

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas



**DIFICULTADES EN LA REPRESENTACIÓN
DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA
ANÁLISIS DESDE LA MIRADA DE LOS
REGISTROS SEMIÓTICOS**

**TRABAJO FINAL PARA OPTAR AL GRADO DE MAGÍSTER EN
DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA**

Por

Nola Nadia Labé Herrera

Dirigido por

Dra. María Soledad Estrella Romero

2014

ÍNDICE

<i>Agradecimientos</i>	3
Resumen	4
Abstract	5
Introducción	6
Capítulo I. Planteamiento del Problema de Investigación	
I.1 Antecedentes Relevantes	8
I.1.1 Ítems Analizados por el DEMRE	
I.1.1.1 Pregunta 29	9
I.1.1.2 Pregunta 32	9
I.2 Justificación	12
I.3 Preguntas de la Investigación	13
I.4 Objetivos de la Investigación	
I.4.1 Objetivo General	14
I.4.2 Objetivos Específicos	14
I.5 Hipótesis de la Investigación	14
Capítulo II. Estado del Arte	
II.1 Análisis Histórico Epistemológico	15
II.2 Análisis Matemático del Objeto Ecuación de la Recta	18
II.3 Revisión Literaria de otras Investigaciones	20
Capítulo III. Marco Teórico	
III.1 Registros de Representación Semiótica	22
III.2 Registros de Representación Semiótica	
del Objeto Ecuación de la Recta	23
Capítulo IV. Marco Metodológico	
IV.1 Tipo de Estudio	28
IV.2 Criterios de Selección de los Casos	28
IV.3 Instrumentos de Recolección de Información	
IV.3.1 Cuestionario	29
IV.3.1.1 Validación del Cuestionario	29

IV.3.2 Entrevista	29
IV.4 Recogida de Información	
IV. 4.1 Condiciones de Aplicación	29
IV.5 Análisis del Cuestionario	
IV.5.1 Análisis a priori	30
IV.5.2 Análisis de la Congruencia entre Registros	40
IV.6 Fases del Proceso Investigativo	49
Capítulo V. Análisis e Interpretación de los Resultados	
por Caso	
V.1 Caso 1	50
V.2 Caso 2.....	61
V.3 Caso 3	70
V.4 Caso 4	76
Capítulo VI. Conclusiones	84
Referencias Bibliográficas	86
Anexos	
Anexo 1: Cuestionario	89
Anexo 2: Entrevistas:	
2.1 Caso 1	95
2.2 Caso 2	102

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, agradecer a mi amada Ñuke (madre) Laura Herrera Herrera que con su paciencia, perseverancia, lucha sin descanso, fortaleza a prueba de todo, me enseñó que los sueños pueden ser reales en la medida que una lucha por ellos. Solo decirle chaltumay (gracias) por su apoyo incondicional y la enseñanza de vida que me entrega. Te quiero infinitamente mamá.

En segundo lugar, agradecer a mi hija Nadia Rivas Labé por su paciencia y apoyo incondicional, por la alegría que todos los días me entrega su existencia. Te amo hija

También agradecer a mis amigas incondicionales de tantos años y a mis nuevos amigos, compañeros del Magíster, por su paciencia, apoyo desinteresado y por alentarme cuando ya no me quedaban fuerzas. Gracias Solange Leyton, Mónica Carreño, Reinaldo Romero y Rodrigo Salazar.

Agradecer a mis profesores del Magíster, los cuales conmueven con la pasión de su entrega. A ellos que me enseñaron a ver el mundo de la educación matemática, ya no en blanco y negro, sino que en colores ampliando mi visión y alimentando la motivación y pasión que siento por mi profesión. En especial, agradecer a mi profesora guía por sus aportes y paciencia en este proceso. Gracias a todos, forman parte importante de mi historia.

Por sobre todos, mañum (agradecer) a Chaongchen, a la Ñukengchen, a mis Kuyfiche por el Newen y Kümün que me han entregado desde siempre.

*"Kintuán tañi ënkélén rakiduum.
Kintuán yeupau chi antë"*

*"Quiero trazar la recta de mis propios anhelos.
Y buscar simetría en las horas pasadas"*

RESUMEN

Esta investigación tiene por objetivo describir el proceso de conversión entre los registros algebraico y gráfico del objeto matemático, ecuación de la recta. A partir de la observación de las producciones de alumnos de Enseñanza Media, los cuales presentan dificultades en la comprensión al momento de abordar este objeto; situación que se evidencia en algunas investigaciones. Considerando lo anterior como punto de partida, se realiza un estudio sobre la problemática referida al aprendizaje de la geometría analítica escolar, específicamente ecuación de la recta, el análisis de esta dificultad podría permitir entender por qué se producen las deficiencias al representar en distintos registros el objeto matemático, y en qué momento del proceso se presentan.

Este trabajo se enmarca en los Registros de Representaciones Semióticas de Duval y corresponde a un estudio de casos múltiples realizado en un establecimiento educacional municipal de la comuna de Santiago.

ABSTRACT

The purpose of this research is to describe the process of converting between algebraic and graphic records of the mathematical object equation of the beeline. From observing the productions of High School students, who have difficulty in understanding when approaching this subject; situation is evident in some research. Considering this as a starting point, a study of the problems relating to the learning of the school analytic geometry, specifically equation of the line is done, the analysis of this difficulty could allow to understand why gaps occur in different registers to represent the mathematical object, and when the process is presented.

This work is part of the records of Duval Performances Semiotics and corresponds to a multiple cases study conducted in a municipal educational establishment in the municipality of Santiago.

INTRODUCCIÓN

La Educación Matemática presenta dificultades, así lo evidencian los resultados de algunas pruebas Internacionales y Nacionales. El último informe (2012) de la prueba PISA ubica a Chile en el lugar 51 de los 65 países que participan, con un puntaje promedio de 423 puntos, quedando a 71 puntos por debajo del promedio de la OCDE y a 149 puntos por debajo del mejor puntaje. Este informe también señala que en Matemática el 52% de los estudiantes chilenos no demuestra tener una base mínima de preparación para enfrentar los desafíos en la vida de una sociedad moderna.

Por otro lado, las pruebas estandarizadas (SIMCE y PSU) que se aplican en nuestro país, tampoco han tenido resultados que muestren mejoras sustanciales en el aprendizaje de la matemática. En el transcurso de la investigación se abordará con mayor profundidad este tópico.

En el aula se observa a menudo que el aprendizaje de un objeto matemático, resulta muy complejo para el alumno cuando se privilegia el uso y el tratamiento de una de sus representaciones. Esto sin duda genera obstáculos en el aprendizaje del alumno, pues el tratamiento debe ser en ambas direcciones y por lo menos articulando dos representaciones del objeto para que exista comprensión de este, como bien lo señala Duval.

Queda de manifiesto que existen problemas en el aprendizaje de la matemática por parte de los alumnos, algo sucede en el proceso de enseñanza que no les permite lograr la aprehensión del conocimiento matemático. Frente a estas dificultades la Didáctica de la Matemática, pretende dar respuesta a los problemas que se presentan en la enseñanza y aprendizaje de la disciplina, pues la ubica en un lugar central abordándola desde distintas miradas que entregan las teorías existentes. A partir de esto se lleva a cabo la presente investigación en didáctica de la matemática.

Este trabajo se compone de seis capítulos, los cuales consisten en:

En el capítulo I, se establece la existencia de la problemática referida al aprendizaje la geometría analítica escolar, particularmente la ecuación de la recta, que se observa tanto en nuestro país como en otros lugares donde se estudia la matemática. Esto queda de manifiesto en los distintos antecedentes que se entregan, tales como los resultados de la prueba estandarizada PISA que se aplica a nivel internacional, y donde Chile participa, además de otras que son aplicadas a nivel nacional, tales como el SIMCE y la PSU. Por otro lado, existen investigaciones que dan cuenta

de esta problemática, además de mi propia experiencia en el aula como docente. Estos antecedentes permiten plantear los objetivos y preguntas que guían esta investigación.

En el capítulo II, se realiza un análisis del objeto Ecuación de la Recta, primero desde lo histórico epistemológico para luego hacerlo desde la matemática misma, además de una revisión literaria de algunas investigaciones referidas al tema.

El capítulo III, hace referencia al Marco Teórico que sustenta esta investigación los Registros Semióticos de Raymond Duval y la mirada que este realiza del objeto ecuación de la recta. Este marco permite establecer y visualizar los criterios de congruencia, necesarios para determinar el grado de dificultad que presenta la conversión dependiendo del registro semiótico.

El capítulo IV señala la Metodología utilizada para llevar a cabo este trabajo. Definiendo el tipo de estudio, los criterios que se utilizaron para elegir los casos, los instrumentos usados para la recolección de la información, y cómo se llevo a cabo esta recogida de datos, además del análisis del instrumento realizado desde la perspectiva de la matemática y desde la mirada de los registros de representación semiótica. Posteriormente, se realiza una descripción de las distintas fases del proceso investigativo.

El capítulo V, se centra en el análisis e interpretación de los resultados obtenidos de las producciones de cada alumno. Este fue realizado bajo la mirada de los Registros Semióticos, el análisis a priori presente en el capítulo anterior y, en los Casos 1 y 2, considerando las afirmaciones hechas por ellos en la entrevista.

En el capítulo VI, se exponen las conclusiones que se obtienen a partir del análisis e interpretación de los resultados obtenidos en las producciones. Dando cuenta de las causas que originan los problemas que presentan los alumnos al realizar la conversión entre los distintos registros semióticos. Además de las reflexiones realizadas por la investigadora.

En los últimos apartado de este trabajo, se presentan las Referencias Bibliográficas y los Anexos.

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

I.1 ANTECEDENTES RELEVANTES

Chile participa de algunas pruebas internacionales que evalúa el desempeño de los estudiantes en diversas áreas, como la prueba PISA, la cual desde el año 2000 es desarrollada por la OCDE. Esta prueba evalúa las competencias de los estudiantes en: Lectura, Matemática y Ciencias. Este tipo de evaluaciones hace hincapié en la comprensión de los conceptos y en la capacidad para aplicarlos, es decir, está orientado a la evaluación de competencias para la vida, por lo tanto no solo se refiere al currículum.

En el último informe de los resultados de la prueba PISA (2012, p.37), Chile sube dos puntos, ubicándolo en el intervalo de puntuaciones correspondientes al nivel 2 de rendimiento, el cual señala: *"...los alumnos saben extraer información pertinente de una sola fuente y hacen uso de un único modelo representacional..."*, de acuerdo al texto, se podría inferir que los alumnos en Chile utilizan solo un registro para representar un objeto matemático.

A nivel nacional, las pruebas SIMCE¹ y PSU² entregan una visión de los resultados del aprendizaje de Matemática. El SIMCE de Matemática, es aplicado a Cuarto Básico, Sexto Básico, Octavo Básico y Segundo Medio. Esta evaluación tiene por objetivo *"evaluar el aprendizaje de los estudiantes en los contenidos y habilidades del currículum nacional"*, en esos niveles (Informe Técnico SIMCE 2012, p.5). En cambio la PSU es aplicada a estudiantes egresados de Enseñanza Media y mide los Contenidos Mínimos Obligatorios y las Habilidades adquiridas en los doce años de la enseñanza escolar (DEMRE, 2014).

El último informe de la Agencia de Calidad de la Educación (Resultados del SIMCE, 2013), señala que entre los años 2003 y 2013, los puntajes promedio del SIMCE Segundo Año Medio Matemática, ha experimentado un alza, subiendo entre estos años 20 puntos. Sin embargo, el puntaje promedio alcanzado en la última prueba del año 2013, fue de 267 puntos quedando a 83 puntos por debajo de los 350 puntos, que es el puntaje máximo para esta prueba. Lo cual indica que existen problemas en el

¹ Sistema de Medición de la Calidad de la Educación.

² Prueba de Selección Universitaria.

aprendizaje de la matemática. El informe con los análisis y resultados de cada curso es entregado directamente al establecimiento educacional.

I.1.1 Ítems Analizados por el DEMRE

Los siguientes ítems son aquellos que el DEMRE a publicado en los años 2011 y 2013 y son presentados tal cual como fueron aplicados.

I.1.1.1 Pregunta 29

En la publicación del documento N°9 del 1 de septiembre de 2011 de la PSU, (DEMRE, 2011) se plantea la resolución de la prueba de matemática del año 2010, en la que se comenta la siguiente pregunta correspondiente al eje temático de álgebra y funciones.

¿Cuál de los siguientes pares de ecuaciones se representan en el gráfico de la figura 1?

- A) $2y + x = 4$; $2y - x = 4$
- B) $2y - x = 2$; $2y + x = 2$
- C) $-2y - x = 2$; $-2y + x = 2$
- D) $2y + x = 4$; $-2y + x = 4$
- E) $y + 2x = 8$; $y - 2x = 8$

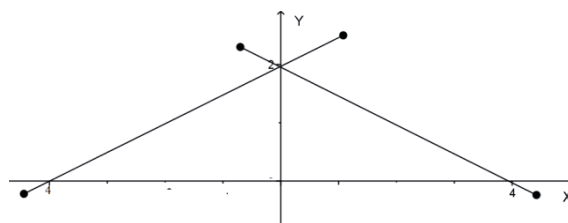


Figura 1

El contenido asociado a este ítem es ecuación de la recta. Para resolver la pregunta el alumno podría encontrar las ecuaciones de las rectas asociadas al gráfico de la figura. Además, debe recordar que la ecuación de una recta está dada por $y = mx + n$, donde m es la pendiente y n es su coeficiente de posición.

Las ecuaciones encontradas están en la opción A), la que fue seleccionada por el 25% de quienes abordaron la pregunta lo que indica que resultó difícil y su omisión fue de un 63%.

I.1.1.2 Pregunta 32

En la publicación del documento N°15 del 5 de septiembre de 2013 de la PSU, (DEMRE, 2013) se muestra la resolución de la prueba de matemática del año 2012, en la que se comenta la siguiente pregunta correspondiente al eje temático de álgebra y funciones.

