor Escuela, atendiendo al estadístico de ajuste "desvianza" -2LL (McCullag y Nelder, 1989).

Posteriormente, se comparan otros modelos explicativos de los resultados del *Postest* que permiten establecer cuando un modelo supera al otro. La diferencia entre los estadísticos -2LL correspondientes a dos modelos se distribuye según chi-cuadrado con grados de libertad igual al número de parámetros en que difieren los dos modelos. Mientras menor es el valor del estadístico, mejor es el ajuste del modelo (Pardo et al., 2007).

Se continúa con 3 Modelos Regresión con Medias como Resultado (RMR). Se estudian los tres modelos por separado, el grado en que las variables *NSE, SIMCE* y *Cono_profe* dan cuenta de las diferencias entre escuelas, en el nivel 2. Cada uno de los 3 modelos RMR añade separadamente una covariable z (*NSE, SIMCE y Cono_profe*) al modelo incondicional en el nivel 2.

Luego se continúa con los Modelos ANCOVA de un Factor de Efectos Aleatorios (ACEAs). Al incluir una covariable del nivel 1, el modelo en ese nivel adopta la forma:

$$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}\, x_{ij} + e_{ij} \qquad (\text{con } x_{ij} = X_{ij} - X)$$

En el nivel 2, el término β_{0j} no cambia ($\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}\, z_j + u_{0j}$), y el término β_{1j} es el mismo para todas las escuelas: $\beta_{1j} = \gamma_{10}$. El coeficiente γ_{10} representa la pendiente media que relaciona el Postest medio de los alumnos con sus puntuaciones en el "*Pretest* – MediaPretest", *Pretest_c*. Sustituyendo se obtiene el modelo combinado:

$$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{01}\, z_j + \gamma_{10}\, x_{ij} + (u_{0j} + e_{ij})$$

Desde estos modelos se pasa al Modelo Regresión con Coeficientes Aleatorios (RCA). En el modelo de RCA, las pendientes $\beta_{1j} = \gamma_{10} + u_{1j}$ corresponden a una variable, por lo que cada escuela tiene su pendiente. Se finaliza el análisis con Modelos Regresión con Medias y Pendientes como Resultado (RMPR). Con el modelo RMR se explica parte de la variabilidad entre las medias (nivel 2), quedando por averiguar qué variable(s) podría(n) dar cuenta de la variabilidad observada entre las pendientes. El modelo multinivel utilizado es:

$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{01}$ (*SIMCE_c*)$_j$ + γ_{02} (*Cono_pf_c*)$_j$ + γ_{10} (*Pretest_c*)$_{ij}$ + γ_{11} (*Pretest_c*)$_{ij}$ (*SIMCE_c*)$_j$ + γ_{12} (*Pretest_c*)$_{ij}$ (*Cono_pf_c*)$_j$ + (u_{0j} + u_{1j} (*Pretest_c*)$_{ij}$ + e_{ij}),

donde:

γ_{00} = *Postest* medio de todos las escuelas.

γ_{01} = efecto principal del *SIMCE*; indica si el *Postest* de las escuelas con media alta en *SIMCE* difiere de las escuelas con media baja en el *SIMCE* (controlado el efecto del *Cono_pf_c*).

γ_{02} = efecto principal del *Cono_pf_c*; indica si el resultado en el *Postest* de los escuelas con profesores con poco conocimiento difiere del de las escuelas con profesores de mayor conocimiento (controlado el efecto del *SIMCE*).

γ_{10} = pendiente media que relaciona el resultado en el *Postest* con las puntuaciones *Pretest*.

u_{0j} = efecto de la j-ésimo escuela sobre las medias.

u_{1j} = efecto de la j-ésimo escuela sobre las pendientes.

e_{ij} = errores o residuos aleatorios del nivel 1.

Lo característico de este modelo es que incluye dos interacciones entre variables de distinto nivel (*Pretest_c* del nivel 1, y *SIMCE_c* y *Cono_pf_c* del nivel 2).

γ_{11} = efecto conjunto de las variables *Pretest:c* y *SIMCE_c*; indica si la relación entre los puntos del *Pretest* y del *Postest* es o no el mismo cuando cambia el *SIMCE* medio de las escuelas.

γ_{12} = efecto conjunto de las variables *Pretest_c* y *Cono_pf_c*; indica si la relación entre las puntuaciones en el *Pretest* y el *Postest* es o no la misma cuando cambia *Cono_pf_c* en las escuelas.

Usando el modelo RMPR del procedimiento Mixed Models del SPSS se obtiene el ajuste que pronostica la variable *Postest* en términos de las variables *Pretest*, *SIMCE_c* y *Cono_pf_c.*

3. Resultados

3.1 Estadísticos descriptivos

La Tabla 13 muestra las variables *SIMCE, NSE* y *Cono_profe* que se miden a nivel de escuela, y se asigna el mismo valor a todos los alumnos de la respectiva escuela.

Tabla 13

Estadísticos Descriptivos

Variable	Nivel	N	Mínimo	Máximo	M	DT.
SIMCE	escuela	328	228	300.6	274.63	20.63
NSE	escuela	328	1	4	3.56	0.82
Cono_profe	escuela	328	4	21	16.01	4.55
Pretest	alumno	328	3	21	13.30	3.33
Postest	alumno	328	4	22	15.06	3.61

Como se observa en la Tabla 13, hay una diferencia de 1.7 puntos entre las medias de las variables Pretest y Postest. Además se aprecia que la desviación aumenta de 3.33 a 3.61.

3.2 Asociaciones lineales entre las variables

La tabla 14 muestra las correlaciones entre las variables estudiadas. La mayor asociación se da entre NSE y SIMCE. Le sigue la relación Pretest Postest, en tercer lugar la asociación SIMCE Cono_ profe y luego la asociación SIMCE Postest. Cabe observar que todas las asociaciones son significativas. Estas altas asociaciones auguran la predicción del Postest en función de las variables SIMCE, Pretest y Cono_ profe.

Tabla 14

Correlaciones entre las Variables

N = 328	*NSE*	*Pretest*	*Cono_profe*	*Postest*
SIMCE	.76(**)	.36(**)	.51(**)	.48(**)
NSE		.25(**)	.24(**)	.29(**)
Pretest			.13(*)	.67(**)
Cono_profe				.29(**)

Correlación Pearson bilateral. ** $p < .01$ * $p < .05$

3.3 Relaciones multinivel

La escuela como factor en el modelo jerárquico

La Tabla 15 muestra los resultados agregados del *Postest* a nivel de Escuela.

Tabla 15

Estadísticos Descriptivos por Escuela

Escuela	N profesores	N cursos	N alumnos	M *Postest*	DT *Postest*	Coeficiente de variación
AE	1	2	58	16.16	3.094	19.2%
CG	1	2	48	13.92	2.974	21.4%
CO	1	1	9	13.44	3.609	26.8%
GR	1	2	76	17.55	2.294	13.1%
JC	1	1	26	14.04	3.944	28.1%
MA	1	1	28	12.50	3.815	30.5%
ME	1	2	47	14.21	3.575	25.2%
SB	1	1	18	11.88	3.103	26.2%
TR	1	1	18	15.83	3.519	22.2%
Total	9	13	328	15.067	3.6130	24.0%

Como se observa en la Tabla 15, la media de la variable *Postest* varía entre escuela y escuela. En la escuela SB el promedio de *Postest* es 11.88 puntos y en la escuela GR el promedio es 17.55; cercana a la razón 2:3. El coeficiente de variación asociado a la escuela GR es 13.1%, menos de la mitad del valor asociado al de la escuela MA, 30.05%; antecedentes que auguran la pertinencia del factor Escuela en el modelo multinivel y un modelo explicativo más ajustado. Efectivamente, el índice de correlación intra-clase, que es el mejor indicador de la pertinencia del análisis multinivel, es 0,23; lo que significa que el 23% de la variabilidad total de la variable *Postest*, corresponde a las diferencias entre las medias de las escuelas, 3.03/ [3.03 + 10.04].

Modelo ANOVA de un Factor de Efectos Aleatorios (AEA)

Bajo este Modelo, para los 328 estudiantes, la media muestral del Postest es 15.07. En cambio, la media de las 9 medias de los Postest de las escuelas es 14.39.

La tabla 16 (primera fila, modelo AEA) muestra la diferencia en el estadístico -2LL asociada a los modelos AEA e inicial. Esta diferencia de 67.34 se distribuye según chi-cuadrado con 1 grado de libertad asociado al factor Escuela ($p < .0001$); por lo que se rechaza la hipótesis de que el efecto del factor Escuela sea nulo.

Tabla 16

Criterios de Información

Modelo	Descripción del modelo	-2LL	Diferencia
Inicial	No incluye el efecto Escuela	1773.86	-
AEA	Incluye el efecto Escuela	1706.52	67.34***
RMR	Incluye el efecto del *NSE*	1702.43	4.19*
RMR	Incluye el efecto del *SIMCE*	1696.63	9.89*
RMR	Incluye efecto Conocimiento Profesor	1708.31	-1.79
ACEA	Incluye efectos *NSE* y *Pretest*	1554. 53	218.90***
ACEA	Incluye efectos *SIMCE* y *Pretest*	1551.26	145.37***
ACEA	Incluye efectos *Cono_profe* y Pretest	1553.75	154.56***
RCA	Incluye efectos Pretest	1549.75	4.78*
RMPR	Incluye efectos *Pretest SIMCE Cono_pf*	1567.52	

*** $p < .001$; ** $p < .01$; * $p < .05$

La Tabla 17 muestra el valor estimado de la constante, que es el único parámetro de efectos fijos de este modelo. Se trata de una estimación de la media poblacional de las 9 escuelas en la variable dependiente *Postest*. Para el modelo AEA, la estimación es $\hat{\mu}$ =14.45.

Tabla 17

Estimaciones de los Parámetros de Efectos Fijos

Modelo	Parámetro	Estimación	Error típico	gl	Estadístico t	*p.*
Inicial	Intersección	15.07	3.6130	327	(F) 5704.290	<.001
AEA	Intersección	14.45	.6168	8.259	23.433	<.001
RMR	Intersección	14.84	.55	6.878	26.886	<.001
	NSE_c	1.02	.50	8.835	2.043	.07
RMR	intersección	15.08	0.23	5.526	65.78	<.001
	SIMCE_c	0.08	0.01	7.184	7.47	<.001
RMR	intersección	14.61	0.67	6.599	21.80	<.001
	Cono_pf_c	0.09	0.13	.174	0.71	0.50
ACEA	Intersección	14.87	0.35	6.956	42.16	<.001
	Pretest_c	6.39	0.05	324.671	14.12	<.001
	NSE_c	0.38	0.33	10.220	1.14	.28
ACEA	Intersección	15.04	0.21	4.938	72.65	<.001
	Pretest_c	0.62	0.05	324.478	13.74	<.001
	SIMCE_c	0.04	0.01	7.212	4.14	.004
ACEA	Intersección	14.92	0.32	5.91	46.45	<.001
	Pretest_c	0.65	0.45	312.44	14.54	<.001
	Cono_pf_c	.10	.063	7.16	1.64	.14
RCA	Intersección	14.79	.362	9.10	40.81	<.001
	Pretest_c	.651	.058	7.71	11.32	<.001
RMPR	Intersección	15.14	.199	2.88	75.70	<.001
	Cono_pf_c	.09	.046	6.57	1.99	.09
	pretest_c	.60	.061	5.39	10.00	<.001
	SIMCE_c	.03	.011	6.36	3.05	.02
	SIMCE_c pretest_c*	-.002	.003	8.19	-.70	.51
	Cono_pf_c pretest_c*	-.009	.013	8.82	-7.4	.48

(a) Variable dependiente: *Postest*

Si bien, el estadístico Wald en la Tabla 18 da la significación del efecto del procedimiento MIXED del SPSS, en este estudio usamos el estadístico -2LL, que, según advierten Pardo et al. (2007) es más fiable para tamaños de muestra pequeños.

Tabla 18

Estimaciones de los Parámetros de Covarianza

Modelo	Parámetro		Estimación	Error típico	Wald Z	*p*
Inicial	*Varianza total*	Varianza	13.05	1.02		
AEA	Residuos		10.04	.79	12.64	<.001
	Varianza = Escuela	Varianza	3.03	1.7	1.81	.07
RMR	Residuos		10.04	.79	12.64	<.001
	Escuela (*NSE_c*)	varianza	2.07	1.61	1.64	.10
RMR	Residuos		10.01	0.79	12.66	<.001
	Escuela (*SIMCE_c*)	varianza	0.15	0.22	0.68	0.50
RMR	Residuos		10.04	0.80	12.63	<.001
	Escuela (*Cono_pf_c*)	varianza	3.19	1.91	1.67	0.95
ACEA	Residuos (*NSE_c*)		6.31	.50	12.63	<.001
	Intersección	Varianza	.79	.51	1.54	0.12
ACEA	Residuos (*SIMCE_c*)		6.31	0.50	12.62	<.001
	Intersección	Varianza	0.17	0.20	0.85	0.40
ACEA	Residuos (Cono_pf_c)		6.32	0.50	12.61	<.001
	Intersección	Varianza	0.62	0.46	1.36	0.17
RCA	Residuos		6.18	.49	12.50	<.001
	Interse+*pretest_c* [suj=*Escuela*] NE (1 1)		0.95	.55	1.7	.08
	. NE (2 1)		-.072	.07	-1.0	.31
	NE (2 2)		.012	.01	.80	.42
RMPR	Residuos		6.2560	.50	12.41	<.001
	Interse+*pretest_c* [suj=*Escuela*] NE (1 1)		.119 0	.23	.53	.60
	. NE (2 1)		.0065	.04	.16	.88
	. NE (2 2)		.0097	.015	.55	.52

AEA: ANOVA de un Factor de Efectos Aleatorios; RMR: Regresión con Medias como Resultados; ACEA: ANCOVA de un Factor Efectos Aleatorios. RCA: Regresión con Coeficientes Aleatorios. RMPR: Regresión con Medias y Pendientes como Resultados.

NE (1 1): varianza de las medias
NE (2 1): Covarianza entre medias y pendientes
NE (2 2) Varianza de las pendientes

Modelos Regresión con Medias como Resultado (RMR)

En esta sección se estudian tres modelos RMR por separado, La Tabla 17, modelos RMR, muestra las estimaciones de los dos parámetros de efectos fijos: el de la intersección ($\hat{y}_{NSE\_c}$ = 14.84, $\hat{y}_{SIMCE\_c}$ = 15.08 y $\hat{y}_{Cono\_pf\_c}$ = 14.61, respectivamente) y de la pendiente, coeficiente asociado a la covariable ($\hat{y}_{01\ NSE\_c}$ = 1.02, $\hat{y}_{01\ SIMCE\_c}$ = 0.08 y $\hat{y}_{01\ Cono\_pf\_c}$ = 0.01, respectivamente) dando una estimación del Postest en la población de escuelas.

La Tabla 18, modelo RMR, muestra que la estimación de la varianza de los residuos ($\hat{\sigma}^2{}_{e\,NSE\_c} = 10.04$, $\hat{\sigma}^2{}_{e\ SIMCE\_c} = 10.01$ y $\hat{\sigma}^2{}_{e\ Cono\_pf\_c} = 10.04$) es similar a la del modelo AEA ($\hat{\sigma}^2{}_e = 10.04$). La variabilidad del nivel 1 no se vería afectada por la presencia de una covariable del nivel 2. Sin embargo, la estimación de la variabilidad entre las escuelas ha disminuido en dos casos, pero no a causa del conocimiento del profesor. En efecto, para el caso de la covariable *NSE_c*, la variabilidad entre las escuelas pasó de 3.03 en el modelo AEA a 2.07 en el modelo RMR; para *SIMCE_c*, pasó de 3.03 en el modelo AEA a 0.15 en el modelo RMR, y para el caso de la covariable *Cono_pf_c*, la variabilidad entre las escuelas pasó de 3.03 en el modelo AEA a 3.18 en el modelo RMR. Más allá de estas variaciones, el estadístico Wald no permite aseverar que hay cambios. No obstante, dado que el estadístico de Wald es conservador para muestras pequeñas, se podría pensar que queda por explicar parte de las diferencias entre las escuelas.

Comparando el estadístico -2LL, con el modelo AEA se obtuvo -2LL = 1706.52. En cambio al incluir las interacciones en el modelo RMR, se obtiene: -2LL = 1702.43 para *NSE_c*, -2LL = 1696.63, para *SIMCE_c* y -2LL = 1708.31 para *Cono_pf_c*. La diferencia entre 1706.52 y el valor de la variable -2LL es 4.19 para *NSE_c*, 9.89 para *SIMCE_c* y -1.78 para *Cono_pf_c*. La respectiva diferencia se distribuye según chi-cuadrado con 1 grado de libertad. La probabilidad de encontrar valores mayores o iguales que 3.84 es 0.05. Por ende, para los dos primeros casos se rechaza la hipótesis nula. Esto es, después de controlar el efecto del *NSE* y, separadamente, el efecto del *SIMCE*, el resultado en el *Postest* medio no es el mismo en todas las escuelas. Esto es, la varianza de las medias de las escuelas es mayor que cero. En el tercer caso esto no sucede.

Modelos ANCOVA de un Factor de Efectos Aleatorios (ACEAs)

Al añadir una nueva co-variable, de nivel 1 en este caso, se obtienen, entre otros, los resultados que muestran las tablas 16, 17 y 18. La tabla 17 (modelo ACEAs) ofrece las estimaciones de los tres parámetros de efectos fijos del modelo: (1) la constante o intersección ($\hat{\gamma}_{00}$ = 14.87 para *NSE*, $\hat{\gamma}_{00}$ = 15.04 para *SIMCE*, y $\hat{\gamma}_{00}$ = 14.91 para el modelo que incluye al conocimiento del profesor), que sigue siendo una estimación del *Postest* medio en la población de escuelas; (2) el coeficiente asociado a la variable de nivel 2 centrada (sea ésta *NSE_c*, $\hat{\gamma}_{01}$ = 0.63; *SIMCE_c*, $\hat{\gamma}_{01}$ = 0.62, o *Cono_pr_c*, $\hat{\gamma}_{01}$ = 0.64), que es similar al obtenido antes de incluir la covariable *Pretest* (véase modelo RMR); y (3) el coeficiente asociado a la variable *Pretest* ($\hat{\gamma}_{10}$ = 0.37 para *NSE*, $\hat{\gamma}_{10}$ = 0.04 para *SIMCE*, y $\hat{\gamma}_{10}$ = 0.10 para conocimiento del profesor), que indica que por cada unidad que aumentan las puntuaciones del *Pretest*, el *Postes*t aumenta .37,.04 y 0.10 unidades respectivamente.

La tabla 18 (modelo ACEAs) muestra las estimaciones de los dos parámetros de covarianza. La estimación de la variabilidad entre las escuelas ha disminuido en dos de los tres casos con respecto a los modelos RMR. Para *NSE_c* ha bajado de 2.07 a 0.79; para *SIMCE_c* ha subido de 0.15 a 0.17, y para *Cono_pf_c* ha bajado de 3.19 a 0.62. Y la varianza de los residuos ha pasado de 10.04 en el modelo AEA a 6.3 para el modelo ACEA, similarmente para las tres covariables: *NSE_c*, *SIMCE_c* y *Cono_pf_c*. Por tanto, al corregir el resultado en el *Postest* mediante las puntuaciones en el *Pretest*, la variabilidad intra-escuelas se ha visto reducida en un 37.25%

Modelo Regresión con Coeficientes Aleatorios (RCA)

En el modelo de RCA, cada escuela tiene su pendiente. La tabla 17 (RCA) presenta una estimación de parámetros de efectos fijos. El valor de la constante ($\hat{\gamma}_{00}$ = 14.80) continúa reflejando la media de *Postest* en la población de escuelas y el valor del coeficiente que se asocia a la variable *Pretest_c* ($\hat{\gamma}_{10} = 0.65$) estima la pendiente media. Este coeficiente revela que por cada punto de aumento en el *Pretest*, el *Postest* aumenta 0.65 puntos. El nivel crítico ($p < 0.001$) del estadístico t permite sostener que las puntuaciones del *Pretest* se relacionan positivamente con el *Postest*.

La tabla 18 (Modelo RCA) contiene las estimaciones de cada uno de los parámetros de covarianza incluidos en el modelo RCA:

(1) La varianza de los residuos corresponde a una medida de la variación de los alumnos alrededor de la recta de regresión de su escuela. El valor estimado, 6.18, es menor que 10.04; siendo este último el valor estimado con el modelo AEA. Al agregar las puntuaciones del *Pretest* en el modelo de regresión considerando una ecuación por escuela, la variabilidad intra-escuela disminuye alrededor de un 38.45%. Bajo el modelo ACEA, las puntuaciones en el *Pretest* conseguían reducir la variabilidad intra-escuela un 37.25%.

(2) La varianza de las medias ($\sigma^2_{uo} = 0.95$, $p = 0.08$) no es significativamente mayor que cero. Por tanto, no hay evidencias que los resultados de los Postests medios sean diferentes.

(3) La covarianza entre medias y pendientes ($\sigma^2_{u1} = -0.72$) no es mayor que cero ($p = 0.31$).

(4) La varianza de las pendientes ($NE_{(2,2)} = .012$) no es significativamente mayor que cero ($p = 0.42$). Por tanto, no se puede inferir que las pendientes de estas ecuaciones de regresión sean iguales en todas las escuelas.

Modelos Regresión con Medias y Pendientes como Resultado (RMPR)

Al estudiar el modelo RMR ha quedado establecido que *SIMCE* explicaría el 99.50% y *NSE* el 32% de las diferencias observadas en los Postests medios de las escuelas, es decir, gran parte de la variabilidad entre las medias (nivel 2): quedando por averiguar qué variable(s) podría(n) dar cuenta de la variabilidad observada entre las pendientes.

Con el modelo RMPR se obtiene el ajuste que pronostica la variable *Postest* en términos de las variables *Pretest*, *SIMCE_c* y *Cono_pf_c*. En el modelo RMPR, el valor del estadístico -2LL es 1567.52 (ver Tabla 16), es superior al anterior. No parece que el modelo que incluye pendientes aleatorias consiga mejor ajuste que el modelo que no las incluye. Y a igual ajuste, el principio de parsimonia debe llevar a elegir el modelo más simple, el modelo RCA.

3.4 A modo de síntesis

El estudio de la variable "conocimiento del profesor" se realizó junto a otros factores que reconocidamente inciden en el conocimiento del alumno. La explicación del conocimiento del alumno se dio en términos de la variabilidad intra-escuelas y la variabilidad entre escuelas. Con el modelo AEA, se evidenció que el 23% de la variabilidad del conocimiento de los alumnos corresponde a la diferencia entre escuelas (el 77% es intra-escuela). Con el modelo RMR, el 99.5% de la variabilidad entre escuelas la explicaría el *SIMCE*, o bien el 32% lo explicaría el NSE. Por su lado, el conocimiento del profesor tendría un leve efecto negativo.

Al incorporar la variable *Pretest_c* con el modelo ACEA, la variabilidad intraescuelas se redujo en un 37.25%. Con el modelo RCA, la variabilidad intraescuela se redujo aproximadamente un 38.45%. En cuanto a los efectos aleatorios en el modelo RMPR, el 88.84% de las diferencias entre las escuelas es atribuible en su mayor parte a *SIMCE*, según se evidenció en los modelos ACEA y RMR. Se observa que el efecto del profesor es leve y sólo alcanzaría a tener significatividad estadística al 10%, no al 5% como tradicionalmente se considera en estudios de educación.

4. Discusión del estudio 2

Este estudio muestra, al igual que otros estudios basados en métodos multinivel, la incidencia del profesor en los factores asociados a los alumnos. En efecto, existen estudios que muestran la influencia del profesor en aspectos socio-afectivos de los alumnos (Murillo y Hernández, 2011), como también sobre el clima de aula en que se desenvuelve el profesor en el rendimiento escolar (Murillo y Martínez, 2018) y sobre la influencia de las expectativas individuales del profesor en el rendimiento de los alumnos (Cervini, Dari, Quiroz y Atorresi, 2016).

En el presente estudio se evidencia el poder explicativo de las covariables *Pretest, SIMCE* y *NSE*, y el modesto efecto que podría atribuirse al conocimiento del profesor sobre las fracciones y sobre su enseñanza, en relación a la conceptualización de las fracciones alcanzada por alumnos de 4º grado. Los resultados de esta investigación muestran una asociación similar a la de un estudio anterior (Olfos et al., 2014). El hallazgo de la baja asociación entre el conocimiento del profesor y la conceptualización del alumno, es similar al encontrado por Harbison y Hanushek (1992) quienes escriben: " En cuarto grado, una mejora de diez puntos en el promedio del conocimiento matemático del profesor… produciría un incremento de cinco puntos en el logro de los estudiantes; esto es equivalente a una mejora del 10% respecto de las puntuaciones medias de los estudiantes " (p. 114).

En consecuencia, el estudio constituye un aporte a la investigación sobre la relación entre el conocimiento del alumno y el conocimiento de los profesores. El resultado de este estudio podría estar asociado a la fuerte segregación escolar en Chile: los establecimientos más exitosos concentran estudiantes más hábiles, profesores más efectivos y se da un mejor clima ambiente escolar; lo que lleva a que la variable conocimiento del profesor por sí sola no se muestre tan relevante en la determinación de la comprensión del alumno.

Se sugiere a futuro, junto con estudiar la relación en otras poblaciones de profesores, mantener la rigurosidad metodológica e incorporar una medida adicional, por ejemplo factores actitudinales del profesor hacia el aprendizaje del alumno. Los profesores constituyen un elemento clave para el mejoramiento de la calidad de la educación en un país y este estudio ha abierto nuevas interrogantes. La literatura aún mantiene el desafío de identificar con certeza los factores asociados al profesor que benefician los aprendizajes escolares, como la conceptualización de las fracciones.

Estudio 3: Efecto del conocimiento del profesor acerca de la enseñanza de las fracciones sobre el aprendizaje de los alumnos en 4° grado

Resumen

El objetivo de este estudio es otorgar evidencias empíricas acerca del efecto del conocimiento del profesor sobre el aprendizaje de los alumnos en la conceptualización de las fracciones, en asociación con los conocimientos previos de los alumnos, nivel socioeconómico y nivel académico de las escuelas. Mediante la técnica de análisis estadístico multinivel con dos niveles, alumno y escuela, se obtuvo información de 714 alumnos de 4º grado de 23 escuelas y de sus respectivos profesores de matemáticas. Los resultados indican que, de la variabilidad observada en la conceptualización de las fracciones por los alumnos, el 76% se podría atribuir al conocimiento previo de los alumnos y del 24% restante a las variables a nivel de la escuela. La varianza entre las escuelas estaría explicada en un 26% por el conocimiento del profesor, en un 8% por el nivel socioeconómico de la escuela. El nivel académico de la escuela no se muestra significativo en este estudio que se enfoca en el avance del alumno sobre el

conocimiento de las fracciones como medida del aprendizaje. Los resultados del estudio son similares a otras investigaciones que muestran un efecto positivo del conocimiento de los profesores, medido por pruebas, en el aprendizaje de los alumnos.

Palabras clave: Conocimiento Matemático para la enseñanza; Conocimiento del profesor; fracciones; modelos multinivel.

1. Introducción

En las últimas tres décadas, diversos investigadores han identificado los conocimientos necesarios para la enseñanza. Shulman (1986) ha sido pionero en distinguir tres tipos: el conocimiento del contenido (CK), conocimiento pedagógico del contenido (PCK), y el conocimiento curricular. El PCK ha recibido gran aceptación por los investigadores, Shulman (1986) define el PCK como "la forma particular del conocimiento que incorpora los aspectos del contenido más pertinentes a la enseñanza" (p. 9), este revolucionario constructo radica en la enseñanza de la materia e incluye saber cómo representar el contenido para que otros lo entiendan. A partir de la propuesta de Shulman (1986) varios investigadores han presentado diversas conceptualizaciones del conocimiento requerido para enseñar matemática (Ball, Thames y Phelps, 2008; Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013; Hill, Ball y Schilling, 2008; Ma, 2010; Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005; Stylianides y Stylianides, 2014; Tchoshanov et al., 2017).

Ball et al. (2008) a través del estudio de la práctica de profesores de primaria caracterizaron el conocimiento requerido para enseñar matemática; presentan el modelo conocimiento matemático para la enseñanza (MKT), el cual se divide en dos dominios: el CK y el PCK. A la vez el CK se divide en conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido y conocimiento del horizonte matemático. El PCK se divide en conocimiento de la enseñanza del contenido, conocimiento del currículo, y conocimiento de los alumnos y el contenido matemático.

Ma (2010) alineada con la conceptualización de Shulman (1986) y Ball et al. (2008) considera que los profesores deben poseer un conocimiento especial que complemente y supere al conocimiento del contenido y al pedagógico. La propuesta de Ma se relaciona con la noción de comprensión profunda de las matemáticas fundamentales (PUFM). Un profesor con PUFM posee un conocimiento profundo del currículo escolar, conceptual e interconectado, un conocimiento del contenido matemático que "va más allá de poder calcular en forma correcta" (Ma, 2010, p. 9).

Existe abundante literatura referida a la importancia del profesor como factor para mejorar la calidad de la educación (Bruns y Luque, 2014; Eurydice, 2013; UNESCO, 2012). No obstante, falta evidencia científica que vincule la presencia de ciertos conocimientos matemáticos específicos para la enseñanza con el aprendizaje de los alumnos (National Mathematics Advisory Panel, 2008). El National Mathematics Advisory Panel (2008) señalan que el único estudio que midió directamente el conocimiento matemático utilizado al enseñar y su incidencia en el aprendizaje es el trabajo de Hill, Rowan y Ball (2005), en el cual se elaboran pruebas que miden el MKT de los profesores, los resultados del estudio muestran que el MKT de los profesores se relaciona significativamente con el rendimiento de los alumnos de primer y tercer grado.

Posterior al reporte del National Mathematics Advisory Panel (2008), se publica el trabajo de Baumert et al. (2010) en el cual se evalúa el conocimiento matemático común, PCK y conocimiento pedagógico general de los profesores. Una cuestión central en el debate referente a la eficacia del profesor de matemáticas, es saber hasta qué punto las universidades tienen éxito en entregar los conocimientos que necesitan los futuros profesores de matemáticas (Kaiser, Blömeke, Busse, Döhrmann y König, 2014). Particularmente en Chile, los bajos resultados tanto en la evaluaciones internacionales TEDS-M como en las pruebas nacionales Inicia que miden conocimientos disciplinarios y pedagógicos a profesores nóveles, indican que la formación inicial docente requiere mejorar para alcanzar estándares de calidad (MINEDUC, 2015; Tatto et al., 2012).

Considerando la necesidad de obtener evidencia que relacione conocimientos matemáticos específicos para la enseñanza con el aprendizaje de los alumnos, el objetivo del presente estudio, es otorgar evidencias empíricas acerca del efecto del conocimiento del profesor sobre el aprendizaje de los alumnos en la conceptualización de las fracciones, en asociación con las variables nivel socioeconómico (NSE) de la familia, conocimientos previos de los alumnos (Pretest) y nivel académico que alcanzan las escuelas según el Sistema de Medición gubernamental de la calidad de la educación (SIMCE). Estas variables han sido reconocidas en la literatura como factores que afectan el rendimiento del alumno en matemáticas (Bartau, Azpillaga y Joaristi, 2017; Murillo y Hernández, 2011; OCDE, 2016).

Dado a que los alumnos se encuentran agrupados en escuelas y las escuelas tienen características distintas, lleva a que los alumnos de una misma escuela no se puedan considerar sujetos independientes entre sí, lo que constituye un serio incumplimiento de la independencia entre observaciones, supuesto básico del modelo de regresión lineal (Pardo, Ruiz y San Martín, 2007). Por esta razón se identifica la estructura de los sistemas educativos como de tipo jerárquico, y para atender a estas estructuras, en estadística se han desarrollado los modelos multinivel que permiten abordar este tipo de estructuras jerárquicas a nivel de alumno, escuela y contexto, para distinguir con mayor precisión la aportación de cada nivel (Murillo, 2008).

El presente estudio se suma a varias investigaciones que estudian la relación entre el conocimiento del profesor y el rendimiento de los alumnos (Baumert et al., 2010; Harbison y Hanushek, 1992; Hill et al., 2005; Tchoshanov, 2011; Tchoshanov et al., 2017) y busca contribuir a estos avances enfocándose en el conocimiento del profesor sobre las fracciones y su enseñanza, que contempla dos dimensiones, uno es el "conocimiento profundo de las fracciones" y el otro es "conocimiento sobre la enseñanza de las fracciones" (Rodriguez y Olfos, 2018).

Las fracciones son muy difíciles de entender para la mayoría de los alumnos, su complejidad ha sido motivo de estudio de numerosas investigaciones (Bailey, Siegler y Geary, 2014). Las dificultades que enfrentan los alumnos para realizar operaciones básicas con fracciones conduce a errores comunes que aparecen en el aprendizaje del álgebra, el cual conforma una base fundamental en la matemática de formación superior (Siegler et al., 2012; Siegler, Fazio, Bailey y Zhou, 2013; Torbeyns, Schneider, Xin y Siegler, 2015). Por otra parte, existen investigaciones que muestran que los profesores de primaria presentan dificultades para el tratamiento de las fracciones en el aula (Depaepe et al., 2015; Salazar, Martinic y Maz, 2011; Valdemoros, 2010). La literatura citada muestra la relevancia del conocimiento del profesor sobre el aprendizaje de los alumnos y que aún se mantiene en discusión la caracterización del conocimiento del profesor para la enseñanza de la matemática y cómo este influiría en los logros de aprendizaje de los alumnos.

2. Método

El objetivo del presente estudio ex post facto, es otorgar evidencias empíricas acerca del efecto del conocimiento del profesor sobre el avance de los alumnos en la conceptualización de las fracciones, en asociación con las variables NSE, Pretest y SIMCE. Para cumplir con el objetivo del estudio se utiliza la técnica de análisis estadístico multinivel con dos niveles: alumno y escuela, siguiendo la metodología de ajuste de multinivel expuesta por Pardo et al. (2007). Se explora el conocimiento del profesor como factor explicativo del conocimiento del alumno en fracciones.

2.1 Población y Muestra

En este estudio participaron 714 alumnos de 4° grado atendidos por 23 profesores de 23 escuelas subvencionadas por el estado, de las cuales 8 son municipales y 15 administradas por particulares, proporcional a la cantidad de estos tipos de escuelas en las ciudades de La Serena y Coquimbo; cercano al 15% de la población de establecimientos en estas ciudades. Las escuelas se obtuvieron de un muestreo proporcional, con participación voluntaria y corresponden a un grupo de escuelas cuyo nivel académico promedio según SIMCE dista en 0,68 desviación estándar de la media poblacional (Sig< 0.5), esto es, alrededor del 50% de las muestras de escuelas (de tamaño 23) tienen un SIMCE más cercano al promedio de 257.05 puntos en SIMCE alcanzado por la población de las 158 escuelas de las ciudades Serena y Coquimbo. Los datos fueron tomados durante los años escolares 2015 y 2016. El número de alumnos por escuela oscila entre siete y 76 por escuela (ver Tabla 19). Tres profesores son hombres y 20 son mujeres. En promedio tienen 13 años de experiencia, todos los docentes tienen el título de profesor, 22 de educación básica y uno de matemática.

Tabla 19

Tipos de escuela, número de cursos y alumnos por escuela

Escuelas	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13
Tipo	P	P	P	P	P	M	M	P	M	P	M	M	P
Cursos	1	2	2	2	1	1	1	2	1	2	1	1	1
Alumnos	28	48	47	58	18	9	26	76	18	56	25	19	11

P= escuelas particulares; M= escuelas municipales

Continuación de la Tabla 19

Escuelas	E14	E15	E16	E17	E18	E19	E20	E21	E22	E23	Total
Tipo	M	P	M	P	M	P	M	P	M	P	23
Cursos	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	29
Alumnos	33	35	62	16	21	30	41	17	7	13	714

2.2 Variables

1. *Profesor:* Puntaje obtenido de la prueba del profesor sobre las fracciones y su enseñanza. La prueba se describe en la siguiente sección de instrumentos.

2. *NSE:* Puntaje obtenido del nivel socioeconómico de las familias de los alumnos de las escuelas. Los puntajes del NSE por las escuelas son públicos y están disponibles en línea http://www.simce.cl/

3. *SIMCE:* puntaje promedio obtenido por las escuelas de las últimas 5 pruebas anuales SIMCE realizadas en el país, abarcando una muestra representativa de los contenidos curriculares de matemáticas de 3o y 4° grado (MINEDUC, 2012). La variable SIMCE es un indicador del nivel académico de la escuela a la que asiste el alumno. Los puntajes de la prueba SIMCE obtenidos por las escuelas son públicos y están disponibles en línea http://www.simce.cl/

4. *Pretest:* puntaje obtenido de la prueba del alumno sobre las fracciones al inicio del 4° grado. La prueba se describe en la siguiente sección de instrumentos.

5. *Avance:* puntaje obtenido de restar las puntuaciones de pretest a las puntuaciones del postest, esta diferencia corresponde a la variable dependiente del estudio. El postest es la misma prueba pretest pero aplicada a final de 4° grado. Se utiliza el puntaje de avance en el aprendizaje dado que la principal ventaja de utilizar estas puntuaciones es que son estimaciones imparciales del crecimiento académico de los alumnos (Mullens, Murnane y Willett, 1996).

2.3 Instrumentos

Prueba de conocimientos de los alumnos sobre las fracciones. Esta prueba se administró a los alumnos y corresponde al Pretest y al Postest que consta de 22 ítems de selección múltiple organizados de acuerdo a una matriz de especificaciones enmarcada en los objetivos de aprendizaje (MINEDUC, 2012) de la unidad de "Fracciones" que se muestra en la Tabla 20. La prueba mostró una confiabilidad de .77 según el coeficiente alfa de Cronbach.

Tabla 20

Matriz de Especificaciones Prueba para los Alumnos

Objetivos de Aprendizaje	**ítems**
Representar una fracción de manera concreta, pictórica y simbólica	2
Describir situaciones en las cuales se puedan usar fracciones	4
Comparar fracciones con igual denominador	2
Explicar que una fracción representa la parte de un todo o de un grupo de elementos y un lugar en la recta numérica.	3
Mostrar que una fracción puede tener representaciones diferentes	2
Comparar y ordenar fracciones	2
Sumar y restar fracciones de igual denominador en contexto	3
Identificar y representar de fracciones propias y números mixtos hasta 5	4

Prueba de conocimiento del profesor sobre las fracciones y su enseñanza. Esta prueba fue administrada a inicios del 2015 a 9 profesores y del 2016 a 14 profesores que enseñaron matemáticas a los cursos participantes. El instrumento está conformado por 24 ítems de selección múltiple, 10 referidos al conocimiento profundo sobre las fracciones y 14 al conocimiento sobre la enseñanza de las fracciones. La fiabilidad del instrumento es .85 según el coeficiente alfa de Cronbach. En la dimensión de conocimiento profundo de las fracciones la consistencia interna es .75 y en conocimiento sobrela enseñanza es .73, los antecedentes de esta prueba se encuentran en (Rodríguez y Olfos, 2018).

2.4 Procedimientos

Para la administración de las pruebas a los alumnos se solicitó autorización a los profesores, directores y apoderados. Las pruebas fueron administradas por un asistente de investigación del proyecto en las primeras horas de las jornadas habituales de los alumnos, dando 60 minutos de tiempo. Los profesores respondieron la prueba simultáneamente en una sala en lapso de 60 minutos de tiempo.

3. Resultados

3.1 Estadísticos descriptivos

La Tabla 21 muestra las variables *Avance* y *Pretest* del nivel 1 y las variables *Profesor, NSE y SIMCE* del nivel 2. Los datos descriptivos que muestra la tabla 21 corresponden al número de sujetos, puntaje mínimo y máximo, la media y la desviación típica de cada variable.

Tabla 21

Estadísticos Descriptivos

Variable	Nivel	N	Mínimo	Máximo	M	DT
Avance	alumno	714	-8	13	1.84	3.05
Pretest	alumno	714	0	21	12.41	3.67
Profesor	escuela	23	3	21	12.38	5.41
NSE	escuela	23	1	4	3.34	0.80
SIMCE	escuela	23	221	301	264.79	21.31

3.2 Correlaciones entre variables

La tabla 22 muestra las correlaciones entre las variables estudiadas. La mayor correlación se da entre *NSE* y *SIMCE*, le sigue la relación *Pretest* y *Avance*, en tercer lugar la correlación

SIMCE y *Pretest* y luego *Profesor* y *SIMCE*. Se observa que estas correlaciones son significativas al 1%.

Tabla 22

Correlaciones entre las Variables

N = 714	***NSE***	***SIMCE***	***Pretest***	***Avance***
Profesor	.21(**)	.36(**)	.13(**)	.12(**)
NSE		.64(**)	.28(**)	.07
SIMCE			.38(**)	.06
Pretest				-.39(**)

Correlación Pearson bilateral. ** $p < .01$

3.3 Relaciones multinivel

La escuela como factor en el modelo jerárquico. La escuela es una variable categórica que contribuye a explicar las variaciones en la variable dependiente, Avance. La Tabla 23 muestra la escuela, el tipo de escuela, el número de alumnos por escuela, la media y la desviación típica del Avance. Como se observa en la Tabla 23, la media del Avance varía entre escuela y escuela. En la escuela E7 la media del Avance (0.5 puntos) es un cuarto de la media del Avance de la escuela E4 (2.0 puntos). Antecedentes que pronostican la pertinencia del factor Escuela en el modelo multinivel.

Modelo nulo o modelo ANOVA de un Factor de Efectos Aleatorios (AEA). El modelo más simple es el denominado modelo nulo o AEA, el cual no incluye variables explicativas y cuya expresión formal es $Y_{ij} = \beta_{0j} + e_{ij}$, donde β_{0j} representa los promedios del Avance de las escuelas y los residuos e_{ij} constituyen la variación aleatoria en torno al promedio poblacional. Martínez y Murillo (2014) señalan que el modelo nulo se establece como base para la estimación de la varianza explicada a partir de la cual se van evaluando las aportaciones de modelos más elaborados.

Tabla 23

Estadísticos Descriptivos por Escuela

Escuela	Tipo	N alumnos	M *Avance*	DT *Avance*
E1	P	28	1.14	2.20
E2	P	48	1.10	3.32
E3	P	47	1.55	3.22
E4	P	58	2.00	2.62
E5	P	18	0.50	2.45
E6	M	9	2.56	2.55
E7	M	26	0.50	2.70
E8	P	76	2.96	2.47
E9	P	18	1.89	2.42
E10	P	56	2.32	3.70
E11	M	25	1.44	3.30
E12	M	19	1.53	4.65
E13	M	11	3.73	3.13
E14	P	33	2.52	2.58
E15	P	35	1.63	2.12
E16	P	62	1.84	2.71
E17	P	16	2.44	2.78
E18	M	21	1.48	3.38
E19	P	30	1.80	3.55
E20	P	41	1.73	2.84
E21	P	17	- 0.65	3.16
E22	M	7	1.71	4.15
E23	P	13	3.69	3.44
Total	23	714	1.80	3.05

Para estimar el aporte del factor Escuela se evalúa comparando el modelo nulo o AEA, con el modelo inicial que no incluye el factor Escuela, atendiendo al estadístico de ajuste "desvianza" -2LL (McCullag y Nelder, 1989). Posteriormente, se comparan con los modelos explicativos Regresión con Medias como Resultados (RMR) y ANCOVA de un Factor de Efectos Aleatorios (ACEA. Las comparaciones permiten establecer cuando un modelo supera al otro. La diferencia entre los estadísticos -2LL correspondientes a dos modelos se distribuye según chi-cuadrado con grados de libertad igual al número de parámetros en que difieren los dos modelos. Mientras menor es el valor del estadístico -2LL, mejor es el ajuste del modelo.

Los resultados que siguen caracterizan el ajuste o ganancia explicativa aportada por distintos modelos en relación a -2LL. La tabla 24 (segunda fila, modelo AEA) muestra la diferencia en el estadístico -2LL asociada a los modelos AEA e inicial. Esta diferencia de 9.11 se distribuye según chi-cuadrado con 1 grado de libertad (asociado al factor escuela con $p < .01$); por lo que se rechaza la hipótesis de que el efecto del factor Escuela sea nulo. Al avanzar desde el modelo AEA a RMR, se observa que el modelo RMR no supera al AEA (las diferencias -7.66, 0.15, 0.67 no son significativas). En el caso del modelo ACEA se observa que el modelo que supera a los anteriores es el que incluye el efecto Profesor y Pretest (la diferencia 149.30 es significativa).

Tabla 24
Criterios de Información

Modelo	Descripción del modelo	-2LL	Diferencia
Inicial	No incluye el efecto Escuela	3620.86	-
AEA	Incluye el efecto Escuela	3611.75	9.11**
RMR	Incluye efecto del *SIMCE*	3619.41	-7.66
RMR	Incluye el efecto del *NSE*	3611.60	0.15
RMR	Incluye el efecto *Profeso*r	3611.08	0.67
ACEA	Incluye efectos *SIMCE* y *Pretest_c*	3470.36	149.04***
ACEA	Incluye efectos *NSE* y *Pretest_c*	3462.68	148.92***
ACEA	Incluye efectos *Profesor* y *Pretest_c*	3461.78	149.30***

*** $p < .001$; ** $p < .01$.

La Tabla 25 muestra el valor estimado de la constante o intersección, que es el único parámetro de efectos fijos de este modelo. Se trata de una estimación de la media poblacional de las 23 escuelas en la variable dependiente Avance. Para el modelo AEA, la estimación es $\widehat{\mu}$ =1.78 aparece acompañada de su error típico, sus grados de libertad, su valor tipificado t.