¿Cuál(es) de los siguientes gráficos podría(n) representar a una ecuación de la recta de la forma $y = ax - 3$?

- A) Solo I
- B) Solo II
- C) Solo III
- D) Solo I y II
- E) Ninguno de ellos.

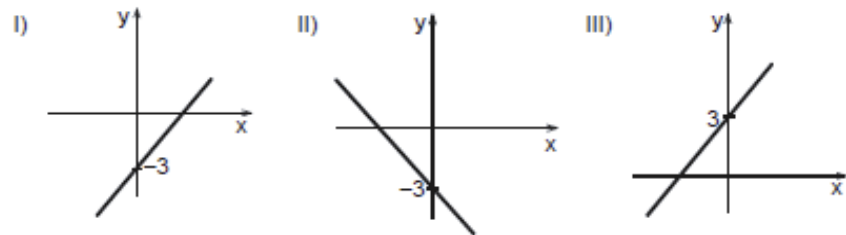


Figura 2.

Para resolver esta pregunta relacionada con la interpretación de la pendiente y del intercepto de una recta con el eje de las ordenadas en el sistema de ejes coordenados, el postulante podría identificar en la ecuación de la recta $y = ax + n$, que a es la pendiente y n es el coeficiente de posición.

La alternativa correcta es D) y fue seleccionada por un 21% de los postulantes que abordaron la pregunta, resultando ésta difícil con una omisión del 44%.

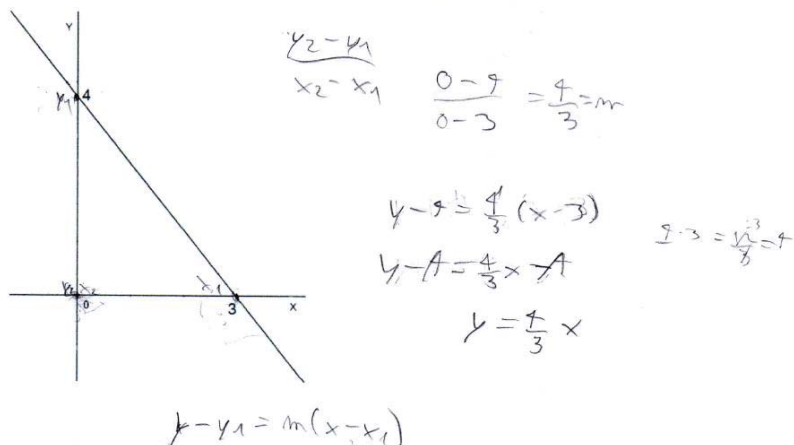
El distractor más escogido fue A) con un 24% de las preferencias, es posible que quienes optaron por él consideraran que el parámetro a solo puede ser positivo, concluyendo así, que solo la gráfica en I) podría representar la recta dada en el enunciado.

En general, de los ítems 29 y 32 presentados, llama la atención el bajo porcentaje de los postulantes que seleccionaron la opción correcta en cada caso, en promedio un 23% y el alto porcentaje de aquellos que omitieron estos ítems, alrededor de un 52%. De acuerdo a estos antecedentes se puede hipotetizar que los alumnos no lograron una comprensión del objeto matemático ecuación de la recta.

A nivel de aula se ha observado que los alumnos también presentan dificultades cuando abordan la ecuación de la recta. Las siguientes producciones 1 y 2, corresponden a dos alumnos del Tercer año de Enseñanza Media y la producción 3 corresponde a un alumno de primer año de Universidad. Los tres alumnos ya han estudiado la ecuación de la recta anteriormente. En ellas se pueden observar las dificultades que presentan para representar la ecuación de la recta.

Producción 1, Alumno de Tercer Año Medio:

3. ¿Cuál es la ecuación de la recta que representa el gráfico?



En la producción 1, el alumno no logra identificar ni relacionar el coeficiente de posición $n=4$, pendiente negativa ni los puntos que pertenecen a la recta, $(3,0)$ y $(0,4)$, por lo cual no establece correctamente la ecuación correspondiente a la recta.

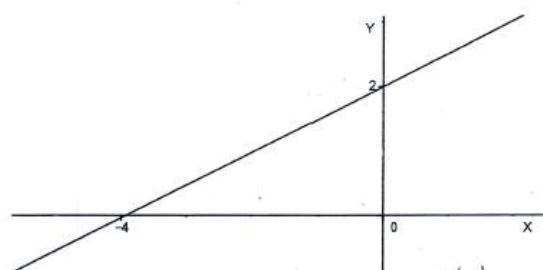
Producción 2 Alumno de Tercer Año Medio:



En la Producción 2, el alumno no identifica los datos que entrega la ecuación general de la recta transformándola a la ecuación principal, de esta solo relaciona el coeficiente de posición -3 con el punto de intersección $(0,-3)$ en el eje Y, en consecuencia no dibuja la recta correspondiente a esa ecuación.

Producción 3, Alumno de Primer Año de Universidad:

¿Cuál es la ecuación de la recta que representa el gráfico?



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 0}{0 - 4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

$\begin{matrix} x & y \\ (4, 0) \\ (0, 2) \end{matrix}$

$$y - y_1 = m(x - x_1) = y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 4)$$
$$y - 2 = -\frac{1}{2}x + 2$$
$$\frac{1}{2}x = 2 - y + 2$$
$$\frac{1}{2}x = -y + 4$$
$$0 = \frac{1}{2}x + y - 4$$

En la producción 3, el alumno no reemplaza correctamente uno de los puntos en la expresión algebraica que plantea, a pesar de que identifica bien los puntos de la gráfica, por lo que no determina la ecuación de la recta.

Desde estos tres ejemplos se pretende evidenciar los problemas que presentan los alumnos cuando se ven enfrentados a la ecuación de la recta.

I. 2. JUSTIFICACIÓN

A partir de los antecedentes expuestos, es menester estudiar la problemática referida al aprendizaje de la geometría analítica escolar, que se evidencia en los estudiantes de enseñanza media, específicamente el objeto ecuación de la recta, el tránsito entre su representación algebraica y gráfica, el cual se presume podría permitir una mejor comprensión de la introducción a la geometría analítica.

Actualmente, los resultados de las pruebas nacionales e internacionales, tales como PISA, SIMCE y PSU señalan que el alumno, presenta dificultades en su aprendizaje.

Por otra parte, existen investigaciones que dan cuenta de las dificultades que presentan los alumnos en el estudio de la geometría analítica (Gascón, 2002) o la representación de los objetos matemáticos, el cambio de registros algebraico y gráfico (D'Amore, 2006). Incluso, Duval (2004) señala que existe evidencia de que el alumno tiene que hacer un esfuerzo cognitivo mayor para transformar de un registro gráfico a un registro algebraico, pues a partir de la gráfica tiene que identificar aspectos propios de esta representación y expresarlos de forma simbólica o en una expresión algebraica. Más adelante se abordarán con mayor detención estas y otras investigaciones que evidencian estas dificultades.

Por otro lado, mi experiencia en aula me ha permitido observar que los alumnos presentan ciertas dificultades al estudiar ciertos conceptos de geometría analítica. Por ejemplo, dada una actividad de plantear una ecuación a partir de su gráfica, los alumnos no relacionan la pendiente con el sentido e inclinación de la recta, tampoco identifican el coeficiente de posición, como consecuencia no son capaces de realizar el planteamiento de la ecuación correspondiente a la recta.

Basados en los estudios anteriormente citados y la propia experiencia de la investigadora se puede inferir que existe una baja comprensión en el alumno cuando tiene que realizar un tratamiento³ en el mismo registro o al momento de representar la recta como una ecuación o en el plano cartesiano, es decir, cuando aborda contenidos de la geometría analítica.

Debido a lo anteriormente expuesto, cabe realizar las siguientes preguntas:

I. 3. PREGUNTAS DE LA INVESTIGACIÓN

¿Cómo los alumnos realizan el proceso de transformación entre las diversas representaciones de la ecuación de la recta?

³ En el sentido de Duval.

Específicamente, nos preguntamos:

1. ¿Cómo los alumnos realizan el proceso de transformación desde la representación gráfica a la representación algebraica de la ecuación de la recta? y,
2. ¿Cómo los alumnos realizan el proceso de transformación desde la representación algebraica a la representación gráfica de la ecuación de la recta?

I. 4. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

I.4.1 Objetivo General

Describir el proceso de transformación entre los registros algebraico y gráfico, del objeto matemático ecuación de la recta, observado en las producciones de alumnos de Enseñanza Media.

I.4.2 Objetivos Específicos

1. Describir el proceso de transformación desde el registro gráfico al algebraico, del objeto matemático ecuación de la recta, observado en las producciones de alumnos de Enseñanza Media.
2. Describir el proceso de transformación desde el registro algebraico al gráfico, del objeto matemático ecuación de la recta, observado en las producciones de alumnos de Enseñanza Media.

A partir de las preguntas y objetivos planteados se plantea la siguiente hipótesis:

I. 5 HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN

Los alumnos presentan dificultades en la transformación de los registros gráfico y algebraico.

CAPÍTULO II ESTADO DEL ARTE

II.1 ANÁLISIS HISTÓRICO EPISTEMOLÓGICO

El objeto matemático Ecuación de la Recta es un contenido perteneciente a la Geometría Analítica. Este objeto considera la unión de dos ramas de la matemática, el álgebra y la geometría. Por esto es que este análisis es realizado considerando la evolución de estas dos áreas, pero centrados en la ecuación lineal por un lado y la recta por el otro, hasta llegar a la ecuación de la recta. Para esto se consultaron los libros de Boyer (1999) y Bell (2011).

El origen del álgebra o de la geometría, ya sea el lugar o fecha, no está establecido, pero existen fuentes que dan cuenta de la presencia de estas en cierto periodo de la historia. El papiro de Ahmes es una fuente cuya información data de aproximadamente el año 2.000 a.C al 1.800 a.C. En este documento los egipcios plantean problemas que se pueden catalogar algebraicos, pues en ellos se pide resolver problemas con números desconocidos a los que se les denomina "*aha*" o *montón*, estos problemas actualmente podrían corresponder a una ecuación lineal con una incógnita. También aparecen problemas relativos a la geometría, que los egipcios utilizaban de forma práctica, pero ninguno que hiciera alusión a la recta.

Entre los años 2.000 a.C y 600 a.C, aproximadamente, existió en Mesopotamia la cultura babilónica. De esta época datan las tablas babilónicas, donde se plantean, lo que se podría catalogar como un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, "*el primer anillo de plata*" y el "*segundo anillo de plata*" refiriéndose a cada ecuación lineal del sistema. En lo referente a la geometría, ésta estaba enfocada en el cálculo de perímetros, áreas, volúmenes, pero no hay indicios que hicieran referencia a la recta. En esta civilización se desarrolló la geometría algebraica.

Tanto los egipcios como los babilónicos no se preocuparon de estudiar la matemática con fines puramente matemáticos, por lo que su desarrollo estuvo ligado con el uso práctico que le daban.

La evolución del mundo griego fue paulatino, absorbiendo la matemática que utilizaban las civilizaciones egipcias y mesopotámicas. Este desarrollo ocurrió más o menos entre en el 800 a.C y 800 d.C. Los griegos se destacan por los grandes aportes que hicieron al desarrollo de la geometría, relegando a un segundo plano el álgebra. En esta época quedaron planteados tres problemas geométricos imposibles de resolver con la construcción de regla y compás. Los matemáticos a través de los siglos trataron de dar respuesta a estos problemas, dando origen a nuevos descubrimientos matemáticos.

Los *Elementos* de Euclides, escrito hacia el 300 a.C, hace referencia a la línea recta en los postulados 1 y 2, donde se plantea que por dos puntos distintos pasa al menos una línea recta que no tiene puntos extremos (Boyer, 1999). Por otra parte, Apolonio de Perga (262 -190 a.C) en su trabajo sobre las *Cónicas*, estableció una propiedad, la cual fue de gran importancia siglos después para la creación de una nueva geometría: "...a partir del cono dedujo una propiedad plana fundamental que viene a dar una condición necesaria y suficiente para que un punto esté situado sobre la curva..." (Boyer, 1999. p.197). El método utilizado en su trabajo fue un poco más allá del álgebra geométrica que normalmente usaban los geómetras griegos en sus demostraciones, siendo la antesala de lo que hoy se conoce como geometría analítica. En esta álgebra geométrica de los griegos, no se consideran los números negativos, lo cual fue una limitante en el desarrollo de su geometría.

El álgebra originalmente no era expresada con el lenguaje y simbología que se conoce actualmente, en el álgebra sincopada (Diofanto) se usaban símbolos numerales en cambio en el álgebra retórica todo se expresaba con palabras. Esto da cuenta de los problemas que tuvieron los matemáticos a raíz de la falta de una simbología adecuada para representar una ecuación.

La cultura árabe también hizo grandes aportes a través de sus matemáticos, siendo el más destacado Mohammed Ibn Musa Al-Khowarizmi, el cual por el siglo IX, escribió muchas obras, pero la que se destaca es el *Al – jabr wa'l muqābalah* o como hoy se conoce *Álgebra*. En esta obra se aborda la resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas, además demostraciones geométricas similares a las observadas en el libro de Euclides, pero mejoradas en su demostración, aunque tenían una desventaja, estaba todo representado con palabras, es decir su álgebra era retórica. El álgebra árabe también tuvo influencia de los hindúes así como de las distintas culturas tanto griega como mesopotámica, entre otras. Después de los aportes de Al-Khowarizmi la evolución del álgebra se tornó lenta a través del tiempo, siendo la geometría la que tuvo mayores avances en su evolución.

Posteriormente, alrededor del año 1361, Oresme estableció los términos latitud y longitud, estos vienen a ser lo que hoy denominamos ordenada y abscisa, representándolos en una gráfica muy parecida al sistema de coordenadas. La diferencia con los matemáticos antiguos, que ya habían utilizado representaciones similares, es que él lo hizo con cantidades variables. Al respecto Boyer (1999) señala: "...Oresme subraya la propiedad que tiene su gráfica de un movimiento uniformemente acelerado, de tener pendiente constante", esto traducido a la geometría analítica actual correspondería a la ecuación de la recta que pasa por dos puntos. Siendo uno de los primeros indicios claros que se tiene del objeto matemático.

En los años siguientes, el álgebra fue experimentando transformaciones, haciéndola cada vez más simbólica y menos retórica.

Un aporte importante fue el realizado por Viète (1540-1603). Inventó un método para distinguir las magnitudes conocidas (con consonante) de las cantidades desconocidas (con vocales). Esto permitió establecer la diferencia entre parámetro y la idea de incógnita, Boyer (1999). A pesar de esta nueva forma de representar el álgebra, el matemático siguió para algunos casos utilizando un álgebra sincopada, lo que hacía complejo el desarrollo de sus trabajos para quienes no conocieran su lenguaje.

El época siguiente a la de Viète, es decir siglo XVII, ocurre un cambio en la forma de utilizar el álgebra en la geometría. Los mayores exponentes de esta época son Rene Descartes (1596-1650) y Pierre de Fermat (1601-1665).

Descartes en su libro "*La Géométrie*", plantea la forma de resolver un problema geométrico, expresándolo en una ecuación, para luego volver a la representación geométrica. Él solo considera valores positivos, pues se basaba en la geometría griega. Además no define ningún lugar geométrico en especial, no se observa que defina la ecuación de la recta.

Fermat, ayudó en la restauración del libro de Apolonio "*Lugares Planos*", tomando como referencia la *Colección Matemática* de Pappus. Producto de este trabajo es que descubre el principio fundamental de la geometría analítica, cuando afirma: "*siempre que en una ecuación final aparezcan dos cantidades incógnitas, tenemos un lugar geométrico, al describir el extremo de una de ellas una línea, recta o curva*" (Boyer, 1999. p.437). Luego, en el tratado "*Ad locos planos et solidos isagoge*" ("Introducción a los lugares geométricos planos y sólidos"), Fermat representa la ecuación lineal en un sistema de coordenadas.

Fermat representa una ecuación lineal, utilizando la notación de Viète en latín, "*D in A aequetur B in E*", lo que actualmente sería $Dx = By$. La gráfica corresponde a una semirrecta con origen en el origen de coordenadas, pues al igual que Descartes no utilizaba abscisas negativas, así lo señala Boyer (1999), sin embargo las representaciones gráficas más utilizadas fueron las perpendiculares, al contrario de Descartes que utilizaba generalmente las oblicuas.

Isaac Newton, matemático físico inglés nacido en 1642, fue quien usó por primera vez las coordenadas con valores positivos y negativos en sus trabajos. La recta dejaba de representarse como una semirrecta que partía de la intersección de los ejes horizontal y vertical, sino que se prolongaba infinitamente en ambas direcciones tomando valores positivos y negativos.

II.2 ANÁLISIS MATEMÁTICO DEL OBJETO ECUACIÓN DE LA RECTA

Para el análisis⁴ matemático del objeto matemático, se consideraron los autores: Lehmann (1995) y Murdoch (1968).

Teorema:

Toda recta en el plano E es la gráfica de una ecuación lineal en x e y .
Demostración

Sea L una recta en E y P_1 y P_2 tales que la recta L bisecte perpendicularmente al segmento P_1P_2

Por lo tanto L es el lugar geométrico de los puntos del plano P tales

$$*: P_2P_1 = P_1P_2$$

Por lo tanto, al considerar $P=(x,y)$ la condición dada en $*$ algebraicamente en la forma

$$\blacksquare: \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} = \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2}$$

Al desarrollar $\blacksquare$ se tiene que:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x_1x + x_1^2 + y^2 - 2y_1y + y_1^2 &= x^2 - 2x_2x + x_2^2 + y^2 - 2y_2y + y_2^2 \\ \Downarrow \\ 2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + (x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2) &= 0 \end{aligned}$$

Luego al llamar $a = 2(x_2 - x_1)$, $b = 2(y_2 - y_1)$ y $c = (x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2)$

llegamos a que P verifica la siguiente condición

$$ax + by + c = 0$$

Y a y b no pueden ser ambas $=0$, porque entonces tendríamos $x_2 = x_1$ y $y_2 = y_1$; esto es imposible porque $P_1 \neq P_2$ (ver Figura 3).

⁴ Las demostraciones fueron modificadas y actualizadas por la Docente Patricia Vásquez Magíster en Enseñanza de las Ciencias con Mención en Didáctica de las Matemáticas, PUCV.

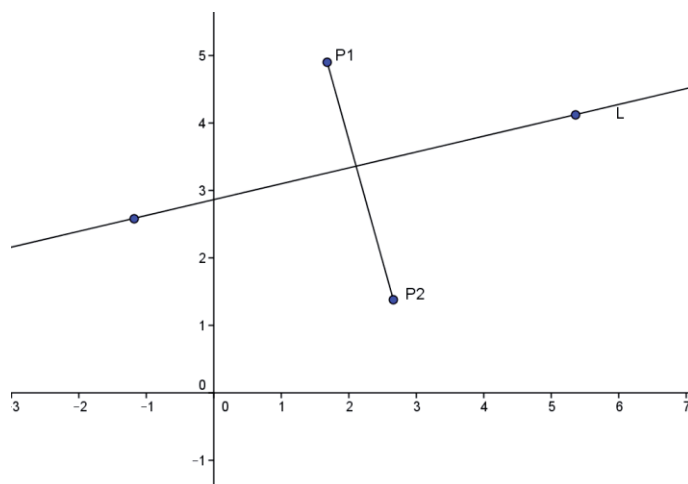


Figura 3

Ecuación de la recta

Teorema:

Si L no es vertical, entonces L es la gráfica de una ecuación de la forma

$$y = mx + k$$

Demostración.

La recta L es la gráfica de una ecuación

$$ax + by + c = 0$$

Aquí $b \neq 0$, porque para $b = 0$ la ecuación toma la forma $x = -c/a$ y la gráfica entonces, es vertical. Por lo tanto, podemos dividir entre b , obteniendo la ecuación equivalente

$$y = -\frac{ax}{b} - \frac{c}{b}$$

Esta tiene la forma deseada, con

$$m = -\frac{a}{b}, \quad k = -\frac{c}{b}$$

Pendiente

Teorema:

Si la recta L es la gráfica de $y = mx + k$ y (x_1, y_1) , (x_2, y_2) son dos puntos cualesquiera de la recta L , entonces

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$$

Demostración.

Puesto que ambos puntos están sobre la recta, tenemos

$$y_2 = mx_2 + k, \quad y_1 = mx_1 + k,$$

De donde,

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= mx_2 + k - mx_1 - k \\ y_2 - y_1 &= mx_2 - mx_1 \\ y_2 - y_1 &= m(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Con $x_2 \neq x_1$, porque la recta L no es vertical.

Luego

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$$

Por lo tanto, el número m está determinado únicamente por la recta. Se llama la *pendiente* de la recta.

II.3 REVISIÓN LITERARIA DE OTRAS INVESTIGACIONES

Como se analizó en el capítulo I, los resultados de diversas pruebas mencionadas y los problemas propuestos a los alumnos de enseñanza media, pueden dar luces sobre la existencia de la dificultad que los estudiantes presentan al momento de hacer una conversión entre los distintos registros, gráfico al algebraico y viceversa, también hay investigaciones que dan cuenta de esta problemática.

Gascón (2002), pone de manifiesto las dificultades que se generan cuando no existe una clara comprensión de la geometría analítica⁵ y de la importancia que tiene para dar solución a problemas de origen geométrico sintético⁶.

En el trabajo realizado por D'Amore (2006) se aborda el tema del cambio de registro basándose en la teoría de las representaciones semióticas de Duval, donde afirma que la representación de los objetos matemáticos sigue siendo una problemática importante. En este trabajo el autor se refiere como tema central, a la representación de los objetos matemáticos. ¿Cómo llegar desde el concepto a su construcción? No basta con definirlo y representarlo.

⁵Según Gascón (2002) la geometría analítica se sustenta en el álgebra lineal complementada con la geometría cartesiana.

⁶Según Gascón (2002) geometría sintética se sustenta en la geometría euclidiana de la Grecia antigua.

Kant citado por D'Amore (2006) manifiesta en su libro *La crítica de la Razón Pura* que: *"El conocimiento es resultado de un contacto entre un sujeto y un objeto de conocimiento..."*, se está refiriendo a que el conocimiento es fruto de la experiencia directa de los objetos matemáticos- suministrada por el contexto social- y el alumno, y cómo éste interioriza el mundo (capacidad de abstracción), para lo cual requiere utilizar diferentes registros de representación semiótica de los objetos.

Por otra parte, Torregrosa, G. y Quesada, H (2007), en su trabajo abordan la problemática de las representaciones semióticas y en cómo se pueden coordinar los distintos registros en geometría. Estos autores, basándose en las ideas de Duval, exponen que la formación de conceptos involucra una coordinación⁷ de sistemas de representación, por lo tanto, en matemática, los pasos estandarizados para la resolución de un ejercicio algorítmico (técnicas operatorias) no son suficientes, por tanto (Duval citado por Torregrosa & Quesada, 2007) *"...se deriva la gran importancia de la coordinación entre los distintos procesos de visualización y los cambios de representación en la actividad matemática..."* (p.288).

Otro estudio que se ha hecho en relación al álgebra es el realizado por Olfos, Silva y Soto (2005), los autores señalan que la educación chilena desarrolla las prácticas de enseñanza basada en métodos tradicionales centrada en la manipulación mecánica de los símbolos, donde los estudiantes aprenden a operar con expresiones algebraicas, pero no comprenden el sentido de estas ni las relaciones con los procesos de modelación (representación) necesarias para el proceso lógico matemático.

⁷ Disponer cosas metódicamente /Concertar medios, esfuerzos, etc., para una acción común. (RAE, 2001).

CAPÍTULO III

MARCO TEÓRICO

Para desarrollar el pensamiento matemático, la comprensión que se debe tener de los objetos matemáticos en la geometría analítica, puntualmente para la ecuación de la recta, es importante que los alumnos puedan representar de distintas maneras la ecuación de la recta, como por ejemplo partir de un registro gráfico y representarlo en uno algebraico o viceversa.

III.1 REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

El trabajo sobre los Registros de Representación Semiótica (RRS) desarrollado por Raymond Duval, señala que si no se tiene un buen manejo de las distintas representaciones, el estudiante no podrá comprender el objeto matemático.

Los Registros de Representaciones Semióticas de Duval, reconoce tres actividades cognitivas ligadas a la semiosis: la formación de representaciones, el tratamiento que corresponde a la transformación efectuada dentro de un mismo registro, y la conversión, transformación efectuada entre distintos registros.

La *formación* de representaciones en un registro implica la selección de signos apropiados dentro del conjunto de signos del mismo, combinados de acuerdo a sus reglas de conformidad. Estas reglas se refieren esencialmente a: la determinación de unidades elementales, las combinaciones admisibles de dichas unidades y las condiciones de pertinencia y completitud de una representación de orden superior, Duval (2004).

Los *tratamientos* están directamente vinculados a la propiedad fundamental de las representaciones semióticas: su transformación en otras representaciones del mismo registro.

Las *conversiones* son transformaciones externas al registro de partida en otros registros diferentes. Esta es una de las razones por las que "*...la conversión de las representaciones semióticas constituye la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la gran mayoría de los alumnos.*" (Duval, 2004, p.49). Sin embargo, resultan de vital importancia para el aprendizaje, puesto que la habilidad de efectuar conversiones favorece la coordinación de los distintos registros, algo necesario para la conceptualización de los objetos matemáticos.

Las conversiones que no son inmediatas, aquellas donde las *unidades significantes*, no están en correspondencia uno a uno, se denominan *no congruentes*. Este tipo de conversiones, requieren de especial atención en el proceso de enseñanza y aprendizaje y deben ser abordadas intencionalmente, así lo señala D'Amore, (2005):

Estos fenómenos de no congruencia constituyen el obstáculo más estable observado en el aprendizaje de la Matemática, a todos los niveles y en todos los dominios; [...] la conversión, en los casos de no congruencia, presupone una coordinación de los dos registros de representación movilizados, coordinación que nunca existe al inicio y que no se construye espontáneamente..." (p.32)

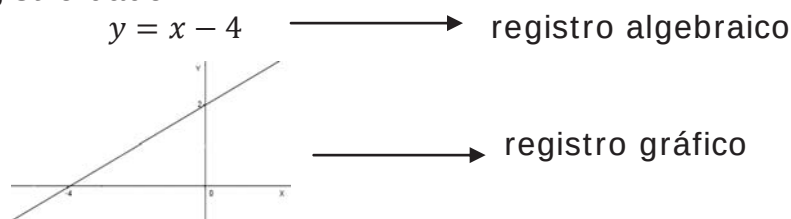
Sin embargo, no se debe confundir el objeto matemático con su representación, ya que, como lo menciona Duval (2004, p.14) "...tal confusión provocaría, a mediano o largo plazo, una pérdida de comprensión: los conocimientos adquiridos se hacen rápidamente inutilizables fuera de su contexto de aprendizaje...". Esta diferenciación, entre objeto y su representación son importantes y esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento siendo este el objetivo principal que persigue la RRS.

III. 2 REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA DEL OBJETO ECUACIÓN DE LA RECTA

Para efectos de esta investigación y considerando el objetivo principal, describir el proceso de conversión entre los registros algebraico y gráfico, del objeto matemático ecuación de la recta, observado en las producciones de alumnos de Enseñanza Media, solo se consideran dos tipos de registros de representación semiótica, el registro algebraico y el registro gráfico.

Duval (2004), establece que para que un registro sea un sistema de representación semiótica debe permitir realizar tres actividades cognitivas, en el caso del objeto, ecuación de la recta, estas son:

1. *Formación de una representación identificable* como una representación en un registro dado.



Esta debe permitir una actividad cognitiva ligada al manejo de los símbolos, es decir, debe permitir que el alumno pueda identificar rasgos, datos en el registro, por ejemplo al registro algebraico le correspondería: símbolos y letras.