Si bien, el estadístico Wald en la Tabla 26 da la significación del efecto del procedimiento MIXED del SPSS, en este estudio usamos el estadístico -2LL, que, según señalan Pardo et al. (2007) es más fiable para tamaños de muestras pequeñas. La varianza del factor (Escuela = 0.38) indica cuánto varía la variable Avance entre las escuelas de toda la población, y la varianza de los residuos (residuos =8.97) indica cuánto varía la variable Avance, dentro de cada escuela. Según estas estimaciones, la variabilidad entre las escuelas representa el 4%, 0.38 / [0.38 + 8.97], de la variabilidad total del Avance. El cociente 0.041 recibe el nombre de coeficiente de correlación intraclase (CCI) y representa el grado de variabilidad existente entre las distintas escuelas en comparación con la variabilidad existente entre los alumnos de la misma escuela. El 96% de la varianza está explicada por las diferencias dentro de cada escuela. Dado que la cantidad de escuelas es pequeña, el estadístico Wald resulta exigente y el 4% no llega a ser significativo al 5%. (Ver Tabla 26, 0.10>0.05).

Tabla 25
Estimaciones de los Parámetros de Efectos Fijos

Modelo	**Parámetro**	**Estimación**	**Error típico**	**gl**	**Estadístico t**	***p.***
Inicial	Intersección	1.84	0.11	713	16.09	0.00
AEA	Intersección	1.78	0.18	16.89	9.98	0.00
RMR	intersección	1.77	0.19	16.8	9.58	0.00
	SIMCE_c	0.001	0.01	14.65	0.12	0.91
	intersección	1.74	0.18	18.07	9.78	0.00
	NSE_c	0.25	0.20	22.11	1.25	0.22
	intersección	1.78	0.16	16.88	10.84	0.00
	Profesor_c	0.08	0.03	16.29	2.45	0.02
ACEA	Intersección	1.78	0.19	17.29	9.38	0.00
	Pretest_c	-0.43	0.03	686.60	-13.13	0.00
	SIMCE_c	-0.0003	0.01	15.81	-0.29	0.97
	Intersección	1.74	0.18	17.48	9.63	0.00
	Pretest_c	-0.43	0.03	686.25	-13.13	0.00
	NSE_c	0.24	0.20	21.35	1.21	0.23
	Intersección	1.78	0.17	17.41	10.69	0.00
	Pretest_c	-0.43	0.03	689.17	-13.14	0.00
	Profesor_c	0.08	0.032	17.28	2.52	0.02

(a) Variable dependiente: Avance

Tabla 26

Estimaciones de los Parámetros de Covarianza

Modelo	Parámetro		Estimación	Error típico	Wald Z	*p*
Inicial	*Varianza total*	varianza	9.31	0.49	18.88	0.00
AEA	Residuos		8.97	0.48	18.56	0.00
	Varianza = Escuela	varianza	0.38	0.23	1.63	0.10
RMR	Residuos		8.97	0.48	18.53	0.00
	Escuela (*SIMCE_c*)	varianza	0.42	0.26	1.60	0.11
	Residuos		8.98	0.48	18.55	0.00
	Escuela (*NSE_c*)	varianza	0.35	0.23	1.52	0.12
	Residuos		8.96	0.48	18.59	0.00
	Escuela (*Profesor_c*)	varianza	0.28	0.19	1.44	0.15
ACEA	Residuos	Varianza	7.18	0.39	18.53	0.00
	(*SIMCE_c*) Intersección		0.52	0.27	1.91	0.05
	Residuos	Varianza	7.19	0.39	18.52	0.00
	(*NSE_c*) Intersección		0.45	0.25	1.81	0.07
	Residuos	Varianza	7.17	0.39	18.56	0.00
	(*Profesor*_c) Intersección		0.35	0.20	1.75	0.08

AEA: ANOVA de un Factor de Efectos Aleatorios; RMR: Regresión con Medias como Resultados; ACEA: ANCOVA de un Factor Efectos Aleatorios.

Análisis de Regresión con Medias como Resultados (RMR). Se estudia el grado en que *NSE, SIMCE y Profesor* dan cuenta de las diferencias entre escuelas, en el nivel 2. El modelo RMR añade una covariable z (*NSE, SIMCE* y *Profesor*) al modelo nulo en el nivel 2. El modelo del nivel 1, $\gamma_{ij} = \beta_{oj} + e_{ij}$, no cambia. La covariable de nivel 2 interviene en el nivel 2:

$$\beta_{oj} = \gamma_{oo} + \gamma_{01} z_j + u_{0j} \qquad (\text{con } z_j = Z_j - \bar{Z}).$$

En lugar de utilizar las puntuaciones directas Z (*NSE, SIMCE o Profesor*) se utilizan las diferenciales z (*NSE_c, SIMCE_c* y *Profesor_c*), valores centrados (z_j), para que la constante Y_{oo} tenga un significado claro. Puesto que la constante del nivel 1, β_{0j} (que es la media del

Avance cuando se utilizan variables independientes centradas), es función de los coeficientes y variables del nivel 2. Sustituyendo se obtiene el modelo combinado:

$Y_{ij} = \gamma_{oo} + \gamma_{01} z_j + (u_{0j} + e_{ij})$ Aquí quedé marcado con verde

El paréntesis separa la parte aleatoria del modelo de la parte fija. El término u_{0j} se refiere al efecto del factor Escuela tras eliminar el efecto atribuible a la covariable z (*NSE_c, SIMCE_c* y *Profesor_c*). Del mismo modo, la varianza que recoge la variabilidad entre las escuelas, σ^2_{uo}, indica cómo varían las escuelas tras eliminar las diferencias atribuibles a la covariable z. Usando el procedimiento Mixed Models del SPSS se obtiene el ajuste que pronostica a la variable Avance en términos de las variables *NSE_c*, *SIMCE_c* y *Profesor_c* respectivamente.

La Tabla 25, modelo RMR, muestra las estimaciones de los dos parámetros de efectos fijos: el de la intersección ($\hat{y}_{SIMCE\_c}$ =1.77, $\hat{y}_{NSE\_c}$ = 1.74 y $\hat{y}_{Profesor\_c}$ =1.78, respectivamente) y de la pendiente, coeficiente asociado a la covariable ($\hat{y}_{01\ SIMCE\_c}$ = 0.001, $\hat{y}_{01\ NSE\_c}$ = 0.25, y $\hat{y}_{01\ Profesor\_c}$ = 0.08, respectivamente) dando una estimación del Avance en la población de las escuelas, pues la covariable fue centrada. Dado que la covariable *SIMCE_c* está centrada, el valor de la intersección es una estimación del Avance promedio en las escuelas y el valor del coeficiente asociado a la covariable indica que por cada punto que aumenta el SIMCE promedio en una escuela, el Avance promedio de los alumnos aumenta 0.001 puntos, como este coeficiente tiene asociado un estadístico t cuyo nivel crítico (sig= 0.91) no es significativo al 5%, lo que indica que no hay evidencia de que SIMCE está relacionado con el Avance de los alumnos. Para *NSE_c*, por cada punto que aumenta el *NSE_c* promedio en una escuela, el Avance promedio de los alumnos aumenta 0.25 puntos asociado al estadístico t cuyo nivel crítico (sig=0.22) no es significativo al 5%, lo que indica que no hay evidencia de que NSE está relacionado con el Avance de los alumnos. Para el *Profesor_c*, por cada punto que aumenta el *Profesor_c* promedio en una escuela, el Avance promedio de los alumnos aumenta 0.08 puntos, asociado al estadístico t cuyo nivel crítico (sig=0.02) lo que indica que es significativo al 5%, por lo tanto se puede afirmar que el conocimiento del profesor está relacionado con el Avance de los alumnos.

La Tabla 26, modelo RMR, muestra que la estimación de la varianza de los residuos ($\hat{\sigma}^2{}_{e\ SIMCE\_c}$ = 8.97, $\hat{\sigma}^2{}_{e\ NSE\_c}$ = 8.98 y $\hat{\sigma}^2{}_{e\ Profesor\_c}$ = 8.96) es similar a la del modelo AEA ($\hat{\sigma}^2{}_e$ = 8.97). La variabilidad del nivel 1 no se vería afectada por la presencia de una covariable del nivel 2. Sin embargo, la estimación de la variabilidad entre las escuelas ($\hat{\sigma}^2$uo) ha aumentado para el caso de la covariable *SIMCE_c*, pasó de 0.38 en el modelo AEA a 0.42. En el caso *NSE_c*, la variabilidad entre las escuelas pasó de 0.38 en el modelo AEA a 0.35 presentando una leve disminución en el modelo RMR y para el caso *Profesor_c*, la variabilidad entre las escuelas pasó de 0.38 en el modelo AEA a 0.28 presentando una mayor disminución en el modelo RMR. Más allá de estas variaciones, el estadístico Wald no permite aseverar que hay cambios. No obstante, dado que el estadístico de Wald es conservador para muestras pequeñas, se podría pensar que queda por explicar parte de las diferencias entre las escuelas.

Comparando el estadístico -2LL asociado al modelo AEA con el asociado al RMR y al incluir las interacciones en el modelo RMR, se obtiene: -2LL= 3619.41 para *SIMCE_c*, -2LL = 3611.60 para *NSE_c* y -2LL= 3611.08 para *Profesor_c*. La diferencia entre 3611.75 y el valor de la variable -2LL es -7.66 para *SIMCE_c*, 0.15 para *NSE_c* y 0.67 para *Profesor_c*. La respectiva diferencia se distribuye según chi-cuadrado con 1 grado de libertad. Para los tres casos se acepta la hipótesis nula. Después de controlar el efecto del *NSE*, y separadamente el efecto del *SIMCE* y *Profesor*, no se puede aseverar que el resultado del Avance promedio es diferente en todas las escuelas.

El Coeficiente de Correlación Intraclase (CCI) de los promedios de las escuelas permite precisar qué parte de la varianza total se debe a las diferencias entre escuelas; esto es, CCI= $\sigma^{\wedge 2}{}_{u0}$ / ($\sigma^{\wedge 2}{}_{u0}$+ $\sigma^{\wedge 2}{}_{e}$). CCI es 0.045 para la covariable *SIMCE_c*, 0.038 para *NSE_c* y 0.03 para Profesor_c. Cada uno de los tres valores indica que después de controlar el efecto atribuible a las respectivas covariables, el porcentaje asociado, 4.5%, 3.8% y 3% de la varianza total es atribuible a diferencias entre los promedios de las escuelas. Este coeficiente es ahora condicional: informa acerca de lo que ocurre con las escuelas y el logro en el Avance tras controlar el efecto respectivo en *SIMCE_c*, *NSE_c* y *Profesor_c*.

En el modelo AEA el CCI es 0.041. Al incluir la covariable *SIMCE_c*, *NSE_c* y *Profesor_c*, el valor del CCI ha subido a 0.045 para SIMCE. Y ha bajado a 0.35 para NSE y 0.28 para Profesor. Lo anterior se debe a que parte de las diferencias observadas entre las escuelas está explicada por las diferencias en la respectiva covariable. Comparando el modelo AEA y el modelo RMR que incluye la covariable, puede conocerse la proporción de varianza explicada en el nivel 2: con el cálculo (0.38 – valor covariable)/0.38. Es decir, el 8% es atribuible al NSE, el -10.5% sería atribuible al SIMCE, y 26% sería atribuible al conocimiento del profesor. El SIMCE no se muestra relevante en el modelo estudiado.

Análisis de Covarianza de un Factor de Efectos Aleatorios (ACEA). Al incluir una covariable del nivel 1, el modelo en ese nivel adopta la forma:

$Y_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}\, x_{ij} + e_{ij}$ (con $x_{ij} = X_{ij} – X$)

En el nivel 2, el término β_{0j} no cambia ($\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}\, z_j + u_{0j}$), y el término β_{1j} es el mismo para todas las escuelas (pues, de momento, sólo se están relacionando dos variables del nivel 1):

$\beta_{1j} = \gamma_{10} + u_{1j}$

El coeficiente γ_{10} representa la pendiente media que relaciona el Avance promedio de los alumnos con sus puntuaciones en el "*Pretest – MediaPretest*", *Pretest_c*. Sustituyendo se obtiene el modelo combinado:

$Y_{ij} = \gamma_{00} + \gamma_{01}\, z_j + \gamma_{10}\, x_{ij} + (u_{0j} + e_{ij})$

Al añadir esta nueva covariable se obtienen, entre otros, los resultados que muestran las tablas 24, 25 y 26. La tabla 25 (modelo ACEA) ofrece las estimaciones de los tres parámetros de efectos fijos del modelo: (1) la constante o intersección ($\hat{\gamma}_{00}$ = 1.78 para SIMCE, $\hat{\gamma}_{00}$ = 1.74 para NSE y $\hat{\gamma}_{00}$ =1.78 para Profesor), que sigue siendo una estimación del Avance promedio en la población de escuelas; (2) el coeficiente asociado a la variable de nivel 2 centrada (sea ésta *SIMCE_c*, $\hat{\gamma}_{01}$ = -0.0003*, NSE_c,* $\hat{\gamma}_{01}$ =0.24 o *Profesor_c,* $\hat{\gamma}_{01}$ =0.08), que es similar al obtenido antes de incluir la covariable *Pretest* (véase modelo RMR); y (3) el coeficiente asociado a la variable *Pretest* (, $\hat{\gamma}_{10}$= -0.43 para NSE, , $\hat{\gamma}_{10}$= -0.43 para SIMCE, y , $\hat{\gamma}_{10}$= -0.43 Profesor), que indica que por cada unidad que disminuye las puntuaciones del Pretest, el Avance aumenta 0.43 unidades respectivamente para NSE_c, SIMCE_c y Profesor_c.

La tabla 26 (modelo ACEA) muestra las estimaciones de los dos parámetros de covarianza. La estimación de la variabilidad entre las escuelas (σ^2_{uo}) ha aumentado con respecto al modelo RMR. Para SIMCE_c ha aumentado de 0.42 a 0.52; para NSE_c ha aumentado de 0.35 a 0.45; y para Profesor_c ha aumentado de 0.28 a 0.35. Y la varianza de los residuos ($\sigma\hat{}^2_e$) ha pasado de 8.97 en el modelo AEA a 7.18 para el modelo ACEA, similarmente para las tres covariables: SIMCE_c, NSE_c y Profesor_c. Por tanto, al corregir el resultado en el Avance mediante las puntuaciones en el Pretest, la variabilidad intraescuelas se ha visto reducida en un 20%.

4. Discusión y conclusiones del estudio 3

Este estudio se enfocó en estimar el efecto del conocimiento del profesor sobre el aprendizaje del alumno en la conceptualización de las fracciones, junto a las covariables, conocimientos previos de los alumnos, nivel socioeconómico y nivel académico de las escuelas, que la literatura reconoce que inciden en el aprendizaje del alumno (Bartau, Azpillaga y Joaristi, 2017; Murillo y Hernández, 2011; OCDE, 2016). La explicación del avance en el aprendizaje del alumno se estudió a partir de la variabilidad dentro de cada escuela y la variabilidad entre las escuelas. Se evidenció que con el modelo ANOVA de un Factor de Efectos Aleatorios el 4% de la variabilidad del conocimiento de los alumnos corresponde a las diferencias entre las escuelas y el 96% dentro de cada escuela. Este resultado es similar al estudio de Hill et al. (2005) quienes muestran que el 85% de la variabilidad del conocimiento de los alumnos se encuentra entre los alumnos dentro de cada escuela.

Con el modelo Regresión con Medias como Resultados, el 26% de la variabilidad entre las escuela es atribuible al conocimiento del profesor, y el 8% es atribuible al nivel socioeconómico de la escuela. Al incorporar el Pretest_c al modelo ANCOVA de un Factor Efectos Aleatorios, la variabilidad dentro de cada escuela se redujo en un 20%. También se evidenció que el conocimiento del profesor está relacionado significativamente con el Avance de los alumnos, al 5%.

La presente investigación muestra resultados similares a otros estudios. Por ejemplo, Hill et al. (2005) muestran que el conocimiento matemático para la enseñanza de los profesores se relaciona significativamente con el logro en matemáticas de los estudiantes de primer y tercer grado; Harbison y Hanushek (1992) encuentran un efecto positivo entre los resultados de las pruebas de matemáticas de profesores y el rendimiento de sus estudiantes de 4° grado; Baumert et al. (2010) encuentran un efecto positivo del conocimiento pedagógico del contenido sobre los logros en el aprendizaje de estudiantes de 10° grado; Tchoshanov (2011) y Tchoshanov et al. (2017) encuentran que el conocimiento matemático de los conceptos y las conexiones del profesor se asocia significativamente con el logro del estudiante. Así, las investigaciones para estimar el efecto del conocimiento matemático del profesor, medido por diferentes pruebas, sobre el logro en el aprendizaje del alumno muestran una tendencia prometedora (Tchoshanov, 2011). Como lo indica el National Mathematics Advisory Panel (2008), los resultados de pruebas de los profesores constituirían una mejor medida de sus conocimientos matemáticos que los cursos, títulos y grados. De esta forma la presente investigación se suma a los trabajos mencionados anteriormente y contribuye con evidencia empírica mostrando un efecto positivo del conocimiento del profesor sobre el aprendizaje del alumno, en la conceptualización de las fracciones en 4° grado.

Estudio 4: Influencia del conocimiento profundo del profesor acerca de las fracciones sobre el aprendizaje de los alumnos en 4° grado

Resumen

El objetivo de este estudio es establecer en qué medida el conocimiento profundo del profesor acerca de las fracciones y el conocimiento sobre la enseñanza de las fracciones, ajustados por el nivel socioeconómico y el nivel de conocimientos en matemáticas que se alcanza en las escuelas (SIMCE), influye sobre el aprendizaje de los alumnos en la conceptualización de las fracciones en cuarto grado. Se obtuvo información de 378 alumnos de 4º grado de 9

escuelas y de sus respectivos profesores de matemáticas. Los resultados de los análisis de regresión muestran que el efecto conocimiento profundo del profesor es significativo en el aprendizaje por alumno ($p = 0.001$), más allá de lo explicado por el puntaje SIMCE del colegio, que también es significativo ($p = 0.02$).

Palabras Clave: Conocimiento del profesor, fracciones, enseñanza de las matemáticas.

1. Introducción

En las últimas tres décadas, el conocimiento que los profesores requieren para realizar una enseñanza efectiva en relación con temas matemáticos específicos, se ha convertido en un foco de creciente interés, tanto para investigadores que estudian el tema como también para autoridades educativas (Pino-Fan, Godino y Font, 2018). En un período, en que los países trabajan para elevar el nivel de conocimiento de las matemáticas entre los estudiantes, es importante que la formación inicial del profesor garantice que sus graduados dominan el conocimiento que requerirán para su práctica profesional. Cabe entonces la pregunta ¿cuáles son los conocimientos que requiere un profesor para realizar una enseñanza efectiva?

Shulman (1986) ha sido pionero en caracterizar, de manera genérica el conocimiento para la enseñanza del contenido, él distingue el conocimiento del contenido (CC), conocimiento pedagógico del contenido (CPC) y el conocimiento curricular. Shulman (1986) define el CC como "la cantidad y la organización del conocimiento per se en la mente de los maestros", el CPC como "la forma particular del conocimiento que incorpora el aspecto del contenido que guarda más relación con la enseñanza" y que incluye saber cómo representar el contenido para que otros lo comprendan. El conocimiento curricular involucra saber cómo se organizan los temas, tanto dentro de un año escolar como a lo largo del tiempo.

Desde que Shulman presentara estas categorías, varios investigadores han mostrado diversas conceptualizaciones acerca de lo que los profesores necesitan saber para enseñar matemáticas (Ball, Thames y Phelps, 2008; Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013; Davis y Simmt, 2006; Hill, Ball y Schilling, 2008; Ma, 1999; Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005; Stylianides y Stylianides, 2014; Tchoshanov et al., 2017).

Ball et al. (2008) caracterizaron el conocimiento requerido para enseñar matemática y mediante el modelo conocimiento matemático para la enseñanza, presentan categorías asociadas al CC: conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido y conocimiento del horizonte matemático. Hill et al. (2008) contribuyendo a precisar este conocimiento, establecen tres categorías del CPC: conocimiento de la enseñanza del contenido, conocimiento del currículo y conocimiento de los estudiantes y el contenido matemático.

Ma (1999) alineada con la conceptualización de Shulman (1986) mostró el conocimiento que ponen en juego en la tarea de enseñar profesores norteamericanos y chinos, en su trabajo se evidencian problemas propios de la enseñanza de la matemática. El principal hallazgo de Ma (1999) se relaciona con la noción de comprensión profunda de las matemáticas fundamentales (CPMF). Un profesor con CPMF posee un conocimiento profundo del currículo escolar, conceptual e interconectado que "va más allá de poder calcular en forma correcta y dar fundamentos para algoritmos de cálculo" (Ma, 2010, p. 9). La noción de CPMF se muestra habilitadora del conocimiento didáctico de la matemática.

La literatura da cuenta de la importancia del conocimiento del profesor sobre la matemática que enseña. No obstante, en el informe National Mathematics Advisory del Panel (2008) se señala que es necesario investigar más acerca de los tipos de conocimientos de los profesores que se relacionan más fuertemente con lo que los estudiantes aprenden. El Panel (2008) analizó investigaciones en las que se utilizaron variables sustitutas para medir el conocimiento del profesor, tales como: certificados, cursos de matemáticas y/o grado. Sin embargo, estos estudios mostraron resultados inconsistentes, en general no confirman la importancia del conocimiento matemático de los profesores en relación con el aprendizaje de los estudiantes.

El Panel (2008) señala que el único estudio que midió directamente el conocimiento matemático utilizado para enseñar y su incidencia en los logros de aprendizaje es el trabajo de Hill, Rowan y Ball (2005), quienes muestran que el conocimiento matemático para la enseñanza de los profesores se asocia significativamente con el aprendizaje en matemáticas de estudiantes de primer y tercer grado. Posteriormente se publica el trabajo de Baumert et al. (2010) cuyos resultados revelaron un efecto positivo del CPC sobre el avance en el aprendizaje de estudiantes de décimo grado en matemáticas. Cueto et al. (2017) encuentran una asociación positiva entre el CPC de los profesores y el rendimiento en matemáticas de estudiantes de cuarto grado.

Tchoshanov (2011) parte de un supuesto similar al del Panel (2008) al señalar que no solamente importa la cantidad de cursos de matemáticas que tiene un profesor, sino más bien, saber qué tipo específico de conocimiento matemático posee un profesor efectivo. El objetivo de su estudio consistió en medir tres tipos cognitivos del conocimiento matemático de profesores y su asociación con el éxito de estudiantes de 6° a 8° grado. El principal hallazgo de su estudio es que el conocimiento de los conceptos y de las conexiones del profesor se asocia significativamente con el logro del estudiante. Posteriormente Tchoshanov et al. (2017) estudian la asociación entre tres tipos cognitivos del conocimiento matemático de los profesores y el desempeño de estudiantes de 5° a 9° grado. Los resultados sugieren que el conocimiento del contenido de los docentes juega un papel importante en el rendimiento de los estudiantes.