En cambio, para el registro gráfico algunos elementos que permiten dibujar la recta son: los puntos que interceptan a los ejes coordenados, los ejes coordenados, la línea recta, entre otros.

En resumen, al representar una recta:

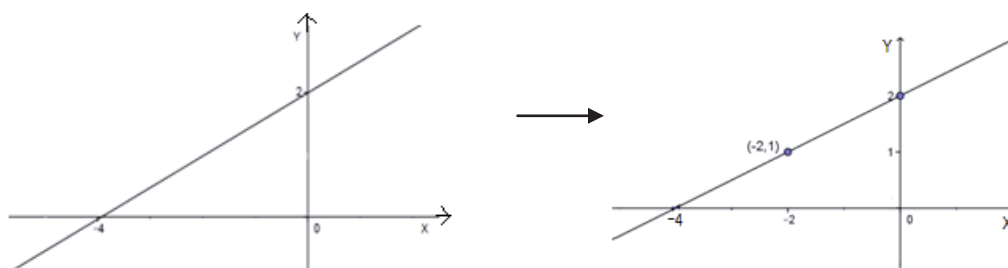
- a) en el registro gráfico se requiere, por ejemplo: que la recta intercepte el punto origen, la pendiente o dos puntos que pertenezcan a la recta.
- b) en el registro algebraico se requiere, por ejemplo: una ecuación de la forma $y = mx + n$, la pendiente m y el intercepto n .

2. El *tratamiento* es una transformación interna de un registro.

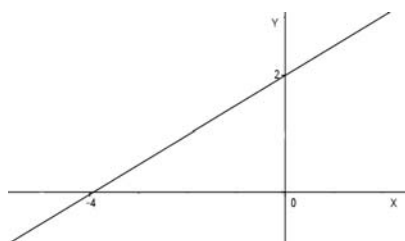
- a) en el registro algebraico un ejemplo es transformar la ecuación principal de la recta en la ecuación general de la recta.

$$y = x - 4 \quad \longrightarrow \quad x - y - 4 = 0$$

- b) en el registro gráfico un ejemplo de un tratamiento, es dar el valor de dos puntos y después dar otros puntos distintos que también pertenecen a la misma recta.



3. La *conversión* de una representación, es la transformación de una representación en otra representación. Duval dice que para que haya comprensión, aprendizaje de un objeto matemático, debe haber por lo menos coordinación de dos tipos de registro que se puedan vincular uno con el otro a través de la conversión.



registro gráfico



$$y = x - 4$$

registro algebraico

El conversión de una representación a otra es congruente si se cumplen tres condiciones, Duval (2004): correspondencia semántica entre las unidades significantes que las constituyen, igual orden posible de aprehensión en estas unidades en las dos representaciones, y convertir una unidad significativa en la representación de partida en una sola unidad significativa en la representación de llegada.

Fallando una de las tres condiciones anteriores (ver *Tabla 1*), ya no hay congruencia entre los distintos registros, y el grado de congruencia va a depender de si existe uno, dos, todos o ninguna de estas condiciones o criterios.

Tabla 1:

Criterios de Congruencia.

Criterios de Congruencia	Correspondencia Semántica	A cada unidad significativa de una de las representaciones, se puede asociar una unidad significativa elemental ⁸ .
	Univocidad semántica terminal	A cada unidad significativa elemental del registro de partida, le corresponde una única unidad significativa elemental en el registro de llegada.
	Conservación del orden de aprehensión	Presenta igual orden de aprehensión de las unidades significantes en las dos representaciones de los dos registros.

Nota Fuente: Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano*. Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía, p.53. Colombia.

⁸ "se considera como unidad significativa elemental toda unidad que depende del *léxico* de un registro", por ejemplo: "el conjunto de puntos cuyas ordenadas sea superior a la abscisa", en escritura algebraica: " $y > x$ ". En esta conversión existe una "correspondencia termino a término", por lo tanto "la conversión inversa permite volver a encontrar la expresión inicial del registro de partida". Duval (2004, pp. 50-53)

El autor declara que, si no hay congruencia en la conversión de los distintos registros, el aprendizaje del concepto matemático se torna complejo.

Para realizar la conversión de un registro a otro, es primordial que se definan las unidades significantes de cada registro (ver *Tabla 2*), así lo afirma Duval (1998): "...esta conversión exige que se discriminen bien las unidades significantes de cada registro, es decir, es necesario identificar bien en el registro gráfico las variables visuales pertinentes con sus diferentes valores, y en la escritura algebraica de una relación las diferentes oposiciones paradigmáticas que dan significación y no solamente un objeto a los símbolos utilizados..."

Tabla 2:

Unidades Significantes Elementales de cada registro.

		Unidades Significantes
Registros de representación semiótica para el objeto matemático ecuación de la recta	Algebraico Para este registro, la ecuación de la recta es representada por la ecuación principal $y=mx+n$ con $m \neq 0$ y la ecuación general de la recta $ax+by+c=0$ con $a \neq 0$.	Para la ecuación $y=mx+n$, las unidades serán: y, variable dependiente constante m, pendiente donde: $m < 0$ v $m > 0$ x, variable independiente n, coeficiente de posición y corresponde al valor de la ordenada y. Para la ecuación $ax+by+c=0$, las unidades serán: a, coeficiente de la variable independiente, x. b, coeficiente de la variable dependiente, y. c, constante de la ecuación

	Gráfico Para este registro, el objeto es representado por una línea recta en el plano cartesiano.	Eje X, eje horizontal. Eje Y, eje vertical. ordenada y del punto donde la recta intercepta al eje Y. Pendiente⁹ <i>Sentido e inclinación de la recta:</i> La recta asciende de izquierda a derecha, la pendiente es positiva. La recta desciende de izquierda a derecha, la pendiente es negativa.
--	--	--

Nota Fuente: Parte de la información de la *Tabla 2* fue desde Ospina 2012.

El mayor aporte de RRS en el aprendizaje de la matemática, es lograr que el alumno distinga el objeto matemático que hay detrás de las distintas representaciones y no lo confunda con su símbolo al utilizar distintos registros, en el sentido de que solo existirá noesis si hay semiosis. En el caso de la recta, no la confunda con sus representaciones, por ejemplo la gráfica o una expresión algebraica, sino que comprenda que es un conjunto infinito de puntos colineales con una única dirección, la cual puede ser representada por un gráfico o una ecuación algebraica.

⁹ "La referencia izquierda derecha es el sentido normal del recorrido visual de una página escrita en caracteres latinos" (Duval, 1992, p128)

CAPÍTULO IV MARCO METODOLÓGICO

IV. 1 TIPO DE ESTUDIO

La presente investigación corresponde a un estudio de casos múltiples, el cual está considerado dentro de la metodología cualitativa, dado que presenta un carácter subjetivo de los sujetos participantes e implica un proceso de indagación sistemática, comprensiva, detallada en profundidad en cada caso del objeto de estudio, examinando el fenómeno en su contexto real para que no exista ningún tipo de influencia por parte de la investigadora en la recolección de información. (Baptista, P., Fernández, C. & Hernández, R., 1997)

El principal enfoque de este estudio está dado desde el contexto educativo en el cual se encuentran los sujetos intervenidos, esto con el objeto de captar las experiencias y significados educativos entorno al registro algebraico y registro gráfico en su ambiente natural, sin intención de plantear generalizaciones al respecto, sino más bien poder reflexionar e interpretar como se da este fenómeno en su contexto propio.

Este estudio está centrado en torno a 4 casos, dos de los cuales fueron grabados con el objetivo de registrar los procesos, desarrollados por ellos, en la conversión de registros, la intervención de la investigadora consistió en realizar preguntas sobre la justificación del procedimiento que el estudiante realizó en cada ítems planteado del cuestionario. Los otros dos sujetos fueron supervisados directamente y sin intervención por parte de la investigadora. Por lo que es posible mencionar, que todos los casos estudiados se desarrollaron en base a la observación directa, para posteriormente analizar los registros escritos y video grabados de las producciones de los sujetos, permitiendo así extraer conclusiones para este estudio.

IV.2 CRITERIOS DE SELECCIÓN DE LOS CASOS

Considerando que esta es una investigación cualitativa, la muestra es no probabilística por conveniencia y está compuesta por 4 estudiantes: 2 alumnos de segundo año medio de 16 años cada uno y 2 alumnos de tercer año medio de 17 años cada uno.

Los alumnos son varones que ya han estudiado el objeto matemático ecuación de la recta. Los cuatro alumnos pertenecen a un establecimiento educacional municipal de la comuna de Santiago. Los alumnos de este

establecimiento, se caracterizan por tener un alto interés en seguir estudios superiores.

IV.3 INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN

IV.3.1 Cuestionario: Ecuación de la recta.

El cuestionario permite obtener información en profundidad y por tanto puede ser examinada detalladamente, pues el planteamiento de las preguntas están planteadas de forma que el alumno deba representar la recta, que se encuentra en el registro gráfico, en el registro algebraico, y viceversa.

IV.3.1.1 Validación del Cuestionario

El cuestionario fue validado por un grupo de expertos en el área de la educación matemática. Este se compone de: un Profesor de Matemática, Docente una universidad estatal y de un Liceo Emblemático; un Profesor de Matemática, Docente de un Liceo Emblemático; una Doctora en Didáctica de la Matemática, Docente Universitaria; una Profesora de Matemática Licenciada en Educación.

IV.3.2 Entrevista

Para efectos de la presente investigación, se utilizó la entrevista clínica individual semiestructurada¹⁰, de manera tal que el sujeto intervenido pudiera expresar su opinión frente a las preguntas formuladas por la investigadora, sobre el procedimiento realizado durante la aplicación del cuestionario "Ecuación de la Recta".

IV.4 RECOGIDA DE INFORMACIÓN

IV.4.1 Condiciones de Aplicación

Los instrumentos de evaluación fueron aplicados en los centros educativos por la investigadora, corresponden a un cuestionario de seis ítems y una entrevista clínica semiestructurada.

La aplicación de los instrumentos se realizó en una sala, la cual se preparó con antelación para dicho procedimiento, la investigadora se

¹⁰Este tipo de entrevista consiste en realizar "...preguntas básicas comunes para todos los sujetos, que se van ampliando y completando de acuerdo con las respuestas de los sujetos para poder interpretar lo mejor posible lo que van diciendo", Delval (2001)

preocupó previamente de tener materiales necesarios para escribir, que existiera una adecuada luminosidad, que existiese al menos una a dos sillas y que los sujetos intervenidos estuvieran cómodamente dispuestos durante la aplicación del cuestionario que fue realizado de forma grupal. Luego se realizó una video grabación de la entrevista a dos de los cuatro sujetos que componen este estudio de casos con la finalidad de obtener un registro visual de lo ocurrido durante la sesión, la cual tuvo una duración de 30 minutos aproximadamente.

IV.5 ANÁLISIS DEL CUESTIONARIO

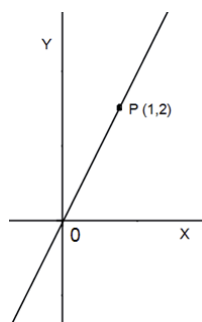
IV.5.1 Análisis A Priori

La instrucción para cada ítem del cuestionario señala:

En el siguiente ejercicio anota el desarrollo y el procedimiento realizado para obtener lo solicitado.

Se espera que el alumno anote los cálculos a realizar, las expresiones que van a utilizar, ya sea: ecuación principal, ecuación de la pendiente, ecuación general, ecuación de los segmentos o la expresión algebraica para determinar la ecuación de la recta dado un punto y su pendiente.

Pregunta 1: ¿Cuál es la ecuación de la recta que representa la gráfica?



El objetivo de esta pregunta es que el alumno logre plantear la expresión algebraica que corresponde a la ecuación de la recta que pasa por los puntos (1,2) y (0,0) que se observan en el gráfico cartesiano.

Considerando que la ecuación puede ser de la forma principal $y = mx + n$; o de la forma general $ax + by + c = 0$.

Estrategia 1: Representar la gráfica de la recta como la ecuación principal: $y = mx + n$, donde m es la pendiente y n el intercepto o coeficiente de posición.

Para determinar la pendiente calcula el cociente entre la ordenada 2 y la abscisa 1, es decir $m = 2$.

Luego identifica el valor del intercepto $n = 0$, la ordenada donde la recta intercepta al eje y .

Reemplazar estos valores en la ecuación principal, obteniendo:

$$y = mx + n$$

$$y = 2x + 0$$

$$y = 2x$$

A partir de esta ecuación puede obtener la ecuación general de la forma $2x - y = 0$

Estrategia 2: Utilizar la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$ para representar la gráfica de la recta. Para esta ecuación necesita la pendiente y un punto que pertenezca a la recta.

Calcula la pendiente de la recta con los puntos (1,2) y (0,0), reemplazando $x_1=1$, $y_1=2$ ^ $x_2=0$, $y_2=0$ en la expresión $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = m$, se obtiene: $\frac{2-0}{1-0} = 2$, es decir $m = 2$.

Luego, reemplaza un punto de la recta (x_i, y_i) y $m = 2$ en la ecuación $y - y_i = m(x - x_i)$, obteniendo la ecuación principal:

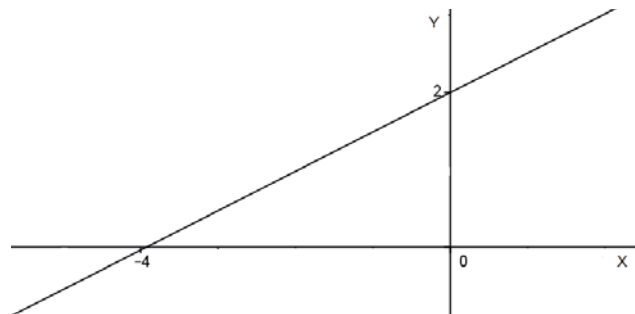
$$y - y_i = 2(x - x_i)$$

$$y = 2x - 2x_i + y_i$$

$$y = 2x$$

o puede expresar la ecuación de la forma general: $2x - y = 0$

Pregunta 2: ¿Cuál es la ecuación de la recta que representa la gráfica?



El objetivo de esta pregunta es que el alumno logre plantear la expresión algebraica que corresponde a la ecuación de la recta que pasa por los puntos (-4,0) y (0,2) que se observan en el gráfico cartesiano.

La ecuación puede ser de la forma principal $y = mx + n$ o de la forma general $ax + by + c = 0$.

Estrategia 1: Representa el gráfico como la ecuación principal de la recta: $y = mx + n$, donde m es la pendiente y n el intercepto o coeficiente de posición.

Calcula la pendiente de la recta con los puntos $(-4,0)$ y $(0,2)$, reemplazando $x_1 = -4$, $y_1 = 0$ $\wedge$ $x_2 = 0$, $y_2 = 2$ en la expresión: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$; de donde $\frac{2-0}{0-(-4)} = \frac{2}{4}$, es decir $m = \frac{2}{4}$ $\vee$ $m = \frac{1}{2}$.

Luego identifica el valor del intercepto $n = 2$, la ordenada, donde la recta intercepta al eje y .

Reemplaza estos valores en la ecuación principal, obteniendo:

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

o puede expresar la ecuación de la forma general:

$$\frac{1}{2}x - y + 2 = 0$$

Estrategia 2: Utilizar la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$ para finalmente representar la recta con la ecuación principal o general. Para esta ecuación necesita la pendiente y un punto que pertenezca a la recta.

Calcula la pendiente de la recta con los puntos $(-4,0)$ y $(0,2)$, reemplazando $x_1 = -4$, $y_1 = 0$ $\wedge$ $x_2 = 0$, $y_2 = 2$ en la expresión: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$; de donde $\frac{2-0}{0-(-4)} = \frac{2}{4}$, es decir $m = \frac{2}{4}$ $\vee$ $m = \frac{1}{2}$.

Luego reemplaza un punto de la recta (x_i, y_i) y $m = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ en la ecuación $y - y_i = m(x - x_i)$, obteniendo la ecuación principal:

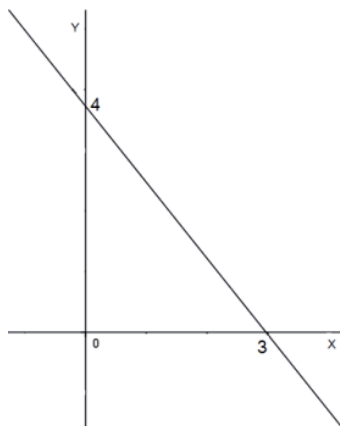
$$y - y_i = \frac{1}{2}(x - x_i)$$

$$y = \frac{1}{2}x + \left(-\frac{1}{2}x_i + y_i\right)$$

o puede expresar la ecuación de la forma general:

$$\frac{1}{2}x - y + \left(-\frac{1}{2}x_i + y_i\right) = 0$$

Pregunta 3: ¿Cuál es la ecuación de la recta que representa la gráfica?



El objetivo de esta pregunta es que el alumno logre plantear la expresión algebraica que corresponde a la ecuación de la recta que pasa por los puntos (0,4) y (3,0) que se observa en el gráfico cartesiano.

La ecuación puede ser de la forma principal $y = mx + n$ o de la forma general $ax + by + c = 0$.

Estrategia 1: Representar el gráfico como la ecuación principal de la recta: $y = mx + n$, donde m es la pendiente y n el intercepto o coeficiente de posición.

Calcula la pendiente de la recta con los puntos (3,0) y (0,4), reemplazando $x_1=3$, $y_1=0$ $\wedge$ $x_2=0$, $y_2=4$ en la expresión: $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = m$; de donde $\frac{4-0}{0-3} = -\frac{4}{3}$.

Luego, identificar el valor del intercepto $n = 4$, la ordenada donde la recta intercepta al eje Y.

Reemplazar m y n en la ecuación principal $y = mx + n$, obteniendo:

$$y = -\frac{4}{3}x + 4$$

o puede expresar la ecuación de la forma general:

$$\frac{4}{3}x + y - 4 = 0$$

Estrategia 2: Utiliza la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$, para esta ecuación necesita la pendiente y un punto que pertenezca a la recta.

Calcula la pendiente de la recta con los puntos (0,4) y (3,0), reemplazando $x_1=0$, $y_1=4$ $\wedge$ $x_2=3$, $y_2=0$ en la expresión: $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = m$; de donde $\frac{0-4}{3-0} = -\frac{4}{3}$, es decir $m = -\frac{4}{3}$.

Luego reemplaza un punto de la recta (x_i, y_i) y $m = -\frac{4}{3}$ en la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$, obteniendo la ecuación principal:

$$y - y_i = m(x - x_i)$$

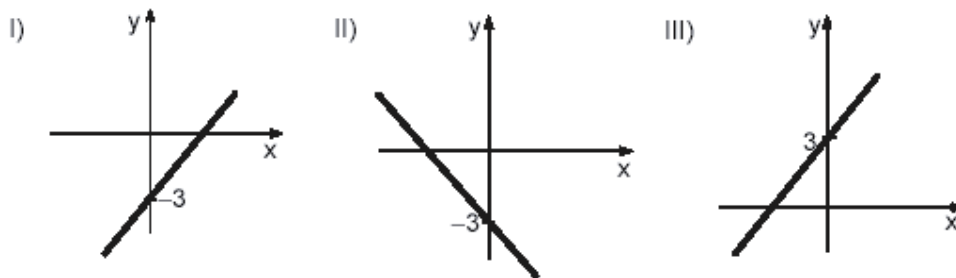
$$y - y_i = -\frac{4}{3}(x - x_i)$$

$$y = -\frac{4}{3}x + \left(\frac{4}{3}x_i + y_i\right)$$

o puede expresar la ecuación de la forma general:

$$\frac{4}{3}x + y - \left(\frac{4}{3}x_i + y_i\right) = 0$$

Pregunta 4: ¿Cuál(es) de los siguientes gráficos representa(n) la ecuación $y = ax - 3$?



El objetivo de esta pregunta es que el alumno relacione la pendiente a y el intercepto -3 de la ecuación con su representación en el plano cartesiano.

Estrategia: Identificar que la pendiente de la recta es a , la cual puede ser mayor que cero, caso en el cual la recta estaría graficada en I) o podría ser menor que cero, caso en el cual la recta estaría graficada en II), además del intercepto -3 que corresponde al punto $(0, -3)$ ubicado en el eje Y, la cual se observa en el gráfico I) y II).

Pregunta 5: Graficar la recta cuya ecuación es $4x - 2y - 6 = 0$. (sin utilizar la tabla de valores)

El objetivo de este ítem es que el alumno extraiga información de la ecuación general de tal forma que logre representarla en un gráfico, sin utilizar una tabla de valores.

Estrategia 1: Determinar los puntos de intersección con los ejes.

Primero, reemplaza $x=0$ en la ecuación $4x - 2y - 6 = 0$:

$$4 \cdot 0 - 2y - 6 = 0$$

$$-2y = 6$$

$$y = -3$$

obteniendo el punto $(0, -3)$.

Luego reemplaza $y=0$ en la ecuación $4x - 2y - 6=0$:

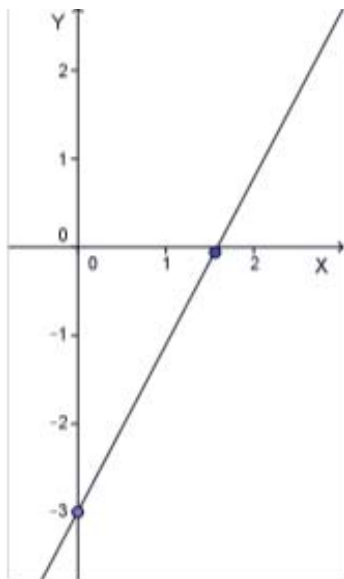
$$4x - 2 \cdot 0 - 6 = 0$$

$$4x = 6$$

$$x = \frac{3}{2}$$

obteniendo el punto $(\frac{3}{2}, 0)$.

Finalmente, ubicar los puntos $(0, -3)$ y $(\frac{3}{2}, 0)$ en el plano cartesiano y trazar la recta, como se observa en la gráfica.



Estrategia 2: Transformar la ecuación general $4x - 2y - 6 = 0$ en la ecuación principal de la recta para determinar el coeficiente de posición n , donde la recta intercepta al eje Y:

$$4x - 2y - 6 = 0$$

$$2y = 4x - 6$$

$$y = 2x - 3$$

de donde $n=-3$, obteniéndose el punto $(0, -3)$, punto de intersección con el eje Y.

Luego, reemplazar $y=0$ en la ecuación principal, para obtener el punto donde la recta intercepta al eje X:

$$y = 2x - 3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

obteniendo el punto $(\frac{3}{2}, 0)$.

Finalmente, ubicar los puntos $(\frac{3}{2}, 0)$ y $(0, -3)$ en el plano cartesiano y trazar la recta como se observa en la gráfica.



Estrategia 3: Determinar el intercepto **n** utilizando los coeficientes **b** y **c** de la ecuación general y reemplazarlos en la expresión $n = -\frac{c}{b}$, la cual se obtiene al transformar la ecuación general en la ecuación principal de la recta:

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ by &= -ax - c \\ y &= \left(-\frac{a}{b}\right)x + \left(-\frac{c}{b}\right) \end{aligned}$$

Reemplazar $b=-2$ y $c=-6$ de la ecuación general, en $n = -\frac{c}{b} = -\frac{-6}{-2} = -3$, obteniéndose el punto de intersección de la recta con el eje Y, $(0, -3)$.

Luego determinar el punto donde se intercepta la recta con el eje X haciendo $y=0$ en la ecuación $4x - 2y - 6=0$, resulta:

$$\begin{aligned} 4x - 2 \cdot 0 - 6 &= 0 \\ 4x &= 6 \\ x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

obteniendo el punto $(\frac{3}{2}, 0)$.

Finalmente, ubicar los puntos $(0, -3)$ y $(\frac{3}{2}, 0)$ en el plano cartesiano y trazar la recta como se observa en la gráfica.



Estrategia 4: Transformar la ecuación general de la recta en la ecuación de los segmentos determinados por la recta en los ejes cartesianos, para determinar los puntos de intersección de la recta con los ejes X e Y:

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ ax + by &= -c / \cdot \frac{-1}{c} \\ \frac{x}{\frac{-c}{a}} + \frac{y}{\frac{-c}{b}} &= 1 \end{aligned}$$

De la ecuación general de la recta $4x - 2y - 6 = 0$, obtener la ecuación de los segmentos determinados por la recta en los ejes cartesianos, la cual sería:

$$\frac{x}{\frac{6}{4}} + \frac{y}{\frac{6}{-2}} = 1$$

De esta ecuación se obtiene el punto de intersección con el eje X:

$$\left(\frac{-c}{a}, 0\right) = \left(\frac{6}{4}, 0\right) = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

y el punto de intersección con el eje Y:

$$\left(\frac{-c}{b}, 0\right) = \left(\frac{6}{-2}, 0\right) = (-3, 0).$$

Finalmente, ubicar los puntos $(0, -3)$ y $(\frac{3}{2}, 0)$ en el plano cartesiano y trazar la recta como se observa en la gráfica.



**Pregunta 6: Graficar la recta, cuya ecuación es $y = -\frac{x}{3} - 1$.
(sin utilizar la tabla de valores)**

El objetivo de este ítem es que el alumno extraiga información de la ecuación principal de la recta, de tal forma que logre representar la recta correspondiente en el plano cartesiano, sin utilizar una tabla de valores.

Estrategia 1: Determinar los puntos de intersección con los ejes cartesianos a partir de la ecuación principal dada.

Primero, reemplazar $x=0$ en la ecuación $y = -\frac{x}{3} - 1$, para obtener el punto donde la recta intercepta al eje Y, resulta:

$$y = -\frac{x}{3} - 1$$

$$y = -1$$

obteniendo el punto (0,-1).

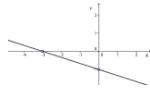
Luego, reemplazar $y=0$ en la ecuación $y = -\frac{x}{3} - 1$, para obtener el punto donde la recta intercepta al eje X, resulta:

$$y = -\frac{x}{3} - 1$$

$$x = -3$$

obteniendo el punto (-3,0).

Finalmente, ubicar los puntos (0,-1) y (-3,0) en el plano cartesiano y trazar la recta como se observa en la gráfica.



Estrategia 2: Identificar el intercepto n en la ecuación principal

$y = -\frac{x}{3} - 1$, para determinar el punto de intersección de la recta con el eje Y, si $n = -1$ el punto es $(0, -1)$.

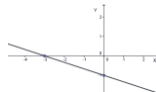
Luego reemplazar $y = 0$ en la ecuación $y = -\frac{x}{3} - 1$, para obtener el punto donde la recta intercepta al eje X, resulta:

$$y = -\frac{x}{3} - 1$$

$$x = -3$$

obteniendo el punto $(-3, 0)$.

Finalmente, ubicar los puntos $(0, -1)$ y $(-3, 0)$ en el plano cartesiano y trazar la recta como se observa en la gráfica.



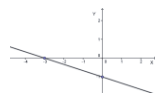
Estrategia 3: Transformar la ecuación principal de la recta en la ecuación de los segmentos determinados por la recta en los ejes cartesianos, para determinar los puntos de intersección de la recta con los ejes X e Y:

$$y = -\frac{x}{3} - 1$$

$$-\frac{x}{3} - y = 1$$

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{-1} = 1$$

De esta ecuación se obtiene el punto de intersección (-3,0) con el eje X y el punto de intersección con el eje Y, (0,-1). Finalmente, ubicar los puntos (-3,0) y (0,-1) en el plano cartesiano y trazar la recta como se observa en la gráfica.



IV.5.2 Análisis de la Congruencia entre Registros

En este apartado se establece el grado de congruencia o no-congruencia de la conversión entre los registros algebraico y gráfico, y viceversa de cada ítem que contempla el cuestionario, lo cual permitirá, posteriormente, realizar el análisis e interpretación de los resultados de cada caso. Esto bajo la mirada de los Registros de Representación Semiótica postulados por Duval (2004).