Las investigaciones existentes muestran que el conocimiento de los profesores sobre la matemática que enseñan se asocia significativamente y tiene un efecto positivo en el aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, en países en desarrollo hay falta de estudios sobre la relación entre el conocimiento de los profesores y el aprendizaje de los alumnos (Cueto et al., 2017) y más aún sobre temas matemáticos específicos. En particular, en este estudio se aborda la conceptualización de las fracciones, un tema muy complejo y de gran interés para la matemática educativa.

Estudiantes de todo el mundo tienen dificultades para aprender las fracciones, aún en países donde la mayoría de los estudiantes obtienen una comprensión conceptual aceptable de estas, como Japón o China, las fracciones son consideradas un tema difícil (Fazio y Siegler, 2011). Las dificultades que enfrentan los alumnos para realizar operaciones básicas con fracciones conduce a errores comunes que aparecen en el aprendizaje del álgebra, el cual conforma una base fundamental en matemáticas de formación superior (Siegler et al., 2012; Torbeyns, Schneider, Xin y Siegler, 2015). Hay investigaciones que muestran que los profesores presentan dificultades similares a las identificadas en los alumnos (Jakobsen, Ribeiro y Mellone, 2014; Ma, 2010; Pinto y Ribeiro, 2013). La falta de conocimiento matemático para la enseñanza puede afectar a cómo los profesores critican los libros de texto, seleccionan el material para enseñar, estructuran sus cursos y a cómo conducen la instrucción (Crossman, Wilson y Shulman, 2005).

Atendiendo a estos antecedentes, este estudio tiene como propósito mostrar evidencias del efecto positivo que tiene el conocimiento del profesor sobre el aprendizaje del alumno en la conceptualización de las fracciones. Nos enfocamos en dos tipos de conocimientos del profesor, el "conocimiento profundo de las fracciones" y el "conocimiento sobre la enseñanza de las fracciones" (Rodríguez y Olfos, 2018).

En este estudio el constructo conocimiento profundo de las fracciones se define como un conocimiento conceptual e interconectado (Gallardo, González y Quispe, 2008; Ma, 2010). En general en el campo de la cognición matemática existe cierto acuerdo en diferenciar dos tipos de conocimientos: el conceptual y el procedimental. El conocimiento conceptual se define como el conocimiento de los conceptos y el procedimental como la capacidad de ejecutar procedimientos o pasos para resolver un problema (Rittle-Johnson y Schneider, 2014).

Varios investigadores señalan que el conocimiento conceptual de las fracciones explica el aprendizaje de matemáticas más avanzadas. Por ejemplo, Byrnes y Wasik (1991) mostraron que el conocimiento conceptual de las fracciones explica el aprendizaje de la capacidad de realizar procedimientos de adición y multiplicación con fracciones. Análogamente los hallazgos del estudio de Charalambous y Pitta-Pantazi (2007) indican que el conocimiento conceptual, predice el desempeño procedimental. Fuchs et al. (2013) señalan que el conocimiento conceptual tiende a tener un efecto mayor sobre el desarrollo del conocimiento procedimental que al revés. Rittle-Johnson, Schneider y Star (2015) indican que existe cierto consenso en señalar que el conocimiento conceptual a menudo apoya y conduce al conocimiento procedimental.

Pero ¿qué significa tener un conocimiento conceptual de las fracciones? diversos investigadores proponen que el conocimiento conceptual de las fracciones incluye la comprensión de sus diferentes subconstructos tales como parte todo, cociente, operador, razón y medida (Behr, Harel, Post y Lesh, 1993; Escolano y Gairín, 2005; Gallardo, González y Quispe, 2008; Kieren, 1993). Fuchs et al. (2014) señalan que en cuarto grado la comprensión del subconstructo parte-todo se representa típicamente utilizando un modelo de área y que la comprensión del subconstructo medida de las fracciones, a menudo se representa con rectas numéricas. Los hallazgos de la investigación de Fuchs et al. (2013; 2014) sugieren que la enseñanza centrada en la fracción como medida sería clave para el aprendizaje de las fracciones.

Por otra parte, la literatura advierte que el conocimiento que requiere un profesor para enseñar matemáticas no se limita al conocimiento matemático. Existe un conocimiento complementario, que se mantiene en discusión desde que Shulman (1986) identificara el CPC. Hill et al. (2008) identifican un componente del CPC, que denominan "conocimiento de los estudiantes y el contenido matemático" y lo definen como "el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben o aprenden un contenido en particular" (p. 375). Dicha componente del CPC incluye conocer las concepciones erróneas, dificultades y estrategias utilizadas por el alumno, como por ejemplo, cuando los estudiantes aprenden a sumar fracciones, los errores o malentendidos que comúnmente surgen durante este proceso. Con base en la investigación de Hill et al. (2008), en este estudio el constructo conocimiento sobre la enseñanza de las fracciones se refiere al conocimiento que tiene el profesor respecto de las dificultades, errores comunes y estrategias utilizadas por los estudiantes. Respecto de las dificultades y errores que se presentan en el uso de las fracciones, varios investigadores señalan que se deben tanto a la gran cantidad de subconstructos que tienen como también a los conocimientos previos que tienen los alumnos. Por ejemplo, presentan dificultades con tareas asociadas al subconstructo de medida, tales como colocar fracciones en una recta numérica, determinar fracciones equivalentes, comparar y ordenar fracciones (Cortina, Cardoso y Zúñiga, 2012; Fandiño, 2009; Godino, 2004; Hansen et al., 2017).

Por citar algunos ejemplos concretos, al comparar fracciones, Godino (2004) señala que los niños se equivocan al señalar que 1/2 es menor que 1/3, argumentando que 2 es menor que 3. También se equivocan cuando señalan que la mitad de la fracción 1/6 se designa frecuentemente por la fracción 1/3, argumentando que la mitad de 6 es 3. Así las propiedades de los números naturales pueden ser un obstáculo para el aprendizaje de las fracciones. Los niños no comprenden que cualquier número entero puede dividirse en cualquier número de partes iguales. Por ejemplo, pueden presentar dificultades cuando se les pide que repartan 3 tabletas de chocolates entre 5 niños.

Charalambous y Pitta-Pantazi (2007) examinan asociaciones entre los diferentes subconstructos de las fracciones (parte todo, razón, operador, cociente y medida) en estudiantes de 5° y 6° grado. El estudio mostró que los estudiantes tuvieron más éxito en tareas relacionadas con el subconstructo parte todo y menos éxito en tareas correspondiente al subconstructo medida. Fandiño (2009) señala que los estudiantes presentan dificultades en el reconocimiento de esquemas de parte todo continuo y discreto. Button (2013) reporta que estudiantes de 6° grado de primaria presentan dificultades con actividades relacionadas con el subconstructo parte todo discreto y con el subconstructo de medida como por ejemplo, ubicar fracciones en la recta numérica y equivalencia de fracciones.

Atendiendo los antecedentes expuestos, en este estudio nos planteamos como objetivo establecer en qué medida el Conocimiento Profundo y el Conocimiento sobre la Enseñanza de las fracciones del profesor, ajustado por las variables nivel socioeconómico (NSE) y nivel académico que alcanzan las escuelas en matemáticas (SIMCE) influyen sobre el conocimiento que alcanzan los alumnos en la conceptualización de las fracciones en cuarto grado.

El presente estudio fue guiado por las siguientes preguntas de investigación: ¿El NSE influye en el aprendizaje de los alumnos en la conceptualización de las fracciones? ¿El SIMCE influye en el aprendizaje de los alumnos en la conceptualización de las fracciones? ¿El conocimiento del profesor otorga un efecto adicional a lo que atribuye al SIMCE y al NSE?, así este estudio expo-facto con prueba inicial y prueba final, utilizando la técnica de regresión lineal múltiple explora el conocimiento del profesor como factor explicativo del avance o logro de aprendizaje del alumno en fracciones.

2. Método

2.1 Participantes y selección de la muestra

En el estudio participaron 378 estudiantes de 4° grado atendidos por 10 profesores de 9 establecimientos escolares, 3 municipales y 6 subvencionados, proporcional a la cantidad de estos tipos de escuelas en la ciudad de La Serena; correspondiente al 10% de la población de establecimientos. Los grupos se obtuvieron de un muestreo proporcional, con participación voluntaria. Los datos fueron tomados durante el año escolar 2015 (ver Tabla 27). De los 10 profesores 7 son mujeres y 3 hombres, en promedio tienen 14 años de experiencia, con un mínimo de 2 años y máximo de 34 años. Los docentes tienen el título de profesor, de los cuales 9 son de educación básica y 1 profesor de matemáticas.

Tabla 27

Tipos de escuela, números de cursos y alumnos por escuela

Escuelas	Tipo	Cursos	Alumnos
E1	P-Sub	1	28
E2	P-Sub	2	48
E3	P-Sub	2	47
E4	P-Sub	2	58
E5	P-Sub	1	18
E6	Mun	1	9
E7	Mun	1	26
E8	P-Sub	3	113
E9	Mun	2	31
Total	9	15	378

2.2 Instrumentos

Prueba sobre las fracciones para los alumnos. La prueba para 4° grado se conforma de 22 ítems de opción múltiple organizados de acuerdo a una matriz de especificaciones enmarcada en los contenidos curriculares (Mineduc, 2012) de la unidad de "Fracciones", según muestra la Tabla 28. La prueba se administró a los alumnos al inicio del año escolar como Prueba inicial y al final del año como Prueba final. La prueba mostró una confiabilidad de .77 según el coeficiente alfa de Cronbach.

Tabla 28

Matriz de Especificaciones Prueba para los Alumnos

	ítems
Conocimientos previos	6
Comprensión de las fracciones	9
Adición y sustracción de fracciones de igual denominador en contexto	3
Identificación y representación de fracciones propias y números mixtos hasta 5	4

Prueba sobre el Conocimiento Profundo y sobre la Enseñanza de las fracciones para el profesor. Las pruebas están conformada por 10 ítems referidos al conocimiento profundo sobre las fracciones y 14 ítems sobre la enseñanza de las fracciones. Los antecedentes de las pruebas se encuentran en (Rodríguez y Olfos, 2018).

2.3 Variables contextuales

SIMCE. Corresponde al puntaje promedio desde el 2011 al 2015 obtenido por la escuela en las pruebas de matemáticas anuales SIMCE (Sistema de medición de la calidad de la educación) realizadas en el país, que evalúan el logro de aprendizaje en la asignatura de matemática, abarcando una muestra representativa de los contenidos curriculares de 3º y 4° grado (Mineduc, 2012). Los puntajes de la prueba SIMCE están disponibles en línea http://www.agenciaeducacion.cl

NSE. Corresponde al nivel socioeconómico medio de las familias de los estudiantes que anualmente rinden las pruebas SIMCE en el país. En el grupo NSE Medio Bajo la mayoría de los apoderados ha declarado tener hasta 10 años de escolaridad y un ingreso del hogar de hasta $340.000. El grupo NSE Alto la mayoría de los apoderados ha declarado tener entre 13 y 15 años de escolaridad y un ingreso del hogar entre $550.001 y $1.250.000. Los puntajes NSE son públicos y están disponibles en línea http://www.agenciaeducacion.cl

2.4 Procedimientos

Para la administración de las pruebas a los alumnos se solicitó autorización a los profesores, directores y apoderados. Las pruebas fueron administradas por un asistente del proyecto en las primeras horas de las jornadas de clases habituales de los alumnos, dando 60 minutos de tiempo. La prueba a los profesores fue administrada en conjunto a todos en una sala, dando 30 minutos de tiempo para responder a las preguntas de la prueba "conocimiento profundo de las fracciones", luego de un descanso de 10 minutos, se dan 40 minutos para responder a las preguntas de la prueba "conocimiento sobre la enseñanza de las fracciones". Se proveyó a los docentes un estímulo económico por su participación en el proyecto.

2.5 Análisis de Datos

Las siguientes variables se consideran independientes: SIMCE, NSE, Conocimiento Profundo de las fracciones y Conocimiento sobre la Enseñanza de las fracciones. Los resultados del aprendizaje de los alumnos se evaluaron por medio de la variable dependiente Avance que se obtiene al calcular la diferencia entre el puntaje final y el puntaje inicial por alumno. La variable Avance considera a cada alumno como su propio referente, pero presupone un *potencial* de avance similar entre todos los alumnos. Para evaluar la normalidad se utilizó la prueba Kolmogorov-Smirnov y la homocedasticidad se analizó por medio de la prueba de Bartlett. La comparación del puntaje promedio SIMCE de la muestra con el promedio de los colegios de La Serena desde el año 2011 al 2015 se realizó mediante una prueba t, los valores se presentan como medias y desviaciones estándar. Las correlaciones que se presentan son correlaciones de Pearson. El ajuste por SIMCE y NSE se hizo a través de un modelo de regresión lineal múltiple.

3. Resultados

Dado que el interés de este estudio era conocer el valor predictivo de las variables Conocimiento Profundo y Conocimiento sobre la Enseñanza de las fracciones del profesor, ajustado por el NSE y el SIMCE en relación con la variable Avance, se comprobó que no hay evidencia de falta de normalidad y no hay evidencia de que la varianza de los residuos no sea constante (heterocedasticidad) para la variable Avance por Conocimiento Profundo ($p = 0.13$) y por Conocimiento sobre la Enseñanza ($p = 0.29$).

El puntaje promedio SIMCE de los colegios de La Serena desde el año 2011 al 2015 es 260 (D.E. 24.5) y en los colegios de la muestra es de 263.15 (D.E. 23.95). El puntaje promedio

SIMCE de la muestra no es significativamente distinto del promedio SIMCE de los colegios de La Serena (p = 0.68, fig. 50).

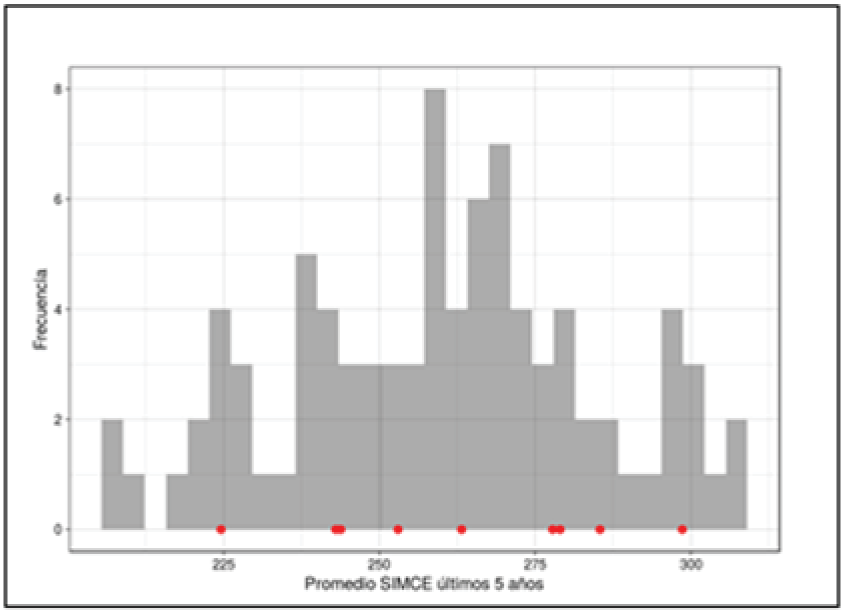


Figura 50. Distribución Poblacional SIMCE La Serena

La correlación entre el SIMCE con la Prueba final y la prueba inicial por alumno es estadísticamente significativa (r = 0.52, p = 0.0001 y r = 0.37, p = 0.0001 respectivamente, fig. 51).

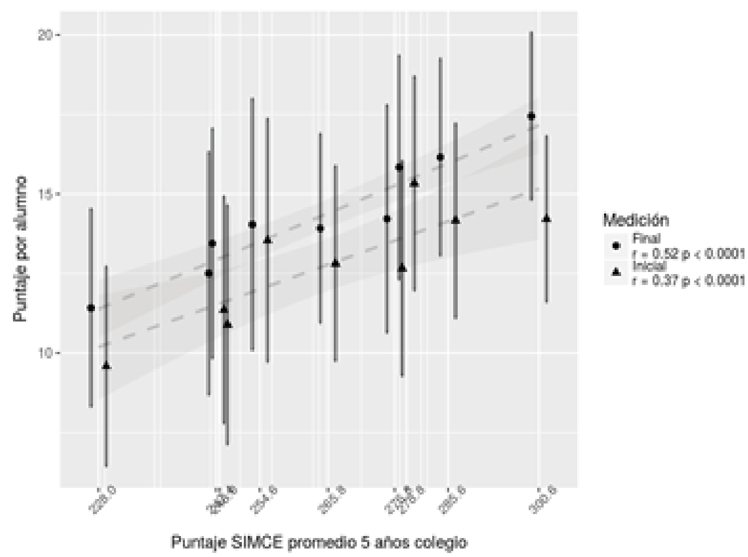


Figura 51. Correlación entre el SIMCE y el puntaje por alumno

El SIMCE se correlaciona de forma significativa con el NSE (r = 0.79, p = 0.0001). El puntaje promedio SIMCE para el grupo NSE Alto es 286.33 (D.E. 13.1) y para el grupo NSE Medio Bajo es 243.05 (D.E. 10.99). El puntaje promedio SIMCE es significativamente mayor para el grupo del NSE Alto (p = 0.0001, fig. 52).

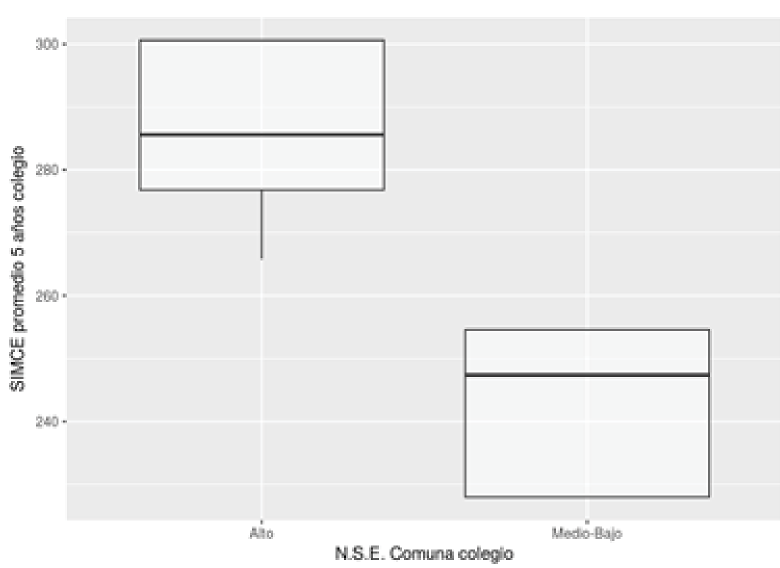


Figura 52. Diferencia SIMCE entre el grupo NSE Alto y NSE Medio Bajo

La asociación entre la Prueba inicial y la Prueba final es estadísticamente significativa ($r = 0.65$, $p = 0.0001$, fig.53). El NSE de la comuna por colegio es significativamente diferente ($p = 0.0001$, fig. 53)

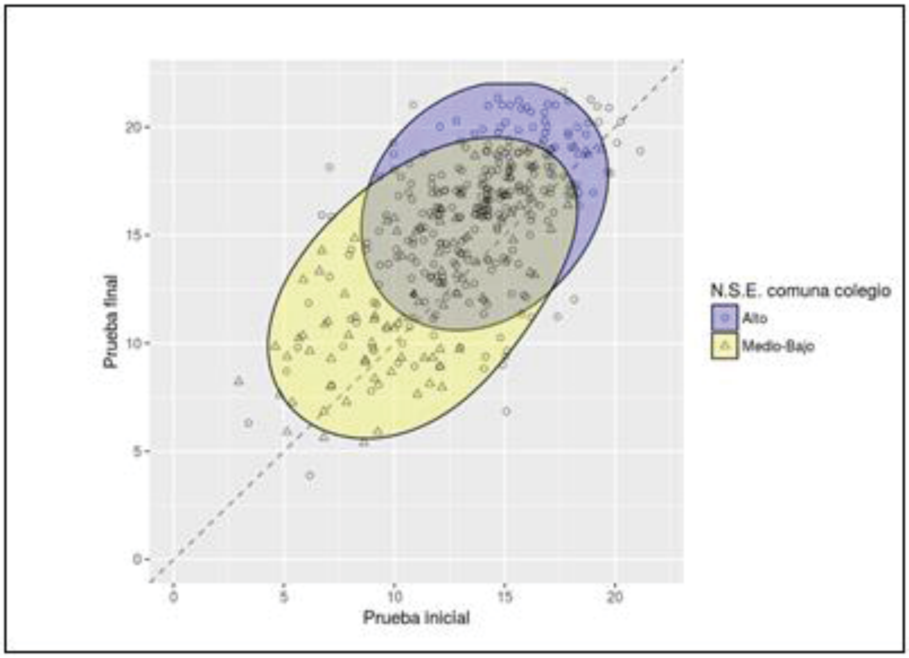


Figura 53. Relación entre el puntaje inicial y final

El puntaje del Avance por alumno se correlaciona de forma significativa con el puntaje SIMCE promedio del colegio al que pertenece ($r = 0.21$, $p = 0.0001$, fig. 54).

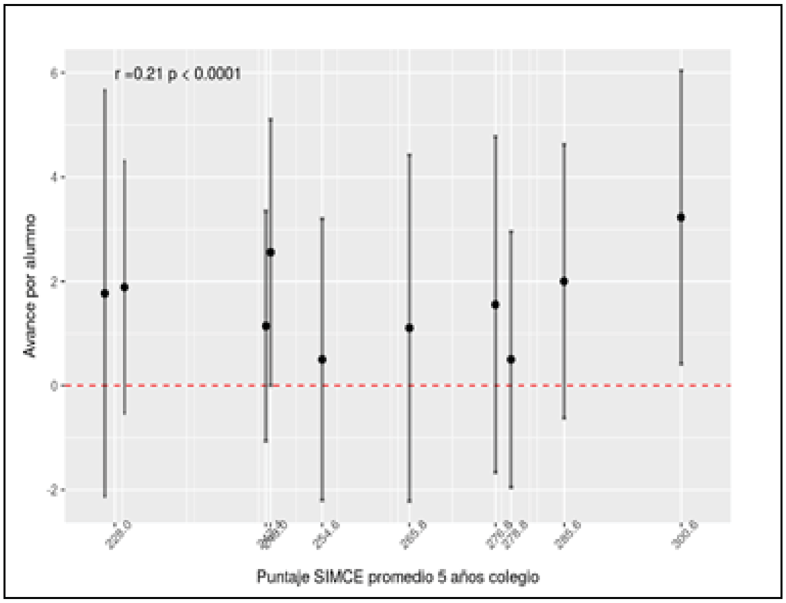


Figura 54. Relación entre el Avance y el SIMCE

El puntaje promedio del Avance por alumno para el grupo NSE Alto es 2.2 (D.E. 3.05) y para el grupo NSE Medio Bajo es 1.3 (D.E. 2.72). El puntaje promedio del Avance por alumno es significativamente mayor para el grupo del NSE Alto (p = 0.01, fig. 55).

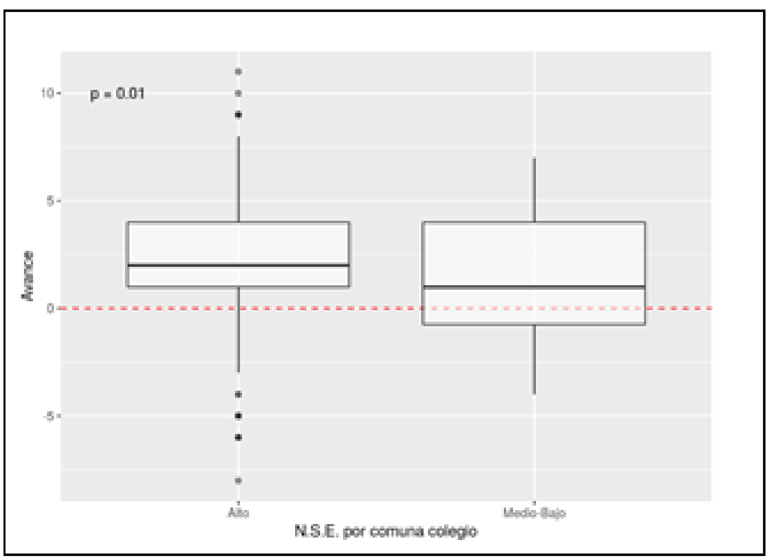


Figura 55. Diferencia del Avance entre el grupo NSE Alto y NSE Medio Bajo

La correlación entre el Conocimiento Profundo y el puntaje promedio del Avance por alumno es estadísticamente significativa (r = 0.25, p = 0.0001, fig. 56).

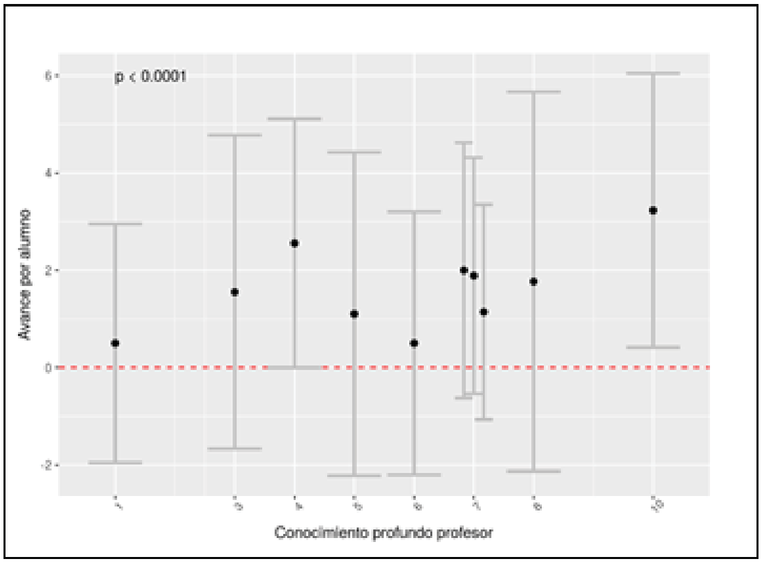


Figura 56. Relación entre el Conocimiento profundo y el Avance por alumno

La correlación entre el Conocimiento sobre la Enseñanza del profesor y el puntaje promedio del Avance por alumno es estadísticamente significativa (r = 0.17, p = 0.001, fig. 57).

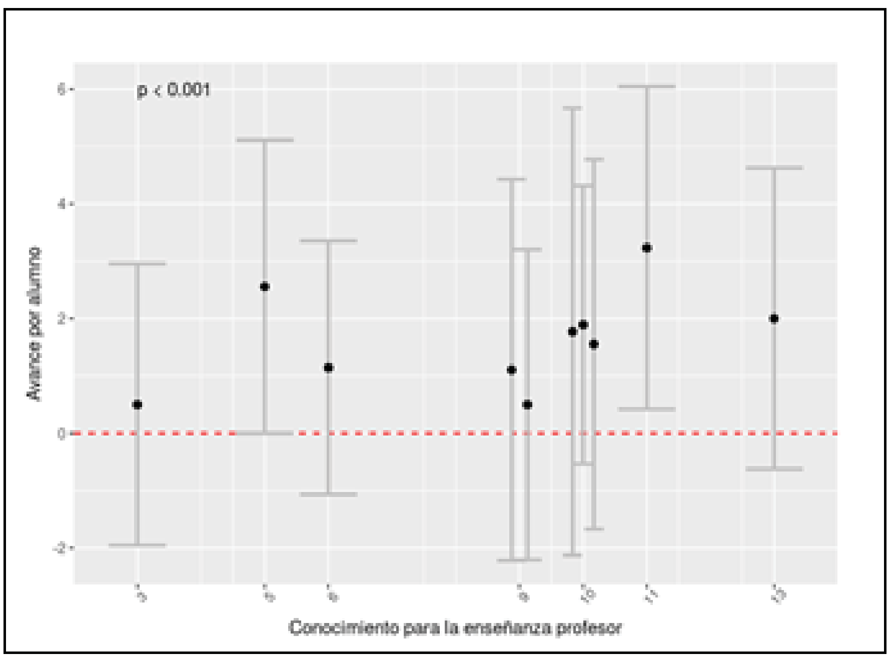


Figura 57. Relación entre el conocimiento sobre la enseñanza y el Avance por alumno

Los resultados de los análisis de regresión muestran que el efecto Conocimiento Profundo del profesor es significativo en el Avance por alumno (p= 0.001), más allá de lo explicado por el puntaje SIMCE del colegio, que también es significativo (p=0.02). En cambio, el efecto de la dimensión Conocimiento sobre la Enseñanza no alcanza significación estadística si ajustamos por SIMCE ($p = 0.09$). Si en conjunto, incluimos SIMCE, Conocimiento Profundo y Conocimiento sobre la Enseñanza, lo más relevante parece ser el Conocimiento Profundo del profesor ($p = 0.01$) junto con el SIMCE ($p = 0.03$).

Los resultados del análisis de las preguntas de las pruebas administradas a los alumnos y a los profesores son los siguientes:

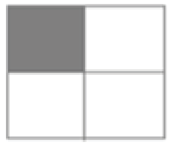
Prueba sobre Fracciones. Las preguntas que resultaron más fáciles de responder correctamente por los alumnos (> 80%), fueron las relativas a la categoría conocimientos previos, específicamente las de parte todo continuo y comparación de fracciones de un mismo todo con igual denominador. Las preguntas que resultaron más difíciles (20% a 50%) fueron las relativas a la categoría comprensión de las fracciones, específicamente las de mayor dificultad fueron las relativas a ubicar fracciones en la recta numérica (medida), comparar fracciones con distinto denominador (medida) y las de parte todo discreto. A continuación se presentan cuatro ejemplos de preguntas.

La pregunta 5 de la prueba sobre fracciones (tabla 29) relativa al subconstructo parte todo continuo, la responden correctamente el 90% del total de los alumnos de 4° grado.

Tabla 29

Pregunta 5 Prueba sobre Fracciones para los alumnos

Observa la siguiente figura:



¿Qué fracción de la figura está pintada de negro?

a. $\frac{1}{4}$

b. $\frac{1}{3}$

c. $\frac{3}{4}$

La pregunta 6 de la prueba sobre fracciones (tabla 30) relativa a comparar fracciones con igual denominador, la responden correctamente el 84% del total de los alumnos de 4° grado.

Tabla 30

Pregunta 6 Prueba sobre Fracciones para los alumnos

Juan reparte un chocolate, él comió $\frac{2}{3}$ y su hermano comió $\frac{1}{3}$ del chocolate, ¿qué frase es correcta?

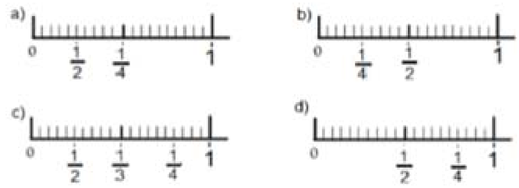
a. Juan comió tanto chocolate como su hermano.
b. Juan comió más chocolate que lo que comió su hermano.
c. Juan comió tres veces más chocolate que lo que comió su hermano.

La pregunta 7 de la prueba sobre fracciones (tabla 31) relativa al subconstructo de medida, la responden correctamente el 35% del total de los alumnos de 4° grado.

Tabla 31

Pregunta 7 Prueba sobre Fracciones para los alumnos

¿En qué caso están bien ubicadas las fracciones en la recta numérica?



La pregunta 8 de la prueba sobre fracciones (tabla 32) relativa al subconstructo operador, la responden correctamente el 28% del total de los alumnos de 4° grado.

Tabla 32

Pregunta 8 Prueba sobre Fracciones para los alumnos

Estos círculos representan $\frac{3}{4}$ de cierta unidad, ¿cuántos círculos forman la unidad?

a) 9
b) 12
c) 27
d) 36

Prueba sobre el Conocimiento Profundo. Las preguntas que resultaron más fáciles de responder correctamente por los profesores (>80%) fueron las relativas al subconstructo parte todo continuo. Las preguntas que resultaron más difíciles (20% a 50%) fueron las relativas a indicar números fraccionarios entre dos números, ubicar fracciones en la recta numérica y calcular la fracción de un número.

La pregunta 5 de la prueba sobre el Conocimiento Profundo (tabla 33) relativa a indicar números fraccionarios entre dos números (subconstructo de medida), la responden correctamente el 40% del total de los profesores de primaria.

Tabla 33

*Pregunta 5 Prueba sobre el Conocimiento Profundo**

Juan busca una fracción entre $\frac{7}{8}$ y 1, ¿qué frase es correcta?
a. Solo es posible encontrar una fracción entre esos números b. No la encontrará, puesto que entre $\frac{8}{8}$ es igual a 1 c. Muchas fracciones cumplen esa condición d. Ninguna de las anteriores

*Fuente: Modificado desde Rodríguez y Olfos (2018)

La pregunta 4, de la prueba sobre el Conocimiento Profundo (tabla 34) relativa a calcular la fracción de un número (subconstructo operador), la responden correctamente el 60% del total de los profesores de primaria.

Tabla 34

Pregunta 4 Prueba sobre el Conocimiento Profundo

La expresión “$\frac{3}{4}$ de 12”, equivale a:
a. Un cuarto de 3 doceavos b. Tres veces 4 doceavos c. 12 cuartos de tres d. Cuatro veces 12 tercios

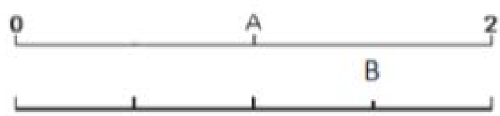
Prueba sobre la Enseñanza de las fracciones. Las preguntas que resultaron más fáciles de responder correctamente (70% a 90%) por los profesores fueron las relativas a identificar dificultades comunes de los estudiantes, seguidas por las de conocer estrategias utilizadas por los alumnos. Las preguntas que resultaron más difíciles (30% a 50%) fueron las relativas al conocimiento de errores comunes de los alumnos.

La pregunta 14 de la prueba sobre la Enseñanza de las fracciones (tabla 35) relativa a la categoría identificar dificultades comunes de los estudiantes, la responden correctamente el 90% del total de los profesores de primaria.

Tabla 35

*Pregunta 14 Prueba sobre la Enseñanza de las fracciones**

Aquí hay dos segmentos de recta numérica de 2 unidades de longitud cada una. En cada segmento las distancias entre las marcas son iguales. La profesora solicitó escribir la fracción representada por la letra B. Algunos alumnos escribieron 3/4. Ello puede deberse principalmente a que:



a. 3/4 de 2 es 3/2
b. La ubicación de A corresponde a 1
c. B está ubicado en las tres cuartas parte del segmento de recta dibujado
d. No me parece clara la pregunta

* Fuente: Modificado desde Rodríguez y Olfos (2018)

La pregunta 7 de la prueba sobre la Enseñanza de las fracciones (tabla 36) relativa a la categoría conocimiento de errores comunes de los estudiantes, la responden correctamente el 30% del total de los profesores de primaria.

Tabla 36

Pregunta 7 Prueba sobre la Enseñanza de las fracciones

Fernanda señala que las siguientes fracciones $\frac{2}{5}$ y $\frac{8}{11}$ son iguales. ¿Qué pudo llevar a Fernanda a tal conclusión?
a. Fernanda se equivocó en encontrar los denominadores comunes. b. Fernanda está agregando 6, tanto al numerador como al denominador de $\frac{2}{5}$, y ella ve que eso es igual a $\frac{8}{11}$. c. Pudo ser cualquiera de las dos ideas anteriores. d. Ninguna de esas ideas se relaciona con la conclusión de Fernanda.

4. Discusión y conclusiones del estudio 4

El presente estudio se enfocó en establecer en qué medida el Conocimiento Profundo y el Conocimiento sobre la Enseñanza de las fracciones del profesor, ajustados por las variables nivel socioeconómico (NSE) y nivel académico que alcanzan las escuelas en matemáticas (SIMCE), influyen sobre el conocimiento que alcanzan los alumnos en la conceptualización de las fracciones en cuarto grado. Se explora el conocimiento del profesor como factor explicativo del aprendizaje del alumno.

Los resultados de este estudio muestran que el NSE se correlaciona fuertemente y de forma significativa con el SIMCE ($r = 0.79$, $p = 0.0001$). En Chile, los alumnos de escuelas que tienen un mayor NSE, obtienen puntajes SIMCE significativamente más altos que los alumnos de escuelas que tienen un menor NSE (Mineduc, 2017, OCDE, 2018). Al comparar directamente las puntuaciones de las pruebas, los resultados se asocian con el NSE y el SIMCE. Tanto en Chile como en otros países en desarrollo, los alumnos con bajo NSE difícilmente puedan alcanzar rendimientos comparables con los alumnos de mejor NSE

(OCDE, 2016). Por lo tanto, para evaluar los resultados del aprendizaje de los alumnos utilizamos puntuaciones de Avance de aprendizaje por alumno, ya que son estimaciones más justas del crecimiento académico de los estudiantes (Mullens, Murnane y Willett, 1996).

En este estudio el puntaje SIMCE promedio se asocia significativamente con el puntaje promedio del Avance por alumno ($r = 0.21$, $p = 0.0001$, fig. 54) y además el puntaje promedio del Avance por alumno es significativamente mayor para el grupo del NSE alto ($p = 0.01$, fig. 55). Sin embargo, los resultados de esta investigación muestran que si comparamos al alumno en términos de Avance de aprendizaje, resulta que tanto los alumnos de NSE alto como los del NSE bajo aprenden y ese aprendizaje se asocia significativamente con el conocimiento profundo del profesor ($r = 0.25$, $p = 0.0001$, fig. 56), de hecho esa asociación va más allá de lo explicado por el SIMCE y el NSE. Aún ajustado por NSE y por SIMCE el conocimiento profundo del profesor hizo una diferencia ($p = 0.01$).

Los hallazgos de este estudio están en concordancia con las investigaciones que señalan que el conocimiento matemático para la enseñanza de los profesores se asocia significativamente y que influyen en el aprendizaje de los estudiantes. Por ejemplo, Harbison y Hanushek (1992) encuentran un efecto positivo entre el conocimiento matemático del profesor y el rendimiento de sus estudiantes en 4° grado; Hill et al. (2005) muestran que el conocimiento matemático para la enseñanza de los profesores se relaciona significativamente con el logro en matemáticas de los estudiantes de primer y tercer grado; Tchoshanov (2011) encuentra que el conocimiento matemático de los conceptos y las conexiones del profesor se asocia significativamente con el logro del estudiante; Tchoshanov et al. (2017) encuentran que la puntuación total de la prueba de conocimiento del contenido de los profesores se correlaciona de forma significativa con el rendimiento de los estudiantes.

Los resultados de los análisis de la prueba sobre Fracciones muestran que las preguntas que resultaron más difíciles de responder correctamente por los alumnos fueron las relacionadas con el subconstructo de medida, específicamente ubicar fracciones en la recta numérica, comparar fracciones con distinto denominador y las relacionadas con el subconstructo parte todo discreto. Lo que es concordante con lo que reporta la literatura, los estudiantes presentan dificultades al colocar fracciones en una recta numérica, al comparar fracciones y con actividades que requerían poner en práctica ideas matemáticas de fraccionamiento en cantidad discreta (Button, 2013; Cortina et al., 2012; Charalambous, Pitta-Pantazi, 2007; Fandiño, 2009; Godino, 2004; Hansen et al., 2017).

Los resultados del análisis de la prueba sobre el conocimiento profundo de las fracciones muestran que las preguntas que resultaron más difíciles de responder correctamente por los profesores fueron las relacionadas con el subconstructo de medida (indicar números fraccionarios entre dos números, ubicar fracciones en la recta numérica) y las relacionadas con el subconstructo operador (calcular la fracción de un número). Estos resultados muestran que los profesores presentan dificultades similares a las identificadas en los alumnos, lo que es concordante con lo que reporta la literatura (Jakobsen et al., 2014; Ma, 2010; Pinto y Ribeiro, 2013).

Los resultados de los análisis de la prueba sobre la enseñanza de las fracciones muestran que los profesores no tienen dificultad en reconocer las estrategias y dificultades comunes que tienen los estudiantes, pero si tienen dificultades en dimensionar la naturaleza del error. Los resultados sugieren que los profesores no conocen el porqué de los errores comunes que cometen los estudiantes.

Así, las investigaciones existentes sobre el conocimiento del profesor, medido por pruebas, y su relación con el rendimiento de los estudiantes muestran una tendencia prometedora (Tchoshanov, 2011). Como indica el National Mathematics Advisory Panel (2008) al señalar que los resultados de pruebas administradas a los profesores constituirían una mejor medida de sus conocimientos matemáticos para la enseñanza, que los certificados de títulos y grados. Ya que una comprensión más detallada del conocimiento requerido para enseñar matemática solo puede emerger al enfocarse en temas matemáticos específicos (Pino-Fan et al., 2018). De esta forma el presente estudio constituye un aporte a la investigación sobre la relación entre el conocimiento del alumno y el conocimiento de los profesores.

La situación socioeconómica de la familia de los estudiantes es un factor importante que influye en el rendimiento escolar (Chaparro, González y Caso, 2016; Murillo y Román, 2008; OCDE, 2016, Tuñón y Poy, 2016). Sin embargo, en este estudio se muestra que independiente del NSE si se capacita al profesor de manera que tenga un conocimiento profundo sobre las fracciones se puede obtener el mejor avance por alumno. Es decir, si se prepara al profesor para que tenga un conocimiento conceptual e interconectado acerca de las fracciones (Rodríguez y Olfos, 2018) permitiría obtener el mejor avance de aprendizaje posible dado las condiciones basales de los estudiantes. Se sugiere a futuro, estudiar la relación en otras muestras y en otras poblaciones de profesores y seguir investigando sobre cómo diferentes tipos de conocimientos del docente se relacionan con el aprendizaje del estudiante.

Capítulo 4

Discusiones y Perspectivas

Índice del capítulo

Discusiones y Perspectivas

4.1 A modo de Resumen sobre el conocimiento del profesor como factor explicativo sobre el aprendizaje del alumno

El principal interés del presente trabajo de tesis fue avanzar en la identificación de tipos de conocimientos que requiere un profesor para realizar una enseñanza efectiva en matemáticas. El conocimiento que el profesor requiere para enseñar matemáticas en cuanto se asocia significativamente con el aprendizaje del alumno. A nivel nacional e internacional son pocos los estudios que han explorado el efecto del conocimiento del profesor sobre el aprendizaje de los alumnos. En general, estos estudios abordan una amplia gama de temas matemáticos, sin centrarse en un tema en particular. En la literatura no se reportan investigaciones que estudien el conocimiento del profesor como factor explicativo del aprendizaje de los alumnos, en fracciones. Desde la perspectiva de lo específico, el propósito del presente trabajo de tesis consistió en explorar el conocimiento del profesor como factor explicativo del conocimiento del alumno, centrándose en el tema de las fracciones. El estudio se enfocó en dos tipos de conocimientos del profesor: "conocimiento profundo" y "conocimiento sobre la enseñanza".

El trabajo se organiza en cuatro capítulos. A continuación se sintetizan los tres capítulos que anteceden. En el capítulo 1, se presenta el planteamiento de la investigación, en primer lugar se muestran los bajos resultados obtenidos por estudiantes chilenos en las pruebas de matemáticas TIMSS y PISA. En segundo lugar los bajos resultados de profesores tanto en pruebas nacionales Inicia como en pruebas internacionales TEDS-M, las cuales revelan que en Chile la formación inicial docente requiere mejorar para alcanzar estándares de calidad

(Avalos y Matus, 2010; MINEDUC, 2015). Los estudios internacionales reflejan marcadas diferencias entre los logros matemáticos de los estudiantes asiáticos y los occidentales; estas diferencias pueden ser atribuidas en parte a la influencia de los profesores.

En tercer lugar, en el capítulo 1 se muestran estudios relacionados con las dificultades que presentan estudiantes de primaria, estudiantes para profesor y profesores en servicio, sobre la conceptualización de las fracciones. Las investigaciones muestran que estudiantes para profesor y profesores en servicio presentan dificultades en fracciones asociadas a las identificadas en los alumnos. Estudios previos sugieren que el aprendizaje de las fracciones por parte de los alumnos, puede estar limitado por la comprensión de las fracciones por parte del profesor (Ma, 2010; Newton, 2008). En consecuencia resulta pertinente estudiar la influencia del conocimiento del profesor sobre el conocimiento del alumno en fracciones.

El objetivo general del estudio es determinar en qué medida estos conocimientos se constituyen en variables explicativas del conocimiento del alumno en 4° grado. La pregunta que guía este trabajo de tesis, en términos estadísticos es: ¿influye el conocimiento del profesor en el conocimiento de las fracciones en alumnos de cuarto grado, de establecimientos educacionales de las ciudades de La Serena y Coquimbo?

En el capítulo 2, en primer lugar se presenta el marco teórico de la investigación, partiendo con el trabajo de Shulman (1986; 1987) quien fue el primero en identificar tipos de conocimientos del profesor requerido para la enseñanza: CK, PCK y conocimiento curricular. En segundo lugar se presentan estudios que toman como sustento la conceptualización de Shulman, presentando los avances realizados por investigadores en la identificación de tipos de conocimientos requeridos para enseñar matemática (Ball et al., 2008; Carrillo, Climent et al., 2013; Hill et al., 2008; Krauss, 2007; Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005; Sánchez, 2011; Ma, 1999). En particular, en este trabajo de tesis se toma como sustento el modelo MKT de Ball et al. (2008) y Hill et al. (2008).