El esquema utilizado para determinar la congruencia de la conversión entre los sistemas semióticos propuestos en este cuestionario, fue tomado del trabajo realizado por Ospina (2012).

Para establecer el grado de congruencia entre las representaciones, se analizarán los criterios de congruencia por cada ítem. Cada criterio se designará como sigue:

Cs: Correspondencia semántica

Uv: Univocidad semántica terminal

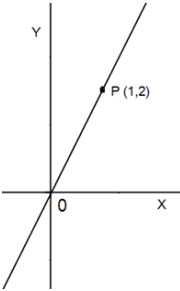
Co: Conservación del orden de aprehensión

Cuestionario Ecuación de la Recta

Ítem 1:

Tabla 3:

Conversión desde el registro gráfico al algebraico.

Registro Gráfico	Registro Algebraico
	$y = 2x$
Unidades Significantes	
Eje X, eje horizontal. Eje Y, eje vertical. ordenada y del punto (0,0) donde la recta intercepta al eje Y. Pendiente Sentido e inclinación de la recta: La recta asciende de izquierda a derecha, la pendiente es positiva.	y, variable dependiente Se determina la constante m y corresponde al coeficiente 2, es decir $m > 0$ x, variable independiente n=0, coeficiente de posición y corresponde al valor de la ordenada y=0.

Cs: existe correspondencia semántica entre las unidades significantes elementales. Los ejes X e Y se le asocian las variables independiente (x) y dependiente (y), respectivamente; la ordenada y donde la recta intercepta al eje Y está en correspondencia con el coeficiente de posición n , así mismo la pendiente de la recta está relacionada con la constante m en el registro de llegada.

Uv: sí existe univocidad semántica terminal, ya que a cada una de las unidades significantes elementales del registro de partida le corresponde una única unidad significativa elemental en el registro de llegada.

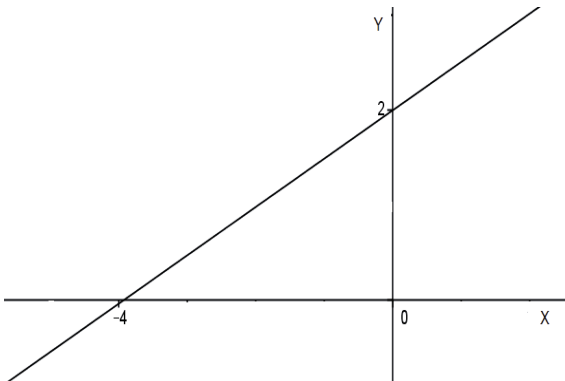
Co: no se observa este criterio en el ítem, es decir, no existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes elementales en los registros. Esto porque las unidades significantes elementales en el registro de llegada (algebraico) no presentan el mismo orden con respecto de las unidades significantes del registro de partida (gráfico).

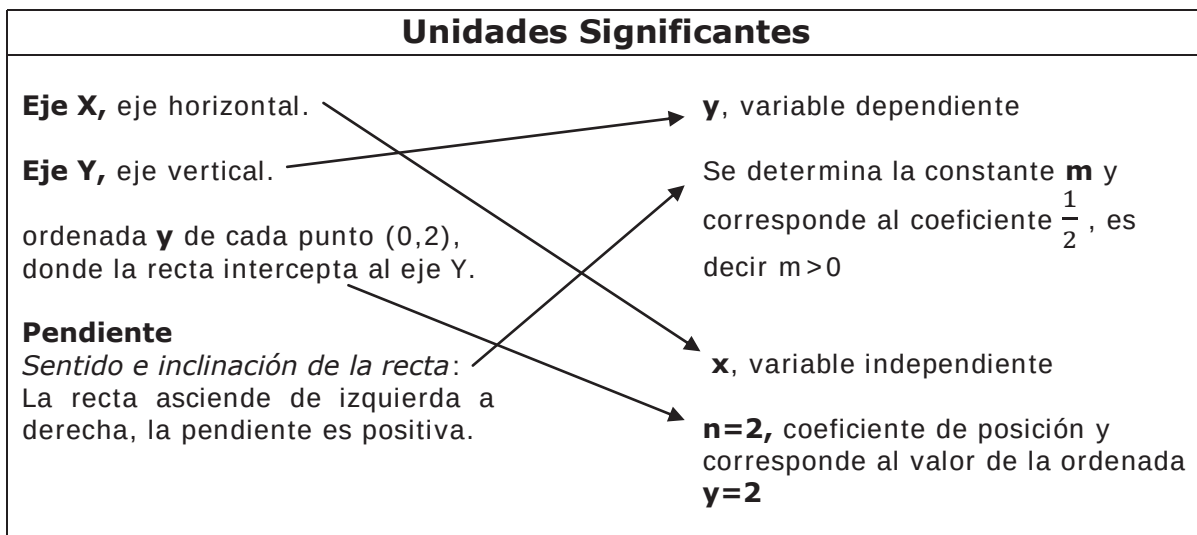
Se puede concluir que la conversión desde el registro gráfico al algebraico es no-congruente, ya que no cumple el criterio de congruencia de conservación del orden de aprehensión. Esto puede tener como consecuencias para el alumno, que le resulte difícil de realizar la conversión entre estos dos registros, Duval (2004).

Ítem 2:

Tabla 4:

Conversión desde el registro gráfico al algebraico.

Registro Gráfico	Registro Algebraico
	$y = \frac{1}{2}x + 2$



Cs: en este ítem existe correspondencia semántica entre las unidades significantes elementales. Los ejes X e Y están en correspondencia con las variables independiente (x) y dependiente (y), respectivamente; el valor de y, donde la recta intercepta al eje Y, está en correspondencia con el coeficiente de posición n , así mismo la pendiente está relacionada con la constante m en el registro de llegada.

Uv: sí existe univocidad semántica terminal, ya que a cada una de las unidades significantes elementales del registro de partida (gráfico) le corresponde una única unidad significativa en el registro de llegada (algebraico).

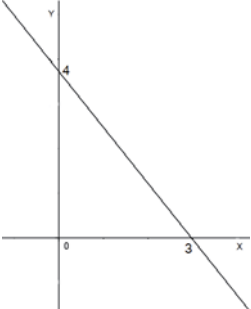
Co: en este caso las unidades significantes del registro gráfico no se presentan en el mismo orden con las unidades significantes del registro algebraico, es decir, no existe igual orden de aprehensión entre las unidades significantes elementales de los dos sistemas semióticos.

Se puede concluir que la conversión del registro gráfico al algebraico es no-congruente, ya que no cumple con el criterio de conservación del orden de aprehensión.

Ítem 3:

Tabla 5:

Conversión desde el registro gráfico al algebraico.

Registro Gráfico	Registro Algebraico
	$y = -\frac{4}{3}x + 4$
Unidades Significantes	
Eje X, eje horizontal. Eje Y, eje vertical. ordenada y del punto (0,4) donde la recta intercepta al eje Y. Pendiente Sentido e inclinación de la recta: La recta desciende de izquierda a derecha, la pendiente es negativa.	y, variable dependiente Se determina la constante m y corresponde al coeficiente $-\frac{4}{3}$, es decir $m < 0$ x, variable independiente n=4, coeficiente de posición y corresponde al valor de la ordenada y=4.

Cs: existe correspondencia semántica entre las unidades significantes elementales. Los ejes X e Y están en correspondencia con las variables independiente (x) y dependiente (y), respectivamente; el valor de y, donde la recta intercepta al eje Y, está en correspondencia con el coeficiente de posición n , así mismo la pendiente está relacionada con la constante m en el registro de llegada.

Uv: sí existe univocidad semántica terminal, ya que a cada una de las unidades significantes elementales del registro de partida le corresponde una única unidad significativa elemental en el registro de llegada.

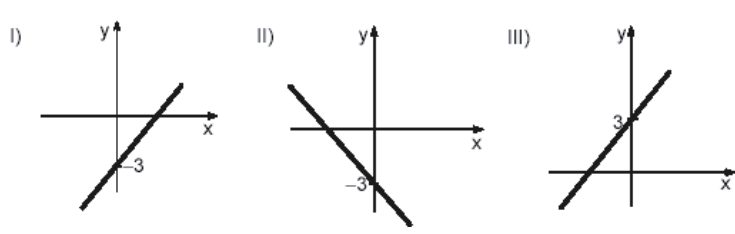
Co: no existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes elementales de los dos sistemas semióticos, es decir, no se presentan en el mismo orden las unidades significantes del registro gráfico con el registros algebraico.

La conversión del registro gráfico al algebraico no es congruente, ya que no cumple el criterio de congruencia de conservación del orden de aprehensión. Sin embargo, el nivel de dificultad para realizar la conversión es bajo, ya que están presentes todas las unidades significantes que componen los registros, pero en distinto orden, es decir el grado de no-congruencia es menor, según lo expone Duval (2004).

Ítem 4:

Tabla 6:

Conversión desde el registro algebraico al gráfico.

Registro Algebraico	Registro Gráfico
$y = ax - 3$	
Unidades Significantes	
y, variable dependiente constante m=a, pendiente donde: $m < 0$ ∨ $m > 0$. x, variable independiente n=-3, coeficiente de posición	Eje X, eje horizontal. Eje Y, eje vertical. ordenada y del punto (0,-3) donde la recta intercepta al eje Y. Pendiente , La posición de la recta puede tener dos <i>Sentidos e inclinación</i>: - La recta puede ascender de izquierda a derecha, ya que la pendiente podría ser positiva, o también, - La recta puede descender de izquierda a derecha, ya que la pendiente podría ser negativa.

Cs: existe correspondencia semántica entre las unidades significantes elementales. Las variables dependiente (y) e independiente (x) están en correspondencia con los ejes Y y X, respectivamente; la constante *m* está

relacionada con la pendiente en el registro de llegada (gráfico); el coeficiente de posición n , está en correspondencia con y , donde la recta intercepta al eje Y.

Uv: sí existe univocidad semántica terminal, ya que a cada una de las unidades significantes elementales del registro de partida le corresponde una única unidad significativa elemental en el registro de llegada.

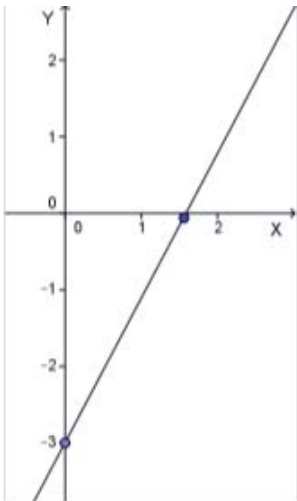
Co: no existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes elementales, es decir, no se presentan en el mismo orden las unidades significantes elementales del registro algebraico con las del registro gráfico.

La conversión del registro algebraico al gráfico es no-congruente, ya que no cumple el criterio de congruencia de conservación del orden de aprehensión. Sin embargo, el nivel de dificultad para realizar la conversión es bajo, ya que están presentes todas las unidades significantes que componen los registros pero en distinto orden, es decir el grado de no-congruencia es menor, según lo expone Duval (2004).

Ítem 5:

Tabla 7:

Conversión desde el registro algebraico al gráfico.

Registro Algebraico	Registro Gráfico
$4x - 2y - 6 = 0$	

Unidades Significantes	
a , coeficiente de la variable independiente x.	Eje X , eje horizontal.
x , variable independiente	Eje Y , eje vertical.
b , coeficiente de la variable dependiente y	ordenada y del punto donde la recta intercepta al eje Y. Se determina por el cociente entre b y c . Su valor es -3 y pertenece al punto (0,-3)
y , variable dependiente	Pendiente , corresponde al cociente entre <i>a</i> y <i>b</i> , cuyo valor es 2.
c , constante de la ecuación.	<i>Sentido e inclinación de la recta:</i> La recta asciende de izquierda a derecha, la pendiente es positiva.

Cs: no existe correspondencia semántica. Solo existe correspondencia semántica entre las unidades significantes elementales, variables dependiente (y) e independiente (x) con los ejes Y y X, respectivamente. En cambio, las unidades significantes elementales: constante a, b y c, no están en correspondencia semántica con ninguna de las unidades significantes elementales del registro de llegada.

Uv: no existe univocidad semántica terminal entre todas las unidades significante elementales, es decir no hay una correspondencia uno a uno entre las unidades significantes elementales de los sistemas semióticos, algebraico y gráfico.

Co: no existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes elementales de los dos sistemas semióticos, es decir, no se presentan en el mismo orden las unidades significantes del registro algebraico con las del gráfico.

Este tipo de representación perteneciente al registro algebraico, resulta de una alta complejidad para los alumnos de enseñanza media. Una de las razones es que solo dos de las cinco unidades significantes del registro de partida cumplen con los tres criterios (ver *Tabla 1*). De las otras unidades significantes elementales del registro algebraico, no es posible observar estos criterios. En consecuencia, el pasaje del registro algebraico al registro gráfico en este ítem resulta ser de un nivel de dificultad muy alto, debido a que la no-congruencia de la conversión es de un grado mayor.

Ítem 6:

Tabla 8:

Conversión desde el registro algebraico al gráfico.

Registro Algebraico	Registro Gráfico
$y = -\frac{x}{3} - 1$	
Unidades Significantes	
y , variable dependiente constante $m = -\frac{1}{3}$, pendiente donde $m < 0$ x , variable independiente n = -1 , coeficiente de posición	Eje X , eje horizontal. Eje Y , eje vertical. ordenada y del punto (0,-1) donde la recta intercepta al eje Y. Pendiente <i>Sentido e inclinación de la recta:</i> La recta desciende de izquierda a derecha, la pendiente es negativa.

Cs: existe correspondencia semántica entre las unidades significantes elementales. Las variables dependiente (y) e independiente (x) están en correspondencia con los ejes Y y X, respectivamente; la constante m está relacionada con la pendiente en el registro de llegada; el coeficiente de posición n , está en correspondencia con y, donde la recta intercepta al eje Y.

Uv: sí existe univocidad semántica terminal, ya que a cada una de las unidades significantes elementales del registro algebraico le corresponde una única unidad significativa elemental en el registro gráfico.

Co: no existe igual orden de aprehensión de las unidades significantes elementales de los dos sistemas semióticos, es decir, no se presentan en el mismo orden las unidades significantes del registro algebraico con las del gráfico.

Considerando que uno de los criterios no cumple, se puede afirmar que esta conversión no es congruente, con un nivel de dificultad bajo, ya que solo el criterio de conservación de orden es el que no se cumple, pero las unidades significantes elementales del registro de algebraico están

claramente en correspondencia semántica y univocidad semántica terminal con las del registro gráfico. Siendo posible el tránsito entre los dos registros semióticos.

IV.6 FASES DEL PROCESO INVESTIGATIVO

A continuación se detallan las tres fases que contempló este estudio de casos:

En la primera, la investigadora se familiarizó con el objeto de estudio "Ecuación de la Recta" y la naturaleza de este. Esta fase tuvo como objetivo principal obtener un conocimiento básico del fenómeno a estudiar.

En la segunda fase, se programó y realizó una reunión con los docentes a cargo de la asignatura de matemática, con la finalidad de explicar el objetivo de la investigación y presentar el instrumento elaborado para la recolección de los datos. Se acordó el día, fecha y hora de la intervención para que los docentes permitieran a los alumnos, ya seleccionados, salir de la clase, desarrollar el cuestionario y participar en la entrevista. Antes de aplicar el instrumento a todos los sujetos definitivos, se aplicó el cuestionario a modo de medición inicial, con la finalidad de sondear si la elaboración de los ítems presentaba una redacción comprensible y permitiera observar el pasaje de un registro a otro con sus respectivas justificaciones.

Posteriormente, se aplicó el cuestionario a los 4 sujetos que componen el estudio de casos. De igual modo, se aplicó la entrevista clínica semiestructurada a los sujetos intervenidos.

Finalmente, la tercera fase está referida al análisis de los resultados obtenidos desde la perspectiva de los Registros de Representaciones Semióticas de Duval. Dentro de esta fase se aplica una comparación de diferentes fuentes de datos entre la producción de los sujetos, el análisis a priori y la entrevista, lo cual permite verificar o refutar la hipótesis planteada.

CAPÍTULO V

ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS POR CASO

En este capítulo se presentará el análisis e interpretación de los resultados obtenidos por cada uno de los casos tras la aplicación del cuestionario.

Los resultados de cada uno de los casos, son analizados e interpretados desde los Registros de Representación Semiótica mencionado en el capítulo III de esta investigación.

El análisis e interpretación de los resultados se presenta por Caso, describiendo el proceso de entre los registros algebraico y gráfico, del objeto matemático ecuación de la recta, observado en las producciones de los alumnos.

V.1 CASO 1

En el primer ítem, el alumno trata de establecer la correspondencia entre las unidades significantes elementales de los sistemas semióticos, pero no lo logra, por el contrario al considerar el punto (1,2) planteado en la gráfica, identifica erróneamente $x=2$ e $y=1$ (ver *Figura 4*).

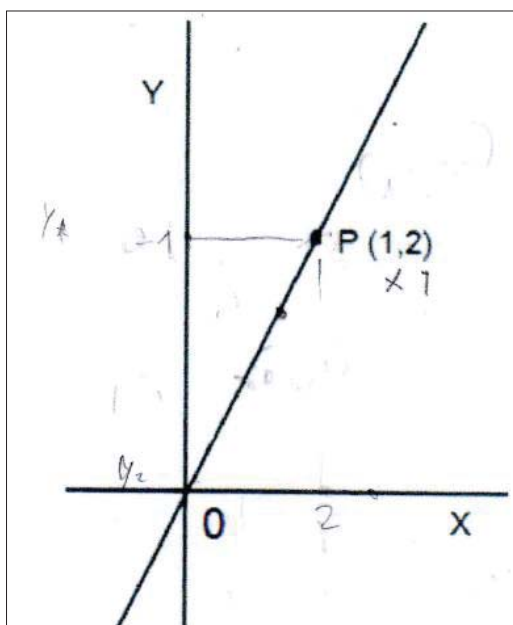
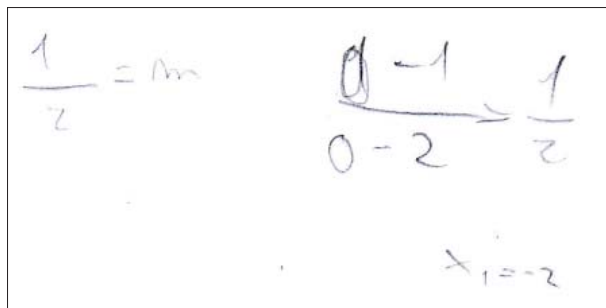


Figura 4. Caso 1, ítem 1. Identificación errónea de las variables x e y .

Así también, lo afirma durante la entrevista: "... entonces y_1 sería 1 y x_1 sería 2...".

Luego, recurre al tratamiento de la expresión algebraica $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$ (ver *Figura 5*) con el fin de obtener la constante m , utilizando los puntos (2,1), el que estableció erróneamente, y el (0,0) correspondiente a la intersección de la recta con el eje Y.



$$\frac{1}{2} = m$$

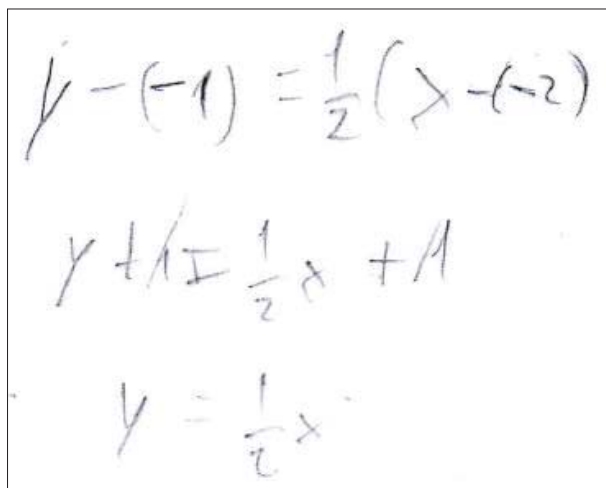
$$\frac{1 - 0}{2 - 0} = \frac{1}{2}$$

$$m = \frac{1}{2}$$

Figura 5. Caso 1, ítem 1. Cálculo de la pendiente.

Si bien, identifica a la unidad significativa m como la pendiente en el registro algebraico, no establece la correspondencia entre el sentido e inclinación de la recta y pendiente que obtiene.

Por otra parte, no establece la correspondencia entre el valor de la ordenada $y=0$, donde la recta intercepta al eje Y, con el coeficiente de posición n de la ecuación de la recta, recurriendo al tratamiento de una expresión algebraica (ver *Figura 6*), para determinar la ecuación de la recta.



$$y - (-1) = \frac{1}{2}(x - (-2))$$

$$y + 1 = \frac{1}{2}x + 1$$

$$y = \frac{1}{2}x$$

Figura 6. Caso 1, ítem 1. Tratamiento de $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Como se puede apreciar en la Figura 6, el caso 1 reemplaza erróneamente los valores de x_1 y de y_1 en la expresión, obteniendo una ecuación que no corresponde a la recta trazada en el gráfico.

Se observa que presenta dificultades para identificar las unidades significantes elementales en el registro gráfico, así también para establecer la correspondencia entre las unidades de este registro y las unidades significantes del registro algebraico.

Finalmente, el alumno no logra realizar la conversión desde el registro gráfico al algebraico, por lo que se puede concluir que no posee comprensión del objeto en estudio.

En el segundo ítem, el alumno no identifica correctamente las unidades significantes elementales del registro de partida, esto se observa cuando identifica $x_1 = -4$ e $y_1 = 2$, $x_2 = 0$ e $y_2 = 0$, es decir, establece como puntos pertenecientes a la recta al $(-4, 2)$ y $(0, 0)$, provocando un error al realizar la correspondencia semántica entre los valores de las variables independiente y dependiente con los ejes coordenados (ver Figura 7).

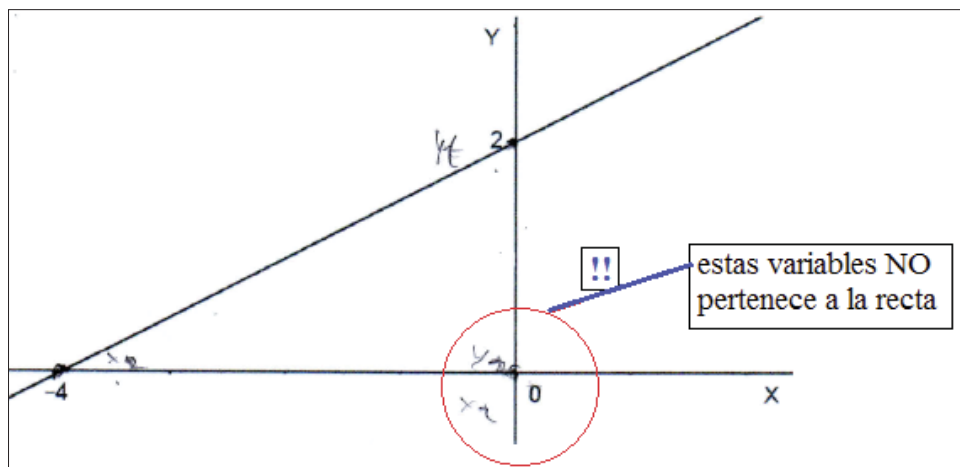


Figura 7. Caso 1, ítem 2. Asignación errónea, a ciertas unidades significantes.

Una consecuencia de esto es el valor que obtiene para la constante m , donde recurre al tratamiento de la expresión $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$, al igual que en el ítem 1 (ver Figura 8).

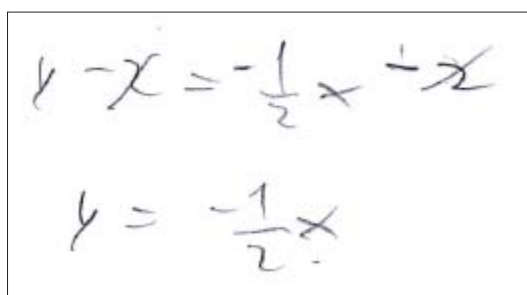
$$\frac{0 - 2}{0 - -4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} m$$

Figura 8. Caso 1, ítem 2. Cálculo de la pendiente.

En este ítem, no establece la correspondencia entre la pendiente de la recta y la proposición $m > 0$, es decir la pendiente de la ecuación, a pesar de que identifica a la unidad significativa elemental m como la pendiente en el registro algebraico.

Tampoco establece la correspondencia entre la unidad significativa elemental $y=2$, donde la recta intercepta al eje Y, con la unidad significativa elemental coeficiente de posición n , de la ecuación.

Al igual que en el ítem 1, recurre al tratamiento de la expresión $y - y_1 = m(x - x_1)$, para determinar la ecuación de la recta (ver *Figura 9*), estrategia propuesta en el análisis a priori del ítem.



$$y - 2 = -\frac{1}{2} \cdot (x - 3)$$

$$y = -\frac{1}{2} \cdot x$$

Figura 9. Caso 1, ítem 2. Cálculo de la ecuación de la recta.

Como se puede apreciar en la *Figura 9*, el alumno reemplaza erróneamente los valores de x_1 y de y_1 en la expresión, obteniendo una ecuación que no corresponde a la recta trazada en el gráfico, es decir, no identifica que esa ecuación corresponde a una recta que intercepta al origen del plano cartesiano, no siendo el caso de la gráfica que él observa.

Este alumno presenta dificultades para identificar las unidades significantes elementales en el registro gráfico, así también para establecer la correspondencia entre las unidades de este registro y las unidades significantes del registro algebraico.

El alumno no logra realizar la conversión desde el registro gráfico al algebraico, posiblemente porque no tiene la comprensión necesaria del objeto y sus distintas representaciones.

En el tercer ítem, el alumno identifica parcialmente las unidades significantes de cada registro, lo cual le dificulta para realizar la correspondencia entre las unidades significantes elementales de los sistemas semióticos.

No relaciona los valores de las unidades significantes elementales x e y en los ejes cartesianos, esto se observa cuando asigna a $x_1=3$ e $y_1=4$, $x_2=0$ e

$y_2=0$, o sea repite el mismo error que en los ítems anteriores (ver *Figura 10*).

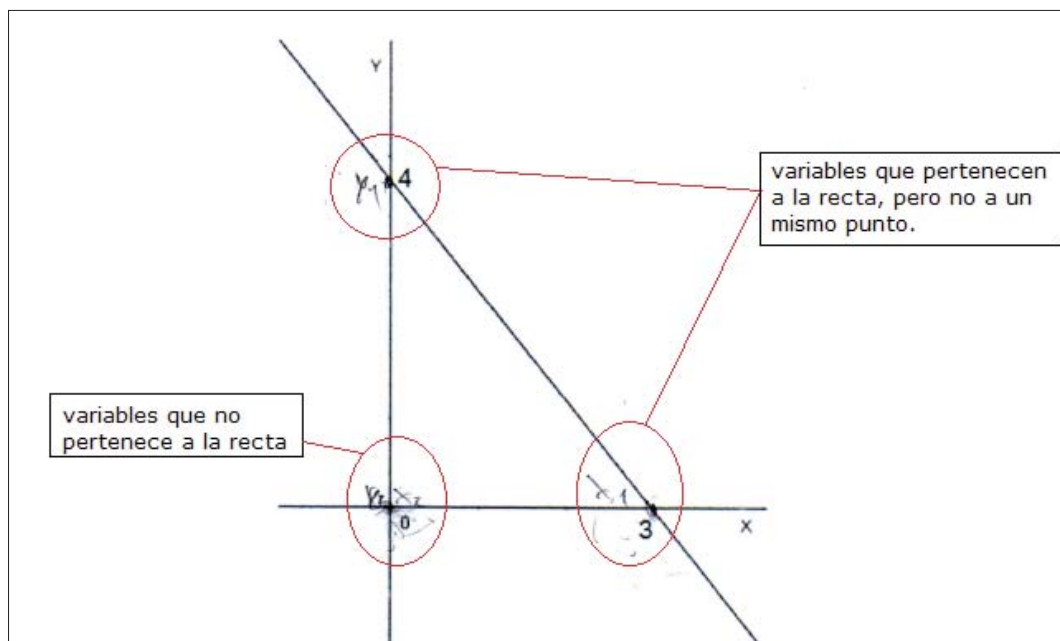


Figura 10. Caso 1, ítem 3. Relaciona erróneamente variables que pertenecen a puntos distintos de la recta.