En tercer lugar, en el capítulo 2 se propone el constructo conocimiento profundo de las fracciones como un conocimiento conceptual y conectado (Ma, 2010; Tchoshanov, 2011; Tchoshanov et al., 2017) que incluye la comprensión de diferentes subconstructos que se manifiestan al concebir a la fracción como parte todo, cociente, operador y medida (Gallardo et al., 2008). Luego, se propone el constructo conocimiento sobre la enseñanza de las fracciones, el cual considera a) el conocimiento que tiene el profesor respecto del pensamiento de los alumnos; los errores comunes, dificultades, conocimientos adquiridos y estrategias utilizadas por los estudiantes (Hill et al., 2008), y además b) la orientación acerca de cómo se construye el conocimiento, que incluye las concepciones constructivistas y no constructivistas del profesor acerca del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas (Olfos et al., 2014). En cuarto lugar, se presentan estudios acerca del efecto del conocimiento del profesor sobre el rendimiento de los estudiantes, tanto en países desarrollados como en países en desarrollo (Baumert et al., 2010; Carnoy y Arends, 2012; Cueto et al., 2017; Marshall et al., 2009; Marshall y Sorto, 2012; Metzler y Woessman, 2012; Olfos et al., 2014; Tchoshanov, 2011; Tchoshanov et al., 2017). En base a estos estudios la autora se planteó como hipótesis que el conocimiento del profesor tendría un efecto sobre el conocimiento del alumno en fracciones. Finalmente, el capítulo presenta el marco conceptual del estudio: conocimiento profundo y conocimiento sobre la enseñanza.

En el capítulo 3, se presentan los cuatro estudios sobre fracciones que se realizaron para alcanzar los objetivos de esta tesis. En primer lugar se presenta el ESTUDIO 1, cuyo objetivo fue elaborar dos instrumentos con validez y confiabilidad aceptable, uno sobre el conocimiento profundo del profesor acerca de las fracciones y otro sobre el saber del profesor acerca del conocimiento que el alumno pone en juego al conceptualizar las fracciones en 4° grado. Este último instrumento no abarcó en su totalidad el conocimiento sobre la enseñanza, mencionado en el capítulo anterior. Los instrumentos fueron aplicados en dos oportunidades a grupos de 30 profesores de primaria y una vez a 20 estudiantes de la carrera de Pedagogía en Matemáticas. Finalmente se obtuvieron dos instrumentos, de 12 y 10 preguntas, con una consistencia interna de 0.74 y 0.75 alfa de Cronbach.

En segundo lugar se presenta el ESTUDIO 2, cuyo objetivo consistió en establecer en qué medida el conocimiento del profesor, mediado por el NSE de los alumnos, los conocimientos previos de los alumnos y el nivel de logros de la escuela en matemáticas (SIMCE), contribuye al conocimiento que alcanzan los alumnos en la conceptualización de las fracciones en cuarto grado. Mediante la técnica de análisis estadístico multinivel con dos niveles, alumno y escuela, se obtuvo información de 328 alumnos de 4º grado de 9 escuelas y de sus respectivos profesores de matemáticas. Los resultados muestran que de la variabilidad observada en la conceptualización de las fracciones, el 77% se podría atribuir a las variables de nivel del alumno mientras que el 23% restante a las variables de nivel de la escuela. El 38% de la varianza intra-escuela se explicaría por los conocimientos previos de los alumnos, y prácticamente toda la varianza entre-escuelas estaría explicada por SIMCE o bien en un 32% por el NSE. El conocimiento del profesor, solo o en combinación con otros factores, explica alrededor del 10% con una significación débil del 10%.

En tercer lugar, en el capítulo 3 se presenta el ESTUDIO 3 que tuvo por objetivo otorgar evidencias empíricas acerca del efecto del conocimiento del profesor sobre el aprendizaje de los alumnos en la conceptualización de las fracciones, en asociación con los conocimientos previos de los alumnos, NSE y SIMCE. A diferencia del estudio anterior el foco fue el aprendizaje medido por el avance de los alumnos. Mediante la técnica de análisis estadístico multinivel con dos niveles, alumno y escuela, se obtuvo información de 714 alumnos de 4º grado de 23 escuelas y de sus respectivos profesores de matemáticas. Los resultados indican que, de la variabilidad observada en la conceptualización de las fracciones por los alumnos, el 76% se podría atribuir al conocimiento previo de los alumnos y del 24% restante a las variables a nivel de la escuela. La varianza entre las escuelas estaría explicada en un 26% por el conocimiento del profesor, en un 8% por el nivel socioeconómico de la escuela. El nivel académico de la escuela no se muestra significativo en este estudio que se enfoca en el avance del alumno sobre el conocimiento de las fracciones como medida de aprendizaje.

En cuarto lugar, en el capítulo 3 se presenta el ESTUDIO 4 cuyo objetivo fue establecer en qué medida el conocimiento profundo del profesor acerca de las fracciones y el conocimiento sobre la enseñanza de las fracciones, ajustados por NSE y SIMCE, influye sobre el aprendizaje de los alumnos en la conceptualización de las fracciones en 4° grado. A diferencia de los estudios anteriores, se cambia la técnica estadística que es más sensible a muestras pequeñas. Mediante la técnica de análisis de regresión múltiple se analizó información de 378 alumnos de 4º grado de 9 escuelas y de sus respectivos profesores de matemáticas. Los resultados de los análisis de regresión muestran que el efecto conocimiento profundo del profesor es significativo en el aprendizaje por alumno ($p= 0.001$), más allá de lo explicado por el puntaje SIMCE del colegio, que también es significativo ($p=0.02$). El efecto de la dimensión Conocimiento sobre la Enseñanza no alcanza significación estadística al 5% al ser ajustada por SIMCE, el mejor ajuste.

4.2 Discusión de los hallazgos en relación a la literatura acerca del efecto del conocimiento del profesor sobre el aprendizaje del alumno

El primer aporte del presente trabajo de tesis corresponde a dos instrumentos que miden el conocimiento del profesor, uno que evalúa el conocimiento profundo del contenido acerca de las fracciones enmarcado en el currículo (Cprofu-F), y otro que evalúa el saber del profesor respecto al conocimiento que el alumno pone en juego al conceptualizar las fracciones en 4° básico (Cconceptua-F). Este resultado se obtuvo con el primer estudio, ESTUDIO 1 referido a elaboración de instrumentos con validez y confiabilidad aceptable (Alfa de Cronbach sobre 0.7).

El instrumento Cprofu-F mostró confiabilidad aceptable en las tres aplicaciones, por lo que no fue modificado para los estudios siguientes. Este resultado se acerca a los resultados de Ball (2008), que logró medir con éxito el CK de los profesores. En cambio, el instrumento Cconceptua-F, no mostró confiabilidad aceptable en su primera versión (alfa de Cronbach 0.6), este resultado es similar al de Ball y su grupo de investigación, quienes no lograron propiedades psicométricas aceptables para medir el KCS de los estudiantes (alfa de Cronbach 0.5). Al reflexionar respecto a las preguntas que presentaban mejor grado de dificultad y discriminación, advertimos que además de medir Cconceptua-F estas medían conocimiento profundo, lo que incidió en la adopción del marco conceptual del ESTUDIO 1. Finalmente, luego de administrar el instrumento Cconceptua-F a grupos de profesores, el instrumento muestra una confiablidad aceptable.

Este resultado muestra que es posible elaborar un instrumento con validez y confiabilidad aceptable de dos tipos de conocimientos del profesor relativo al conocimiento de las fracciones para la enseñanza (Rodríguez y Olfos, 2018). Este resultado también muestra que es posible elaborar un instrumento con validez y confiabilidad aceptable para medir el conocimiento de los alumnos en fracciones enmarcado en el currículo de 4° básico (Rodríguez y Navarrete, 2020).

El primer hallazgo de la presente tesis es la existencia de una asociación significativa entre el conocimiento del profesor y el conocimiento del alumno con respecto a las fracciones. La literatura ya mostraba que tanto el CK como el PCK del profesor tienen efecto sobre el aprendizaje en matemática del alumno (Baumert et al., 2010; Carnoy y Arends, 2012; Cueto et al., 2017; Marshall et al., 2009; Marshall y Sorto, 2012; Metzler y Woessman, 2012; Olfos et al., 2014; Tchoshanov, 2011; Tchoshanov et al., 2017). Sin embargo, todas estas investigaciones han abordado distintos temas matemáticos simultáneamente, sin enfocarse en uno específico.

Este primer hallazgo implicó una serie de acercamientos metodológicos: ampliación de la muestra, variación de técnicas multivariadas, y una reinterpretación de la variable dependiente. En términos específicos, con el ESTUDIO 2 se mostró que el conocimiento del profesor, solo o en combinación con otros factores, explica alrededor del 10% de la variabilidad en el postest (conocimiento de las fracciones) de los alumnos, con una baja significación, al 10%. El hallazgo de la baja asociación entre el conocimiento del profesor y la conceptualización del alumno en relación a las fracciones, es similar al encontrado en otro estudio que midieron el CK y PCK de los profesores en fracciones (Olfos et al., 2014). El resultado del ESTUDIO 2, podría estar explicado por el fenómeno de la segregación escolar en Chile (MINEDUC, 2017). Dado que este hallazgo, no establece una asociación significativa al 5%, se modificó la manera de medir el conocimiento de los alumnos utilizando puntuaciones en avance de aprendizaje (postest - pretest), lo que es coincidente con la estrategia utilizada por Mullens et al. (1996).

Con el ESTUDIO 3 se mostró que el conocimiento del profesor, solo o en combinación con otros factores, explica alrededor del 6% de la variabilidad total del avance de los alumnos, con una significación al 5%. Este hallazgo, es similar al encontrado por Hill et al. (2005), quienes advirtieron que dada la gran cantidad de varianza dentro de las aulas, sólo una pequeña cantidad de la varianza restante puede determinar el efecto del profesor (aproximadamente 8% para el primer grado y 2% para el tercer grado). Otro hallazgo similar fue encontrado por Harbison y Hanushek (1992), quienes advirtieron que: "En cuarto grado, una mejora de diez puntos en el promedio del conocimiento matemático del profesor… produciría un incremento de cinco puntos en el logro de los estudiantes; esto es equivalente a una mejora del 10% respecto de las puntuaciones medias de los estudiantes" (p. 114).

Con el ESTUDIO 4 se mostró que el conocimiento profundo del profesor se asocia significativamente con el Avance de aprendizaje de los alumnos ($r = 0.25$, $p = 0.0001$). El hallazgo de este estudio, es similar al encontrado por Tchoshanov (2011) quien muestra que el conocimiento de los conceptos y las conexiones del profesor se asocia significativamente con el rendimiento de los alumnos ($r = 0.26$, $p <0.01$). Este hallazgo del estudio, también es similar al encontrado por Tchoshanov et al. (2017), quienes obtuvieron una correlación positiva, débil pero significativa entre el conocimiento de los conceptos y las conexiones del profesor y el rendimiento del alumno ($r = 0.2295$, $p < 0.05$).

Con el ESTUDIO 4 se mostró que la correlación entre el Conocimiento sobre la Enseñanza del profesor y el puntaje promedio del Avance por alumno es positiva, débil pero significativa ($r = 0.17$, $p = 0.001$). Este hallazgo es muy parecido al encontrado por Cueto et al. (2017), quienes encontraron una correlación débil, positiva pero significativa entre el PCK de los profesores y el rendimiento estudiantil en matemáticas ($r = 0.17$, $p < 0.05$). Sin embargo, el efecto de la dimensión Conocimiento sobre la Enseñanza no alcanza significación estadística si ajustamos por SIMCE ($p = 0.09$). Al incluir en conjunto SIMCE, Conocimiento Profundo y Conocimiento sobre la Enseñanza, emerge el Conocimiento Profundo como la variable más explicativa ($p = 0.01$) y en segundo término el SIMCE ($p = 0.03$).

En síntesis, el ESTUDIO 2 mostró el poder explicativo del NSE y SIMCE y el bajo poder explicativo atribuible al profesor. Es decir, el ESTUDIO 2 muestra que los alumnos de colegios que obtienen mejor SIMCE y que presentan mejor NSE obtienen mejores resultados en la prueba de fracciones en 4° grado. Esto ha sido explicado por la alta segregación y escasa posibilidades que tienen las familias de bajo NSE para acceder a escuelas de alto rendimiento académico (MINEDUC, 2017). Los estudiantes sobre todo en países de alta segregación social no presentan las mismas condiciones iniciales en sus conocimientos, por lo que utilizar postest como variable dependiente no se muestra como una estrategia adecuada.

Mullens et al. (1996) señalan que el utilizar pretest para controlar el estado inicial y postest como variable dependiente, responde a la pregunta, ¿cuál es la relación entre el logro postest y los predictores seleccionados, si todos hubieran comenzado "iguales"? Así, Mullens et al. (1996) señalan que utilizar puntuaciones de Avance (postest - pretest) como variable dependiente es una estrategia que aborda la pregunta: ¿cuál es la relación entre el aprendizaje de los estudiantes y los factores predictivos seleccionados, como la formación y la experiencia de los profesores?, de esta forma las puntuaciones de avance son estimaciones más justas del crecimiento académico de los estudiantes.

Con el ESTUDIO 4 se mostró que la correlación entre cada tipo de conocimientos del profesor (conocimiento profundo y conocimiento sobre la enseñanza) y el Avance del alumno en su aprendizaje es estadísticamente significativo. Por otro lado, en el modelo de regresión lineal lo más relevante parece ser el conocimiento profundo entendido como: un conocimiento conceptual y conectado (Ma, 2010; Tchoshanov 2011; Tchoshanov et al., 2017). Tchoshanov (2011) señala que el tipo de conocimiento del contenido es importante como un factor explicativo del conocimiento del alumno, un profesor con conocimiento del contenido limitado solo a procedimientos matemáticos tiene menos oportunidad de influir sobre el éxito estudiantil que un profesor que conceptualmente entiende el tema. Este ESTUDIO 4 mostró resultados coincidentes con los de Tchoshanov et al. (2017), quienes sugieren que el conocimiento sobre los conceptos y las conexiones se muestra como un buen predictor de profesores exitosos, que impactan positivamente en el rendimiento de los estudiantes en matemáticas.

Así, las investigaciones para estimar el efecto del conocimiento matemático del profesor, medido por diferentes pruebas, sobre el logro en el aprendizaje del alumno muestran una tendencia prometedora (Tchoshanov, 2011; Tchoshanov et al., 2017).

4.3 Otros hallazgos de la investigación

Las dificultades de los alumnos en la prueba de fracciones recayeron preferentemente en el subconstructo de medida. Los análisis de resultados de la prueba sobre Fracciones administrada a los alumnos muestran que las preguntas que les fueron más difíciles correspondían al subconstructo medida (ubicar fracciones en la recta numérica, comparar fracciones con distinto denominador y las relacionadas con el subconstructo parte todo discreto). Lo que es concordante con los hallazgos reportados en la literatura, los estudiantes presentan dificultades al colocar fracciones en una recta numérica y al comparar fracciones (Button, 2013; Cortina et al., 2012; Clarke et al., 2007; Charalambous, Pitta-Pantazi, 2007; Fandiño, 2009; Godino, 2004; Hansen et al., 2017; Tunç-Pekkan, 2015).

Los resultados del análisis de la prueba sobre el conocimiento profundo de las fracciones, administrada a los profesores mostraron que las preguntas que fueron más difíciles para los profesores pertenecían al subconstructo de medida (indicar números fraccionarios entre dos números, ubicar fracciones en la recta numérica) y las relacionadas con el subconstructo operador (calcular la fracción de un número). Como puede observarse las dificultades tanto para profesores como para estudiantes están asociadas al mismo subconstructo, al de medida. Esto es concordante con lo que reporta la literatura (Jakobsen et al., 2014; Ma, 2010; Pinto y Ribeiro, 2013; Van Steenbrugge et al., 2014). En general, los estudios asociados a este tema revelan la falta de dominio sobre las fracciones por parte de los profesores, lo que también cuestiona la formación de los profesores de enseñanza primaria.

Los resultados de los items de la prueba sobre la enseñanza de las fracciones muestran que los profesores no tienen dificultad en reconocer las estrategias y dificultades comunes que tienen los estudiantes, pero si tienen dificultades en dimensionar la naturaleza del error. Los resultados sugieren que los profesores no conocen el porqué de los errores comunes que cometen los estudiantes.

4.4 Aportes y perspectivas futuras de la investigación

El presente trabajo de tesis constituye un aporte a la investigación sobre la relación entre el conocimiento del alumno y el conocimiento de los profesores, dado que se centra en las fracciones un tema muy complejo y de gran interés para la didáctica de la matemática, contribuyendo con evidencia empírica mostrando una correlación estadísticamente significativa entre los dos tipos de conocimientos del profesor (conocimiento profundo y conocimiento sobre la enseñanza) y el Avance de aprendizaje del alumno, en fracciones.

El presente trabajo de tesis constituye un aporte a la investigación relacionada con el estudio del efecto del conocimiento del profesor sobre el aprendizaje del alumno en fracciones, consolidando la importancia del profesor como agente que contribuye al aprendizaje de los estudiantes, contribuyendo con un estudio original que muestra que el efecto del conocimiento profundo del profesor es significativo en el aprendizaje por alumno ($p = 0.001$). El estudio muestra que el conocimiento profundo del profesor tiene potencial para llegar a contribuir a la construcción de un buen predictor del aprendizaje de los alumnos. Por ende se recomienda poner atención en el significado de "conocimiento profundo" utilizado en esta tesis en el proceso de formación de los profesores que enseñan matemáticas. De esta forma, el presente estudio se suma a un grupo de investigaciones que miden el efecto del CK sobre el aprendizaje del alumno en matemáticas (Harbison y Hanushek, 1992; Hill et al., 2005; Metzler y Woessman, 2012; Mullens et al., 1996; Tchoshanov, 2011; Tchoshanov et al., 2017).

En este trabajo se ha ratificado lo que informan las investigaciones, el hallazgo de la baja asociación entre tipos de conocimientos del profesor y el aprendizaje del alumno se debe a que existen múltiples variables que están afectando el proceso de aprendizaje. Motivo por el cual en este estudio el impacto real del profesor no supera el 10% corroborando lo que informan las investigaciones. En consecuencia, resulta necesario seguir investigando en otros factores u otras variables del profesor que pudiesen estar afectando el aprendizaje de los alumnos. También se recomienda estudiar el conocimiento profundo integrado con otros conocimientos sugeridos en la literatura, con el propósito de establecer en qué medida, este "conocimiento integrado", incide en el éxito del estudiante en matemáticas.

Referencias

Aguilar, A., Carreño, E., Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L., Escudero, D., Flores, E., Flores, P., Montes, M. y Rojas, N. (2013). En Actas de la VII CIBEM, El conocimiento especializado del profesor de matemáticas: MTSK (5063-5069). VII CIBEM. Uruguay.

Artigue, M. (1990). Epistemologie et didactique. Traducción por: María Fernanda Espitia Olaya. *Recherches en Didactique des Mathématiques. 10*(23), 241-286.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., y Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ávalos, B., C. Matus (2010). La formación inicial docente en Chile desde una óptica internacional. Informe Nacional del Estudio Internacional IEA-TEDS-M. Santiago: MINEDUC.

Backhoff, E., Larrazolo, N. y Rosas, M. (2000). Nivel de dificultad y poder de discriminación del Examen de Habilidades y Conocimientos Básicos (EXHCOBA). *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 2*(1). Recuperado de https://redie.uabc.mx/redie/article/view/15

Bailey, D. H., Siegler, R. S., & Geary, D. C. (2014). Early predictors of middle school fraction knowledge. *Developmental science, 17*(5), 775-785. doi: 10.1111/desc.12155

Ball, D.L. (1990). The Mathematical Understandings That Prospective Teachers Bring to Teacher Education. *The Elementary School Journal, 90*, 449-466. doi: 10.1086/461626

Ball, D. L. (2000). Bridging Practices: Prácticas Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of teacher education, 51*, 241-247. doi: 10.1177/0022487100051003013

Ball, D.L., Hill, H.C., y Bass H. (2005). Knowing Mathematics for Teaching. Who Knows Mathematics Well Enough To Teach Third Grade, and How Can We Decide? *American Educator*, 29, 14-17. Recuperado de http://hdl.handle.net/2027.42/65072

Ball, D., Thames, M., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. doi: 10.1177/0022487108324554

Ball, D. L. (2017). Uncovering the special mathematical work of teaching. *In Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education (pp. 11-34).* Springer, Cham. Recuperado de https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F978-3-319-62597-3_2.pdf

Barber, M. y Mourshed, M. (2007). Cómo hicieron los sistemas educativos con mejor desempeño del mundo para alcanzar sus objetivos. Buenos Aires: PREAL-McKinsey & Company. Recuperado de http://www.oei.es/historico/noticias/spip.php?article3077

Barber, M. y Mourshed, M. (2008). *Cómo hicieron los sistemas educativos con mejor desempeño del mundo para alcanzar sus objetivos.* Santiago de Chile: McKinsey y Company.

Bartau Rojas, I., Azpillaga Larrea, V., & Joaristi Olariaga, L.M. (2017). Metodología de enseñanza en centros eficaces de la Comunidad Autónoma del País Vasco. *Revista de Investigación Educativa, 35*(1), 93-112. doi: 10.6018/rie.35.1.225141

Baumert, Kunter, Blum, Brunner, Voss, Jordan, Klusmann, Krauss, Neubrand y Tsai (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal*, *47*(1), 133-180. doi: 10.3102/0002831209345157

Behr, M., Harel, G., Post, T. y Lesh, R. (1993). Rational numbers: toward a semantic analysis-emphasis on the operator construct. En T. Carpenter, E. Fennema y T. Romberg (Eds.), *Rational numbers: an integration of research* (pp. 13-47). Nueva Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., y Silver, E. A. (1983). "Rational numbers concepts", *in Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, eds R. Lesh and M. Landau (New York, NY: Academic Press), 91–125.

Block, D. y Solares, D. (2001). Las fracciones y la división en la escuela primaria: análisis didáctico de un vínculo. *Educación Matemática, 13*(2), 5-30.

Bolívar, A. (1993). "Conocimiento didáctico del contenido" y formación del profesorado: El Programa de Lee Shulman. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 16*, 113-124.

Bolívar, A. (2005). Conocimiento didáctico del contenido y didácticas específicas. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado, 9* (2), 1-39.

Bruns, B. y Luque, J. (2014). Profesores excelentes: cómo mejorar el aprendizaje en América Latina y el Caribe. Serie del Foro sobre Desarrollo de América Latina. Grupo Banco Mundial: Washington.

Butto, Z. C. (2013). El aprendizaje de fracciones en educación primaria: una propuesta de enseñanza en dos ambientes. *Revista de la Unidad de Educación de la Facultad de Ciencias Humanas y Sociales, 15(Horizontes Pedagógicos)*, 33-45

Byrnes, J. P. y Wasik, B. A. (1991). Role of conceptual knowledge in mathematical procedural learning. Developmental Psychology, 27(5), 777. doi: 10.1037/0012-1649.27.5.777

Cantón, I. (2004). Planes de Mejora en los Centros Educativos. Málaga: Aljibe.

Carnoy, M., y Arends, F. (2012). Explaining mathematics achievement gains in Botswana and South Africa. *Prospects Quarterly Review of Comparative Education, 42*(4), 453–468. doi: 10.1007/s11125-012-9246-6

Carpenter, T., Fennema, E. y Romberg, T. (Eds.). (1993). *Rational numbers: an integration of research.* Nueva Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 8) (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: Middle East Technical University, Ankara.

Cervini, R., Dari, N., Quiroz, S., y Atorresi, A. (2016). Maestro, aula y aprendizaje en América Latina. Los datos del SERCE. REICE. *Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación, 12*(2), 105-137.

Chaparro, A., González, C. y Caso, J. (2016). Familia y rendimiento académico: configuración de perfiles estudiantiles en secundaria. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 18*(1), 53-68. Recuperado de http://redie.uabc.mx/redie/article/view/774

Charalambous, C. Y. y Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in* Mathematics, 64(3), 293-316. doi: 10.1007/s10649-006-9036-2

Chevallard, Y. (1991). La transposición didáctica: *Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Clarke, D. M. y Roche, A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies in Mathematics, 72*, 127-138. doi: 10.1007/s10649-009-9198-9

Clarke, D., Roche, A. and Mitchell, A. (2007) Year six understanding. In J. Watson and K. Beswick (eds), Proceedings of the 30th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (Hobart: Merga), 207–216.

Climent N., Romero-Cortés J., Muñoz- Catalán M., Contreras L. (2013). ¿Qué conocimientos y concepciones movilizan futuros maestros analizando un video de aula?. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 16(1)*, 13 – 36.

Common Core State Standards Initiative. (2010). *Common Core State Standards for mathematics.* Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers. Recuperado de http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20 Standards.pdf

Cortina, J., Cardoso, E. y Zúñiga, C. (2012). El significado cuantitativo que tienen las fracciones para estudiantes mexicanos de 6o. de primaria. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 14*(1), 70-85. Recuperado de https://redie.uabc.mx/redie/article/view/297/460

Cueto, S., León, J., Sorto, M. A., y Miranda, A. (2017). Teachers' pedagogical content knowledge and mathematics achievement of students in Peru. *Educational Studies in Mathematics, 94*(3), 329–345. doi: 10.1007/s10649-016-9735-2

Davis, B., y Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics, 61*(3), 293–319. doi: 10.1007/s10649-006-2372-4

Depaepe, F., Torbeyns, J., Vermeersch, N., Janssens, D., Janssen, R., Kelchtermans, G., ... & Van Dooren, W. (2015). Teachers' content and pedagogical content knowledge on rational numbers: A comparison of prospective elementary and lower secondary school teachers. *Teaching and Teacher Education, 47*, 82-92. doi: 10.1016/j.tate.2014.12.009

Egodawatte, G. (2011). Secondary school students´misconceptions in Algebra. Departament of curriculum, Teaching and Learning. Tesis doctoral. Universidad de Toronto.

Escolano, R. y Gairín, J. M. (2005). Modelos de medida para la enseñanza de números racionales en educación primaria. UNIÓN *Revista Latinoamericana de Educación Matemática 1*, 17-35.

Eurycide (2013). *Key Data on Teachers and School Leaders*. (Eurydice Report. Luxembourg: Publications Office European Union). Recuperado de http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice/documents/key_data_series/151EN.pdf

Even, R. y Ball, D. L. (Eds.). (2009). *The professional education and development of teachers of mathematics. The 15th ICMI Study.* New York: Springer.

Fandiño, M. I. (2009). *Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos.* Bogotá: Magisterio.

Fazio, L., y Siegler, R. (2011). Enseñanza de las fracciones. Versión en español Quito, Ecuador: UNESCO (IBE).

Freundenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Países Bajos: Reidel Publishing Company.

Fuchs, L. S.; Schumacher, R. F.; Long, J.; Namkung, J.; Hamlett, C. L.; Cirino, P. T. ... y Changas, P. (2013). Improving at-risk learners' understanding of fractions. *Journal of Educational Psychology, 105*(3), 683-700. doi: 10.1037/a0032446

Fuchs, L. S.; Schumacher, R. F.; Sterba, S. K.; Long, J.; Namkung, J.; Malone, A.; ... y Changas, P. (2014). Does working memory moderate the effects of fraction intervention? An aptitude– treatment interaction. *Journal of Educational Psychology, 106*(2), 499-514. doi: 10.1037/a0034341

Gabriel, F., Coché, F., Szucs, D., Carette, V., Rey, B., y Content, A. (2013). A componential view of children's difficulties in learning fractions. *Frontiers in Psychology, 4*, 715. doi: 10.3389/fpsyg .2013.00715

Gallardo, J., González, J. y Quispe, W. (2008). Interpretando la comprensión matemática en escenarios básicos de valoración. Un estudio sobre las interferencias en el uso de los significados de la fracción. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(3), 355-382.

Garritz, A., y Trinidad-Velasco, R. (2004). El conocimiento pedagógico del contenido. *Educación química, 15*(2), 98-102.

Godino, J. (2004). Didactica de las matemáticas para maestros. Proyecto Edumat-Maestros. Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf

Gómez, P., & Gutiérrez-Gutiérrez, A. (2014). Conocimiento matemático y conocimiento didáctico del futuro profesor español de primaria. Resultados de estudio TEDS-M.

González, D. (2015). Errores comunes en el aprendizaje de las fracciones: Un estudio con alumnos de 12/13 años en Cantabria. Cantabria: Universidad de Cantabria.

Grossman, P.L., Wilson, S.M., y Shulman, L.S. (1989). Teachers of substance: Subject matter knowledge for teaching. In M. Reynolds (Ed.), The knowledge base for beginning teachers (pp. 23-36). New York: Pergamon.

Grossman, P., Wilson, S. y Shulman, L. (2005). Profesores de sustancia: el conocimiento de la materia para la enseñanza. Profesorado. *Revista de currículum y formación del profesorado, 9*(2), 1-24.

Guilford, J. P. (1975). *Psycometric methods* (2a. Ed.). Bombay, Nueva Delhi. Tata McGraw-Hll.

Hallett, D., Nunes, T. y Bryant, P. (2010). Individual differences in conceptual and procedural knowledge when learning fractions. *Journal of Educational Psychology, 102*(2), 395-406. doi: 10.1037/a0017486

Hallett, D., Nunes, T., Bryant, P. y Thorpe, C. M. (2012). Individual differences in conceptual and procedural fraction understanding: The role of abilities and school experience.

Journal of Experimental Child Psychology, 113(4), 469-486. doi: 10.1016/j.jecp.2012.07.009

Hansen, N., Jordan, N. C., y Rodrigues, J. (2017). Identifying learning difficulties with fractions: A longitudinal study of student growth from third through sixth grade. *Contemporary Educational Psychology, 50*, 45-59. doi: 10.1016/j.cedpsych.2015.11.002

Harbison, R. W., y Hanushek, E. A. (1992). Educational performance for the poor: Lessons from rural northeast Brazil. Oxford, England: Oxford University Press.

Hecht, S. A. y Vagi, K. J. (2010). Sources of group and individual differences in emerging fraction skills. *Journal of educational psychology, 102*(4), 843-859. doi: 10.1037/a0019824

Hecht, S. A. y Vagi, K. J. (2012). Patterns of strengths and weaknesses in children's knowledge about fractions. *Journal of Experimental Child Psychology, 111*(2), 212-229. doi: 10.1016/j.jecp.2011.08.012

Hill, H. y Ball, D. (2004). Learning mathematics for teaching: results from California's mathematics professional development institutes. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(5), 330- 351. doi: 10.2307/30034819

Hill, H. C., Rowan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American educational research journal, 42*(2), 371-406. doi: 10.3102/00028312042002371

Hill, H. C., Ball, D. L., y Schilling, S. G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and measuring teachers´ topic-specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39(4)*, 372-400.

Hill, H., Blunk, M., Charalambous, C., Lewis, J., Phelps, G., Sleep, L., y Ball, D. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and instruction, 26*(4), 430-511. doi: 10.1080/07370000802177235

Hill, H., Rowan, B., y Ball, D. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal, 42*(2), 371–406. Doi: 10.3102/00028312042002371

Jakobsen, A., Ribeiro, C. M. y Mellone, M. (2014). Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. *Nordic Studies in Mathematics Education, 19*(3-4), 135-150.

Jaworski, B., y Wood, T. (Eds.). (2008). *The international handbook of mathematics teacher education, volume 4. The mathematics teacher educator as a developing professional*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Informe, T. I. M. S. S. (2011). Estudio Internacional de Tendencias en Matemática y Ciencias. Resultados TIMSS 2011 Chile. Recuperado de http://portales.MINEDUC.cl/usuarios/acalidad/doc/201301151653440.Informe_Resultados_TIMSS_2011_Chile_(10-01-13).pdf

Informe, T. I. M. S. S. (2015). Estudio Internacional de Tendencias en Matemática y Ciencias. Resultados TIMSS 2015 Chile. Recuperado de http://www.revistadeeducacion.cl/wp-content/uploads/2016/11/TIMSS-PRESENTACION.pdf

Kaiser, G., Blömeke, S., Busse, A., Döhrmann, M., y König, J. (2014). Professional knowledge of (prospective) mathematics teachers–its structure and development. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, (15),* 83-99.

Kieren, T. E. (1976). "On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers," in Number and Measurement: Papers from a Research Workshop, ed R. Lesh (Columbus, OH: ERIC/SMEAC), 101–144.

Kieren, T. (1993). Rational and fractional numbers: from quotient fields to recursive understanding. En T. Carpenter, E. Fennema y T. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 49-84). Nueva Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum.

Krauss, S. (2007). Wie professionsspezifisch sind das fachdidaktische Wissen und das Fachwissen von Mathematiklehrkräften? Beiträge zum Mathematikunterricht bei der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik.

Krauss, S., Baumert, J., & Blum, W. (2008). Secondary mathematics teachers' pedagogical content knowledge and content knowledge: validation of the COACTIV constructs. *Journal ZDM, 40*, 873-892. doi: 10.1007/s11858-008-0141-9

Llinares, S., y Sánchez, M. V. (1998). Fracciones: la relación parte-todo. Sevilla: Sintesis.

Loc, N.P., Tong, D.H., y Chau, P.T. (2017). Identifying concept fraction of primary school students: the investigation in Vietnam. *Educational Research and Reviews, 12*(8), 531-539.

Lortie-Forgues, H., Tian, J., y Siegler, R. S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult?. *Developmental Review, 38*, 201-221. doi: 10.1016/j.dr.2015.07.008

Ma, L. (1999). Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Ma, L. (2010). *Conocimiento y enseñanza de las matemáticas elementales. La comprensión de las matemáticas fundamentales que tienen los profesores en China y los EE.UU*. Academia Chilena de Ciencias.

Mass, C., & Hox, J. (2005). Sufficient Sample Sizes for Multilevel Modeling. Methodology. *European Journal of Research Methods for the Behavioral and Social Sciences, 1*(3):86-92. doi: 10.1027/1614-1881.1.3.86

Marshall, J. H., Chinna, U., Nessay, P., Hok, U. N., Savoeun, V., Tinon, S., et al. (2009). Student achievement and education policy in a period of rapid expansion: Assessment data evidence from Cambodia. *International Review of Education, 55*(4), 393–413. doi: 10.1007/s11159-009-9133-4

Marshall J.H., y Sorto, M.A. (2012). The effects of teacher mathematics knowledge and pedagogy on student achievement in rural Guatemala. *International Review of Education, 58* (2), 173-197. doi:10.1007/s11159-012-9276-6

Martinez-Garrido, C., & Murrillo, F. J. (2014). Programas para la realización de Modelos Multinivel. Un análisis comparativo entre MLwiN, HLM, SPSS y Stata/Multilevel Analysis Software. A comparative study of MlwiN, HLM, SPSS and Stata. *REMA Revista electrónica de metodología aplicada, 19*(2), 1-24. Doi: 10.17811/rema.19.2.2014.1-24

McCullag, P. & Nelder, J.A. (1989). *Generalized linear models* (2ª ed.). Florida: Chapman and Hall.

McKinsey y Co. (2007). “Cómo hicieron los sistemas educativos con mejor desempeño del mundo para alcanzar sus objetivo”. Buenos Aires. Recuperado en abril 2012 desde http://mckinseyonsociety.com/downloads/reports/Education/Como_hicieron_los_sistemas_educativos.pdf

Metzler, J., y Woessmann, L. (2012). The impact of teacher subject knowledge on student achievement: Evidence from within-teacher within-student variation. *Journal of Development Economics*, 99(2), 486–496.

MINEDUC (2003). *Programa de estudio 4o. Básico Matemática 2003*. Chile: Autor. Recuperado de http://portales.MINEDUC.cl/index5_int.php?id_portal=47&id_contenido=17116&id_seccion=3

MINEDUC (2012). Informe sobre los resultados de la prueba Inicia 2012. Recuperado de: http://educacion2020.cl/sites/default/files/resultados_evaluacion_inicia2012.pdf

MINEDUC (2012) Matemática. Programa de Estudio Cuarto Año Básico Ministerio de Educación. Chile: Autor. Recuperado de http://www.curriculumenlineaMINEDUC.cl/605/articles-18979_programa.pdf

Ministerio de Educación. (2012). Bases Curriculares 2012. Matemática Educación Básica. Santiago de Chile: Ministerio de Educación.

MINEDUC (2015). *Evaluación Inicia presentación de resultados 2014*. Recuperado de http://www.MINEDUC.cl/wp-content/uploads/sites/19/2015/11/Presentaci%C3%B3n-Resultados-INICIA-2014.pdf

MINEDUC (2017). “Revisión de las políticas educativas en Chile desde 2004 a 2016”. Reporte Nacional de Chile. Chile: Autor. Recuperado de https://centroestudios.MINEDUC.cl/wp-content/uploads/sites/100/2017/06/CBR_MINEDUC-WEB.pdf

Moseley, B. J., Okamoto, Y. y Ishida, J. (2007) Comparing US and Japanese elementary school teachers’ facility for linking rational number representations. *International Journal of Science and Mathematics Education, 5*(1), 165–185. doi: 10.1007/s10763-006-9040-0

Mourshed, M., Chijioke, C., & Barber, M. (2012). Cómo continúan mejorando los sistemas educativos de mayor progreso en el mundo.

MT21 (2007). *Mathematic teaching in the 2st Century, The preparation gap: teacher education for middle school mathematics in six countries.* Michigan University.

Mullens, J. E., Murnane, R. J., & Willett, J. B. (1996). The contribution of training and subject matter knowledge to teaching effectiveness: a multilevel analysis of longitudinal evidence from Belize. *Comparative Education Review, 40*(2), 139-157. doi: 10.1086/447369

Murillo Torrecilla, F. J. (2008). Los modelos multinivel como herramienta para la investigación educativa. *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación, 1*, 45-62. Recuperado de https://revistas.javeriana.edu.co/index.php/MAGIS/article/view/3355

Murillo Torrecilla, F., y Hernández Castilla, Reyes (2011). Efectos escolares de factores socio-afectivos. Un estudio Multinivel para Iberoamérica. *Revista de Investigación Educativa, 29* (2), 407-427.

Murillo, F., y Martínez, C. (2018). Factores de aula asociados al desarrollo integral de los estudiantes: Un estudio observacional. *Estudios Pedagógicos, 44*(1), 181-205. doi: 10.4067/S0718-07052018000100181

National Mathematics Advisory Panel (2008). Foundations for success: Report of the task group on teachers and teacher education. Washington, DC: U.S. Department of Education.

Newton, K. J. (2008) An extensive analysis of preservice elementary teachers' knowledge of fractions. *American Educational Research Journal, 45(4)*, 1080–1110. doi: 10.3102/0002831208320851

OCDE (2009). *Política de educación y formación: Los docentes son importantes Atraer, formar y conservar a los docentes eficientes.* París, Autor. Recuperado de http://www.waece.org/enciclopedia/2/Los%20docentes%20son%20importantes.pdf

OCDE (2012). *Informe Técnico PISA*. París, Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos.

OCDE (2014). *Resultados de PISA 2012 en foco: Lo que los alumnos saben a los 15 años de edad y lo que pueden hacer con lo que saben*. París, Autor.

OCDE (2016). PISA *Estudiantes de bajo rendimiento: por qué se quedan atrás y cómo ayudarles a tener éxito.* París. Autor. Recuperado de http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA-2012-Estudiantes-de-bajo-rendimiento.pdf

OCDE (2018). *Evaluaciones de políticas nacionales de educación. Educación en Chile.* París, Autor, Recuperado de http://www.oecd-ilibrary.org/education/educacion-en-chile_9789264288720-es

Olfos, R., Goldrine, T., & Estrella, S. (2014). Teachers' pedagogical content knowledge and its relation with students' understanding. Revista Brasileira de Educação, 19(59), 913-944. doi: 10.1590/S1413-24782014000900006.

Olfos, R. y Guzmán, I. (2011) Dificultades en el aprendizaje de las fracciones y el conocimiento del profesor. Congreso Interamericano de Educación Matemática Recife, Brasil.

Olfos, R., Guzmán, I. y Galbiati, J. (2010). Conocimiento pedagógico del Contenido y su incidencia en la Enseñanza de la Matemática Nivel de Educación Básica (Informe Final Proyecto FONIDE N° F410980). Chile: MINEDUC.

Osana, H. P. y Pitsolantis, N. (2013). Addressing the struggle to link form and understanding in fractions instruction. British Journal of Educational Psychology, 83(1), 29-56. doi: 10.1111/j.2044-8279.2011.02053.x

Pardo, A., Ruiz, M.A. y San Martín, R. (2007). Cómo ajustar e interpretar modelos multinivel con SPSS. *Psicothema, 19*(2), 308-321.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., y Font, V. (2018). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education. 21*(1), 63-94. doi: 10.1007/s10857-016-9349-8.

Pinto, H. y Ribeiro, C. M. (2013). Conhecimento e formação de futuros professores dos primeiros anos - o sentido de número racional. *Da Investigação às Práticas, 3*(1), 85-105. doi: 10.25757/invep.v3i1.29

Printy, S. (2010). Principal´s influence on instructional quality: insights from US schools. *School Leadership and Management, 30*(2), 111-126. doi: 10.1080/13632431003688005

Rico, L. (1995). *Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Rittle-Johnson, B. y Schneider, M. (2014). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. En R. Kadosh y A. Dowker (Eds), *Oxford Handbook of Numerical Cognition.* Oxford University Press.

Rittle-Johnson, B., Schneider, M. y Star, J. R. (2015). Not a One-Way Street: Bidirectional Relations between Procedural and Conceptual Knowledge of Mathematics. *Educational Psychology Review*, 27(4), 587–597. doi: 10.1007/s10648-015-9302-x

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., y Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: an iterative process. Journal of Educational Psychology, 93, 346–362. doi: 10.1037//0022–0663.93.2.346

Rodríguez, P. (2012). *Medición del conocimiento profundo del profesor acerca de las fracciones y de su conocimiento acerca del saber del alumno en torno a las fracciones en 4º básico*. Tesis de magíster no publicada. Universidad Católica de Valparaíso. Valparaíso. Chile.

Rodríguez, P. de la C. y Olfos, R. (2018). Instrumentos consistentes para la enseñanza de fracciones en 4o. grado. *Revista Electrónica de Investigación Educativa, 20*(1), 48-58. doi: 10.24320/redie.2018.20.1.1358

Rodríguez, P. de la C. y Navarrete, C. (2020). Influencia del conocimiento profundo del profesor acerca de las fracciones sobre el aprendizaje de los alumnos en 4o grado. *Revista Electrónica de Investigación Educativa* (En prensa)

Rojas, N., Flores, P., y Carrillo, J. (2011). Caracterización del conocimiento matemático de profesores de educación primaria y secundaria. En M. Marín y N. Climent (Eds.) *Investigación en educación matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación* (pp. 395-400). XV Simposio de la SEIEM, Ciudad Real, España.

Rojas, N., Flores, P., y Carrillo, J. (2015). Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas de educación primaria al enseñar los números racionales. *Bolema, 29* (51), 143-167.

Rowland, T., Huckstep, P., y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*(3), 255-281. doi: 10.1007/s10857-005-0853-5

Salazar, M. C., Martinic, S. y Maz, A. (2011). Avances de una investigación sobre los modelos, representaciones y recursos utilizados por profesores de primaria para las fracciones. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011 (pp. 39-47).* Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, España.

Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education. *PNA, 5*(4), 129-145.

Sanz, I., Martín, R. (2014). El estudio TEDS-M de la IEA en el marco del Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE). En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación* Matemática *XVIII* (pp. 67-81). Salamanca: SEIEM.

Schmidt, W., Blömeke, S., & Tatto, M. (2011). *Teacher Education Matters. A Study of Middle School Mathematics Teacher Preparation in Six Countries*. Ann Arbor, MI: Inter-university Consortium for Political and Social Research.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15(2)*, 4–14. doi: 10.3102/0013189X015002004

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard educational review*, 57(1), 1-23. doi: 10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

Shulman, L. S. (2005). Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado, 9(2), 1-31.

Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., ... & Chen, M. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. *Psychological science, 23*(7), 691-697. doi: 10.1177/0956797612440101

Siegler, R. S., Fazio, L. K., Bailey, D. H., & Zhou, X. (2013). Fractions: the new frontier for theories of numerical development. *Trends in cognitive sciences, 17*(1), 13-19. doi: 10.1016/j.tics.2012.11.004

Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology, 62*(4), 273–296. doi:10.1016/j.cogpsych.2011.03.001

Socas, M. M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el enfoque Lógico Semiótico. *Investigación en educación matemática XI,* pp. 19-52.

Sorto, M., Marshall, J., Luschei, T. y Carnoy, M. (2009). Teacher knowledge and teaching in Panama and Costa Rica: a comparative study in primary and secondary education. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 12*(2), 251-290.

Stelzer, F., Andrés, M. L., Canet Juric, L., Introzzi, I., y Urquijo, S. (2016). Relaciones entre conocimiento conceptual y el procedimental en el aprendizaje de las fracciones. *Cuadernos de investigación educativa, 7*(1), 13-27.

Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education: a paradigm of developmental research.* Países Bajos: Kluwer.

Stylianides, A. J., y Ball, D. L. (2004). Studying the mathematical knowledge needed for teaching: The case of teachers' knowledge of reasoning and proof. Paper prepared for the 2004 Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Diego, CA.

Stylianides, A., y Stylianides, G. (2014). Viewing "mathematics for teaching" as a form of applied mathematics: Implications for the mathematical preparation of teachers. *Notices of the AMS*, *61*(3), 266-276.

Tatto, M.T. (Ed.). (2013). *The Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M): Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics in 17 countries. Technical report*. Amsterdam: IEA.

Tatto, M. T., Peck, R., Schwille, J., Bankov, K., Senk, S. L., Rodriguez, M., ... & Rowley, G. (2012). Policy, Practice, and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics in 17 Countries: Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-MM). International Association for the

Evaluation of Educational Achievement. Herengracht 487, Amsterdam, 1017 BT, The Netherlands.

Tchoshanov, M. A. (2011). Relationship between teacher knowledge of concepts and connections, teaching practice, and student achievement in middle grades mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 76*(2), 141-164. doi: 10.1007/s10649-010-9269-y

Tchoshanov, M., Cruz, M. D., Huereca, K., Shakirova, K., Shakirova, L., y Ibragimova, E. N. (2017). Examination of lower secondary mathematics teachers' content knowledge and its connection to students' performance. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*(4), 683-702. doi:10.1007/s10763-015-9703-9

Tian, J., y Siegler, R. S. (2017). Fractions learning in children with mathematics difficulties. *Journal of learning disabilities, 50*(6), 614-620. doi: 10.1177/0022219416662032

Torbeyns, J., Schneider, M., Xin, Z., & Siegler, R. (2015). Bridging the gap: Fraction understanding is central to mathematics achievement in students from three different continents. *Learning and Instruction, 37*, 5-13. doi: 10.1016/j.learninstruc.2014.03.002.

Tunç-Pekkan, Z. (2015). An analysis of elementary school children's fractional knowledge depicted with circle, rectangle, and number line representations. *Educational Studies in Mathematics, 89*(3), 419-441. doi: 10.1007/s10649-015-9606-2

Tuñón, I. y Poy, S. (2016). Factores asociados a las calificaciones escolares como proxy del rendimiento educativo. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, *18*(1), 98-111. Recuperado de http://redie.uabc.mx/redie/article/view/615

UNESCO. (2012). *Challenges in basic mathematics education*. United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization. Paris. Recuperado de http://unesdoc.unesco.org/images/0019/001917/191776e.pdf

Valdemoros, M. (2010). Dificultades experimentadas por el maestro de primaria en la enseñanza de fracciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4), 423-440.

Van Steenbrugge, H., Lesage, E., Valcke, M. y Desoete, A., (2014). Preservice elementary school teachers' knowledge of fractions: a mirror of students' knowledge? *Journal of Curriculum Studies, 46*(1), 138-161. doi: 10.1080/00220272.2013.839003

Varas, M. L., Lacourly, N. López Collazo, A. y Giaconi, V. (2013). Evaluación del conocimiento pedagógico del contenido para enseñar matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias, 31* (1), pp. 171-187. doi: 10.5565/rev/ec/v31n1.857

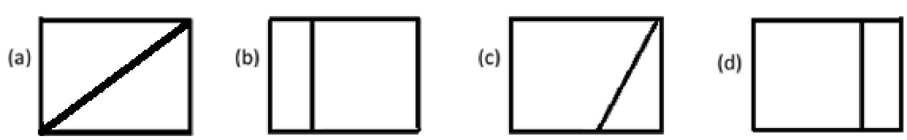
ANEXOS

Anexo 1. Prueba de conocimientos de los alumnos sobre fracciones

1. Susana hizo unas galletas con $\frac{1}{4}$ kg de harina y su mamá hizo pan con $\frac{3}{4}$ kg de harina, ¿qué frase es correcta?

a) Su mamá usó más harina que Susana.
b) Susana usó tanta harina como la mamá.
c) Susana usó el triple de la harina de la que usó su mamá.
d) Susana usó tres veces la harina de la que usó su mamá.

2. ¿En cuál de las figuras se dividió el rectángulo en dos mitades?



3. Si la tercera parte del dinero que tiene Mario es $ 30, ¿cuánto dinero tiene Mario?

a) $ 90 b) $ 60 c) $ 30 d) $ 10

4. José cortó un cordel en 4 trozos del mismo largo, ¿cuántos trozos necesita colocar, uno a continuación del otro, para obtener el largo total del cordel?

a) 3 b) 4 c) 5 d) 8

5. Observa la siguiente figura:

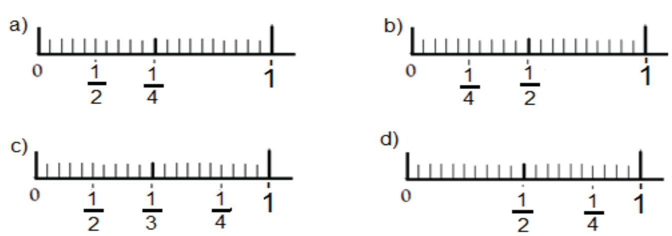
¿Qué fracción de la figura está pintada de negro?

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{3}{4}$

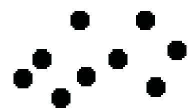
6. Juan reparte un chocolate, él comió $\frac{2}{3}$ y su hermano comió $\frac{1}{3}$ del chocolate, ¿qué frase es correcta?

a) Juan comió tanto chocolate como su hermano.
b) Juan comió más chocolate que lo que comió su hermano.
c) Juan comió tres veces más chocolate que lo que comió su hermano.

7. ¿En qué caso están bien ubicadas las fracciones en la recta numérica?



8. Estos círculos representan $\frac{3}{4}$ de cierta unidad, ¿cuántos círculos forman la unidad?



a) 9

b) 12

c) 27

d) 36

9. Si Juan comió la mitad de una pizza y su papá comió la otra mitad, ¿cuánta pizza queda?

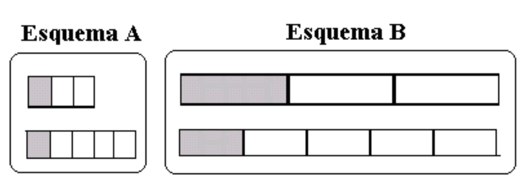
a) No queda pizza.

b) Queda la mitad de la pizza.

c) Quedan dos mitades de la pizza.

d) Queda la mitad de la mitad de la pizza.

10. ¿Qué relación se muestra correctamente en los esquemas?



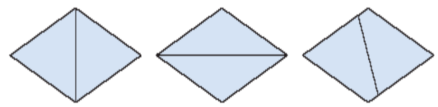
a) El esquema A muestra que $\frac{1}{3}$ es menor que $\frac{1}{5}$

b) El esquema A muestra que $\frac{1}{3}$ es igual a $\frac{1}{5}$

c) El esquema B muestra que $\frac{1}{3}$ es mayor que $\frac{1}{5}$

d) En ambos esquemas se muestra que $\frac{1}{3}$ es menor que $\frac{1}{5}$

11. ¿Cuál de las figuras se dividió de manera que cada trozo corresponda a $\frac{1}{2}$?



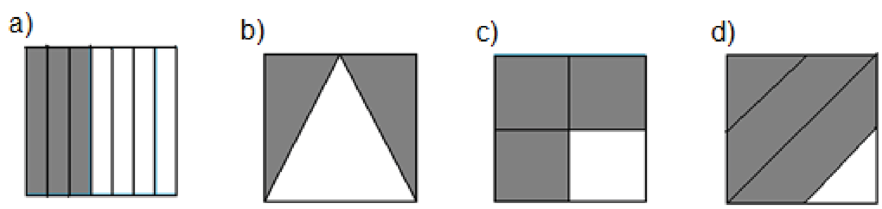
a) Sólo en el primer caso, en la figura de la izquierda.

b) Sólo en el segundo caso, en la figura del centro.

c) En el primer y segundo caso.

d) En los tres casos.

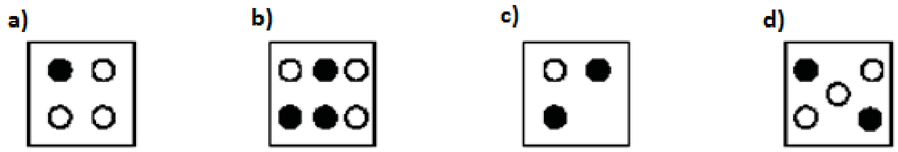
12. ¿En cuál de las siguientes figuras se han pintado de negro $\frac{3}{4}$ partes de ella?



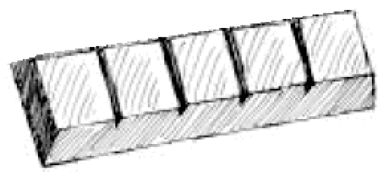
13. Un pastel fue cortado en 10 trozos de igual tamaño. Juan comió 3 trozos de pastel, ¿qué fracción del pastel comió Juan?

a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{3}{10}$ c) $\frac{3}{1}$ d) $\frac{10}{3}$

14. ¿En cuál de las siguientes figuras la mitad del total de los círculos son blancos?



15. Esteban recibió un chocolate como el dibujado y le dio a cada uno de sus tres hermanos un pedazo, ¿con qué fracción del chocolate se quedó Esteban?

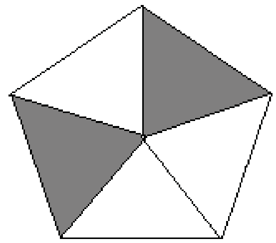


a) Dos tercios.
b) Dos cuartos.
c) Dos quintos.
d) Tres cuartos.

16. Pamela y Daniela comparten 3 chocolates en partes iguales, y sin que le sobre chocolate, ¿qué cantidad le toco a cada una?

a) Un chocolate a cada una.
b) Un chocolate y medio para cada una.
c) Un chocolate a cada una, y quedó el tercero.
d) Dos chocolates para Pamela y un chocolate Daniela.

17. Observa la siguiente figura:



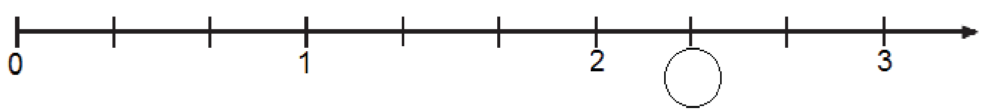
¿Qué fracción de la figura está pintada de negro?

a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{3}{2}$

18. Juan tiene 3 botellas de $\frac{1}{4}$ de litro de jugo, ¿cuántos litros de jugo tiene Juan?

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{4}$ c) 1 d) 3

19. Observa la siguiente figura:



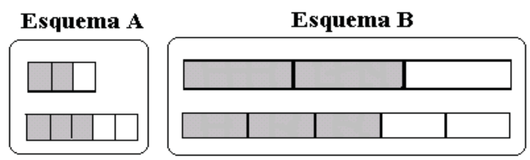
¿Qué número va en el círculo?

a) $2\frac{1}{3}$ b) $2\frac{1}{7}$ c) $\frac{1}{7}$ d) $\frac{7}{9}$

20. Si un kilo de peras vale $800, ¿cuánto valen tres kilos y medio? a) $ 2.400 b) $ 2.800 c) $ 3.200 d) $ 3.600
21. Juan tiene $\frac{3}{4}$ litro de jugo, si bebe $\frac{1}{4}$ litro del jugo, ¿cuánto jugo le queda? a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{2}{4}$ c) $\frac{4}{4}$ d) No le queda jugo.
22. Esteban dice que $\frac{1}{2}$ de torta es más que $\frac{1}{4}$ de torta, ¿está Esteban en lo correcto? a) Si b) No c) No estoy seguro

Anexo 2. Prueba sobre el Conocimiento Profundo de las fracciones

1. ¿Qué relación se muestra en los esquemas?



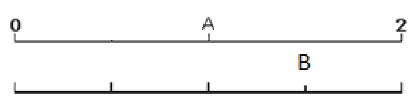
a) Sólo el esquema A muestra que 2/3 es menor que 3/5

b) Sólo el esquema B muestra que 2/3 es mayor que 3/5

c) El esquema A muestra que 2/3 es menor que 3/5 y B lo contrario

d) Ninguno de los esquemas muestra que 2/3 es menor que 3/5

2. Aquí hay dos segmentos de recta numérica de 2 unidades de longitud cada una. En cada segmento las distancias entre las marcas son iguales, ¿qué fracción corresponde a B?



a) $\frac{3}{4}$

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{3}{2}$

d) $\frac{4}{5}$

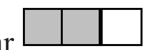
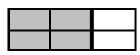
3. ¿Qué le parece la afirmación: "La fracción ¾ indica parte de la unidad. Cuando la unidad es 2, la expresión $\frac{3}{4}$ de 2 hace referencia a un número mayor que 1"? a) Correcta b) Contradictoria c) Ambigua d) Incorrecta
4. La expresión " 3/4 de 12", equivale a: a) Un cuarto de 3 doceavos b) Tres veces 4 doceavos c) 12 cuartos de tres d) Cuatro veces 12 tercios
5. Juan busca una fracción entre 7/8 y 1, ¿qué frase es correcta? a) No la encontrará, puesto que 8/8 es igual a 1 b) Solo es posible encontrar una fracción entre esos números c) Muchas fracciones cumplen esa condición d) Ninguna de las anteriores

6. María busca una fracción entre 1/5 y 1, ¿qué frase es correcta?

a) Es posible encontrar cuatro fracciones entre esos números
b) Tres fracciones cumplen esa condición
c) Muchas fracciones cumplen esa condición
d) Ninguna de las anteriores

---

7. ¿Cuál método no sirve para encontrar una fracción equivalente a 2/3?

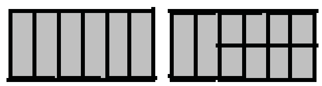
a) Represento 2/3 con una figura rectangular  . Luego, divido los rectángulos en dos partes iguales: 
b) Amplifico, multiplicando el numerador y el denominador de 2/3 por un mismo número entero positivo
c) Sumo a 2/3 una fracción equivalente a ella
d) Los tres métodos anteriores sirven

---

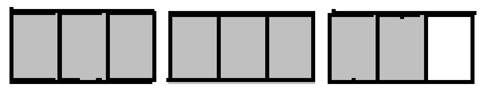
8. ¿Cuál método no sirve para encontrar una fracción equivalente a 3/5?

a) Represento 3/5 con una figura rectangular y luego, divido esta figura en dos partes iguales
b) Amplifico, multiplicando el numerador y el denominador de 3/5 por un mismo número entero positivo
c) Sumo a 3/5 una fracción equivalente a ella
d) Los tres métodos anteriores sirven

9. Tres niños se reparten un chocolate  en partes iguales. Ocho niños se reparten 2 chocolates iguales al anterior también en partes iguales, ¿qué esquema es apropiado para representar el reparto?



Esquema 1



Esquema 2

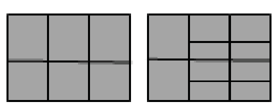
a) Sólo el esquema 1 es apropiado

b) Sólo el esquema 2 es apropiado

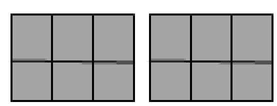
c) Ambos esquemas de arriba sirven para explicar el reparto.

d) Ninguno de los dos esquemas de arriba son apropiados.

10. Juan Ocho niños se reparten equitativamente 2 chocolates iguales, ¿qué esquema representa el reparto de los dos chocolates?



Esquema 1



Esquema 2

a) Sólo el esquema 1

b) Sólo el esquema 2

c) Ambos esquemas sirven para explicar el reparto

d) Ninguno de los dos esquemas es apropiado

Anexo 3. Prueba sobre la Enseñanza de las fracciones

1. La profesora Sofía ya abordó el concepto de fracción y su representación, ¿qué secuencia consideras más apropiada para continuar? a) Proponer un desafío con fracciones equivalentes, definir la noción de equivalencia continuado con tareas de aplicación. b) Definir la noción de equivalencia apoyándose en un ejemplo, proponer un problema que involucre a las fracciones equivalentes, continuado con tareas de aplicación. c) Cualquiera de las dos secuencias anteriores. d) Ninguna de estas secuencias es apropiada para continuar.
2. Para enseñar las fracciones como parte de un todo, ¿qué le recomendarías a un profesor? a) Que le pida a sus estudiantes trozar papeles lustre de distintos colores. b) Que le pida a sus estudiantes doblar y pintar trozos de papeles de distintos tamaños y luego distintas formas. c) Que escriba y dibuje fracciones en la pizarra para explicárselos a sus alumnos. d) Que proponga actividades utilizando siempre la unidad del mismo tamaño y forma.

3. ¿Qué actividades utilizarías para que los alumnos aprendan a cuantificar cantidades usando fracciones en 4º básico?

a) Les mostraría cuatro lápices y les diría que dos de ellos corresponden a la fracción 1/2 o 2/4.
b) Les enseñaría distintas técnicas para representar las fracciones.
c) Les propondría distintas situaciones para que las exploren y discutan sus representaciones.
d) Les explicaría con ejemplos y luego les propondría varios ejercicios.

4. Si se plantea la siguiente pregunta a los alumnos de cuarto básico,

¿En cuál de las siguientes figuras está la mitad de los puntos sombreados?

¿Cuál será la alternativa errónea que más elegirán?

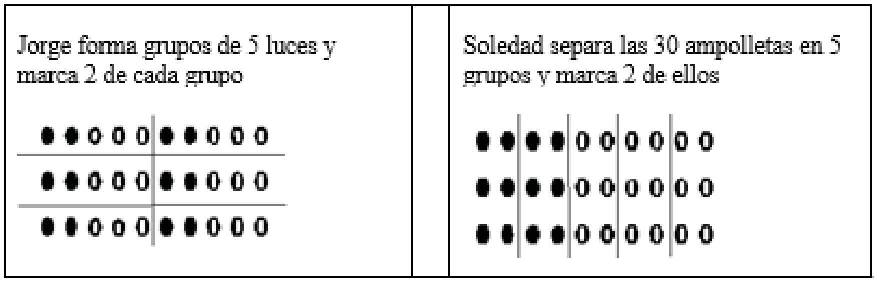
5. Dos profesores utilizan distintas estrategias para introducir el tema de las fracciones, ¿cuál le parece el más apropiado?

I. Repartir 5 chocolates entre dos niños y pedirle a sus alumnos que le expliquen cuanto le toca cada uno.

II. Explicar a los alumnos como se reparten 5 chocolates entre dos niños.

a) Solo I b)Sólo II c) I y II d) Ninguno

6. Dos alumnos de 4º básico enfrentan la siguiente situación en clases "En un árbol de pascua hay 30 luces. Del total, 2/5 son rojas. ¿Cuántas luces rojas hay?", ¿qué le parecen las estrategias?



a) La estrategia de Soledad es correcta, y no la de Jorge.
b) Ambas son incorrectas.
c) Ambas son correctas, pero la de Soledad es más eficiente.
d) Ambas son correctas, pero la de Jorge es más eficiente.

7. Fernanda señala que las siguientes fracciones 2/5 y 8/11 son iguales, ¿qué pudo llevar a Fernanda a tal conclusión?

a) Fernanda se equivocó en encontrar los denominadores comunes.
b) Fernanda está agregando 6, tanto al numerador como al denominador de 2/5, y ella ve que eso es igual a 8/11.
c) Pudo ser cualquiera de las dos ideas anteriores.
d) Ninguna de esas ideas se relaciona con la conclusión de Fernanda.

8. Laura y Andrés, alumnos de 4º básico, discuten la justificación de la regla: "para determinar si una fracción es mayor que otra, se verifica que el producto del numerador de la primera por el denominador de la segunda sea mayor que el producto entre el denominador de la primera y el numerador de la segunda", ¿quién justifica correctamente?

   Justificación de Laura: "La regla es válida porque en las fracciones propias el numerador es menor que el denominador"

   Justificación de Andrés: "Esa regla se obtiene de amplificar cada una de las fracciones por el denominador de la otra y constatar que se comparan los numeradores de fracciones de igual denominador"

   a) La de Laura.
   b) La de Andrés.
   c) Ambos dan argumentos incorrectos.
   d) En realidad, no sé bien qué argumento es correcto.

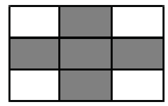
9. Dos alumnas de 4º básico discuten para determinar, ¿cuál de las siguientes fracciones es mayor si 2/3 o 3/5, ¿qué argumento es correcto?

   Argumento de Francisca: " 2/3 >3/5, porque 10 >9, usando la regla del producto cruzado"

   Argumento de Andrea: "Para determinar cuál es mayor, se amplifica cada una de las fracciones por el denominador de la otra y se comparan los numeradores de ambas fracciones"

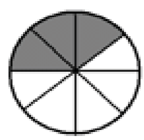
   a) Solo el argumento de Francisca es correcto.
   b) Solo el argumento de Andrea es correcto.
   c) Ambos argumentos son correctos.
   d) En realidad, no sé bien qué argumento es correcto.

10. Frente a la pregunta ¿Qué fracción de la figura está sombreada? Varios alumnos respondieron 5/4. Ello podría deberse a que:



a) Confunden el numerador con el denominador
b) No cuentan las celdas sombreadas al determinar el denominador
c) Se equivocan en los cálculos
d) No cuentan las celdas blancas al determinar el numerador

11. Frente a la pregunta ¿Qué fracción de la figura está sombreada? Varios alumnos respondieron 3/5. Ello podría deberse a que:



a) Se equivocan en los cálculos
b) No cuentan las partes blancas al determinar el denominador
c) Confunden el numerador con el denominador
d) No cuentan las partes sombreadas al determinar el denominador

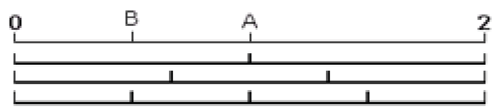
12. Catalina pide a sus alumnos que busquen diferentes estrategias para encontrar fracciones equivalentes a $\frac{1}{2}$. Uno de sus estudiantes realizó lo siguiente:

"$\frac{1+1}{2+2}$, lo que resulta $\frac{2}{4}$ que es equivalente a $\frac{1}{2}$ y este método siempre sirve, por ejemplo si a $\frac{2+2}{4+4}$ lo que resulta $\frac{4}{8}$ que es equivalente a $\frac{2}{4}$ y $\frac{1}{2}$"

¿Qué piensas acerca del método que utilizó el alumno?

a) El método sirve para algunos casos.
b) Su método resulta efectivo solo para este caso.
c) El método propuesto no es correcto.
d) El método funciona siempre.

13. Aquí hay 4 rectas numéricas. Cada segmento de rectas está dividido en partes iguales y cada uno de ellos tiene 2 unidades de longitud. La línea superior tiene las marcas B y A. La profesora solicitó escribir la fracción representada por la letra B. Algunos alumnos escribieron ¼. Ello puede deberse principalmente a que:



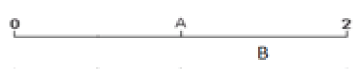
a) ¼ de 2 es ½

b) La ubicación de A corresponde a 1

c) B está ubicado en la cuarta parte del segmento de recta dibujado

d) No me parece clara la pregunta

14. Aquí hay dos segmentos de recta numérica de 2 unidades de longitud cada una. En cada segmento las distancias entre las marcas son iguales. La profesora solicitó escribir la fracción representada por la letra B. Algunos alumnos escribieron 3/4. Ello puede deberse principalmente a que:



a) 3/4 de 2 es 3/2

b) La ubicación de A corresponde a 1

c) B está ubicado en las tres cuartas parte del segmento de recta dibujado

d) No me parece clara la pregunta