Una consecuencia de esto es el valor que obtiene para la constante m , donde recurre al tratamiento de la expresión $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$, obteniendo $m = \frac{4}{3}$, o sea $m > 0$, lo cual es erróneo.

A pesar de identificar la unidad significativa m como la pendiente en el registro algebraico, no establece la correspondencia entre la pendiente de la recta y la constante m , pues se habría dado cuenta de que el valor obtenido de m no podía ser positivo, ya que el sentido e inclinación de la recta corresponde a una pendiente negativa (ver *Figura 11*).

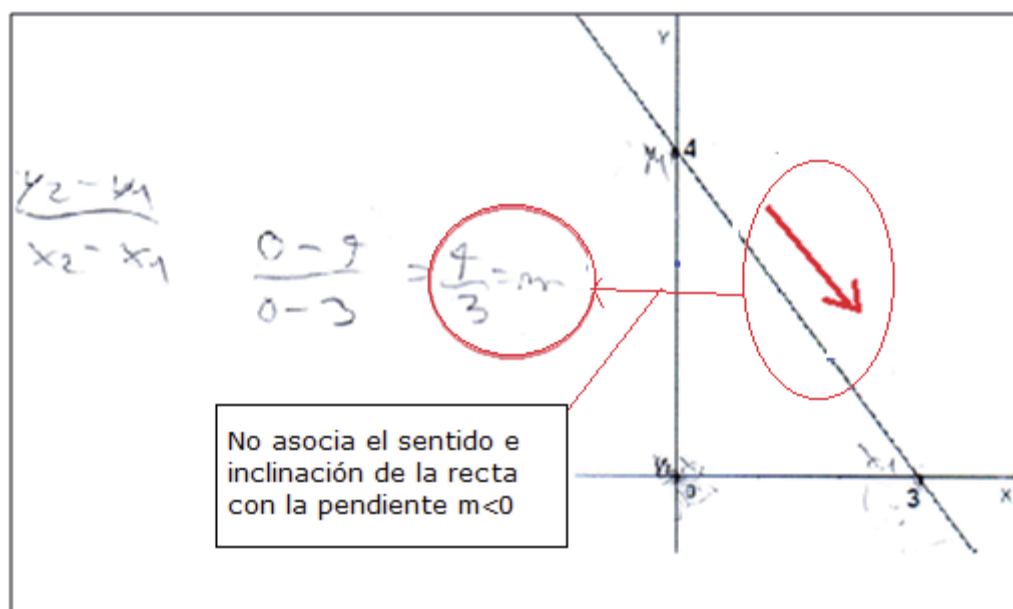


Figura 11. Caso 1, ítem 3. El alumno obtuvo $m > 0$ en el registro algebraico, siendo $m < 0$ en el gráfico. No hay correspondencia entre las unidades significantes.

Tampoco establece la correspondencia entre el valor de $y = 4$, donde la recta intercepta al eje Y, con el coeficiente de posición n de la ecuación. Al igual que en el ítem 2, recurre al tratamiento de la expresión $y - y_1 = m(x - x_1)$, para determinar la ecuación de la recta.

$$\begin{aligned}
 y - 4 &= \frac{4}{3}(x - 3) \\
 y - 4 &= \frac{4}{3}x - 4 \\
 y &= \frac{4}{3}x
 \end{aligned}$$

Figura 12. Caso 1, ítem 3. Planteamiento y desarrollo de la expresión algebraica.

Como se puede apreciar en la *Figura 12*, el caso 1 reemplaza erróneamente los valores de x_1 y de y_1 en la expresión, obteniendo una ecuación que no corresponde a la recta trazada en el gráfico, es decir, no identifica que esa ecuación obtenida corresponde a una recta que intercepta al origen del plano cartesiano, no siendo el caso de la gráfica que él observa.

Este alumno presenta dificultades para identificar las unidades significantes elementales en el registro gráfico, así también para

establecer la correspondencia entre las unidades del registro de partida y las unidades significantes del registro de llegada.

Se puede concluir que el alumno no logra realizar el tránsito desde el registro gráfico al algebraico, esto se evidencia al no determinar correctamente las unidades significantes del registro de partida, llevándolo a una seguidilla de errores. Posiblemente esta baja comprensión se puede deber a las escasas experiencias en situaciones de conversión de registros a las que se vio enfrentado, y por tanto a la adquisición de un débil manejo entre distintos registros.

En el cuarto ítem, durante la entrevista video grabada, se pudo observar que el alumno aborda este ítem partiendo desde el registro gráfico, sin analizar ni establecer relaciones entre las unidades significantes elementales del registro de partida (algebraico) con las del registro de llegada (gráfico).

Este alumno en la primera gráfica, asigna a la unidad significativa elemental $x_1=a$; asigna a la unidad significativa elemental $y_1=-3$, donde la recta intercepta al eje Y, y finalmente le asigna al punto $(0,0)$ x_2 e y_2 , respectivamente (ver *Figura 13*) .

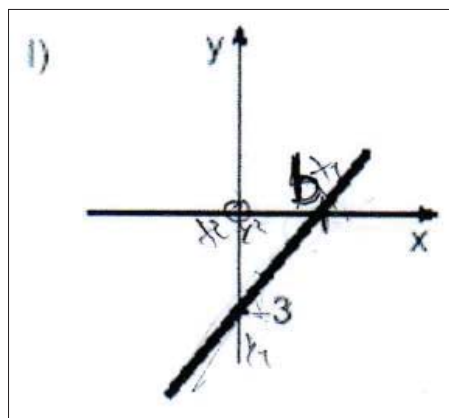


Figura 13. Caso 1, ítem 4. Asigna los valores de las variables.

Posteriormente, recurre al tratamiento de una expresión algebraica, para determinar el valor de la constante m (ver *Figura 14*). Luego, al tratamiento de una ecuación para determinar la ecuación de la recta correspondiente a la gráfica I (ver *Figura 15*), pero se enfrenta a una dificultad, pues desconoce el valor de a .

$$\frac{0 - (-3)}{0 - a} = -\frac{3}{a} m$$

Figura 14. Caso1, ítem 4. Cálculo de la pendiente

$$y - (-3) = -\frac{3}{a}(x - a)$$

$$y + 3 = -\frac{3}{a}x - 3$$

Figura 15. Caso 1, ítem 4. Expresión que obtiene con $x_1=a$.

Luego reemplaza $x_1=a$ por la letra b , pues concluye que no le sirvió esa decisión, así lo afirma en la entrevista; y el valor de la unidad significativa elemental, pendiente, por $m=a$, después decide cambiar de estrategia obteniendo otra ecuación, la cual posteriormente desecha (ver *Figura 16*).

$$y - 3 = ax - ab$$

$$y + 3 = ax - ab \quad | -3$$

$$y = ax - ab - 3$$

Figura 16. Caso 1, ítem 4. Expresión que obtiene con $x_1=b$.

Identifica erróneamente la unidad significativa elemental m asignándole el valor de $n=-3$, así lo evidencia durante la entrevista.

Cuando se le pide que realice la asociación entre la pendiente y el sentido e inclinación de la recta, el alumno expresa que la pendiente de la recta en la gráfica tiene cierto sentido según el signo de m (positivo o negativo) y lo va señalando con el lápiz, de izquierda a derecha hacia abajo en el gráfico II (hay que considerar que el valor de la pendiente para el alumno es $n=-3$). Este es el motivo por el cual en este ítem, elige el gráfico II (ver *Figura 17*).

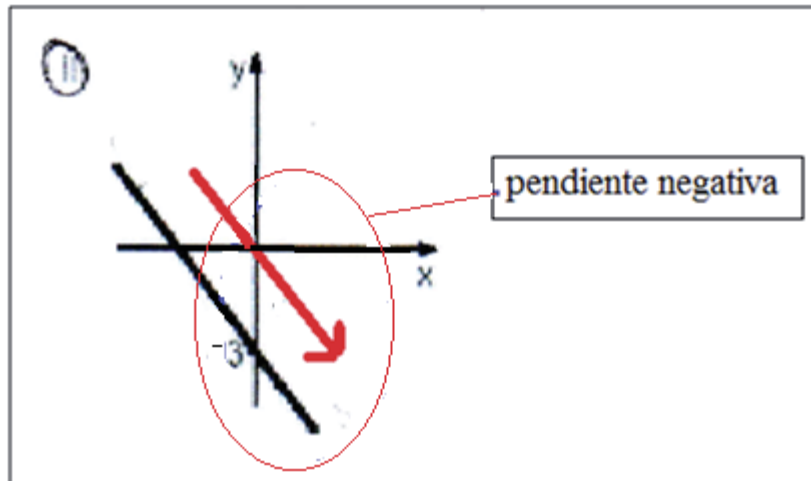


Figura 17. Caso 1, ítem 4. Selecciona erróneamente II), pues asocia $n=-3$ con el sentido e inclinación de la recta (pendiente).

Esta afirmación formulada por este Caso, evidencia que tiene una noción del sentido e inclinación de la recta cuando la pendiente es positiva o negativa en una ecuación de la recta.

En conclusión, el alumno al no reconocer las unidades significantes elementales de cada registro, no logra realizar la correspondencia entre las correspondientes al registro de partida con las del registro de llegada. Tampoco se observa que establezca la univocidad semántica terminal entre estas.

Por consiguiente queda evidenciado que no logró la comprensión del objeto matemático en su momento, posiblemente debido a que dio énfasis al tratamiento de un registro más que otro, cuando abordó el estudio de este objeto matemático.

En el ítem 5, el alumno expresa de forma escrita en su producción, y verbal en la entrevista, que no sabe, no se acuerda de como poder desarrollar este tipo de ejercicios. (ver *Figura 18*).

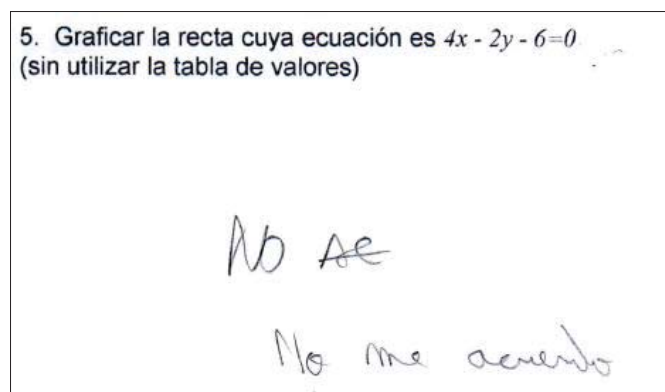


Figura 18. Caso 1, ítem 5. Resultados de este caso.

No realiza la correspondencia entre las unidades significantes elementales del registro de partida con el registro de llegada. No se observa que establezca la univocidad semántica terminal entre estas. Se puede concluir que el tránsito desde el registro algebraico al registro gráfico, es de un nivel de dificultad muy alto para el alumno, posiblemente debido al grado mayor de no-congruencia que presenta este tipo de conversión, quedando de manifiesto que no posee la comprensión del objeto matemático.

En el ítem 6, el alumno realiza correctamente la correspondencia semántica entre la unidad significativa m , que se observa en el registro algebraico, y el sentido e inclinación de la recta en el registro gráfico, sin embargo la recta trazada en el plano cartesiano intercepta a este en el origen, lo cual es erróneo (ver *Figura 19*).

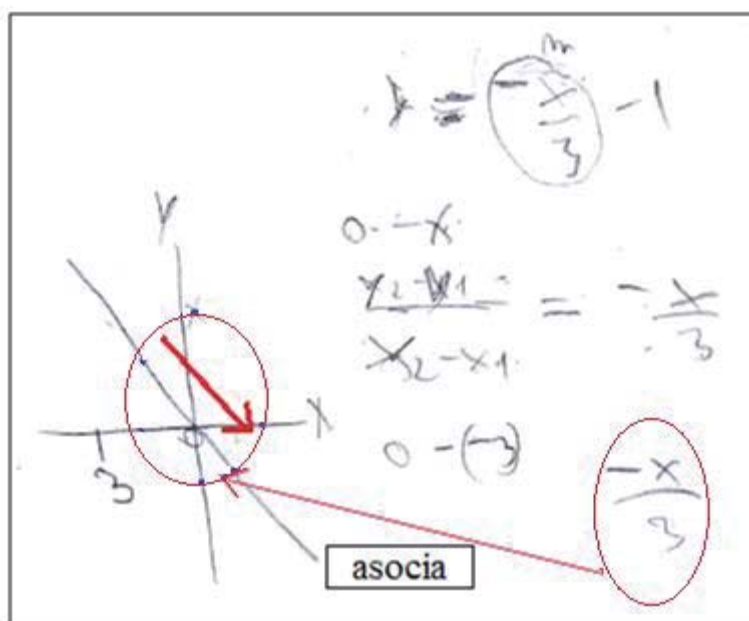


Figura 19. Caso 1, ítem 6. Intento por establecer correspondencias.

Luego, recurre al tratamiento de la expresión $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$, para establecer una igualdad entre la pendiente y esta expresión (ver *Figura 19*).

Cabe hacer notar que cuando establece el valor de la constante m , no la separa de la variable independiente, considerándola como $m = -\frac{x}{3}$. Esto indica que no identifica todas las unidades significantes elementales en el registro algebraico.

Posteriormente, el alumno señala en su producción y en la entrevista, que no se acuerda de cómo poder desarrollar este tipo de ejercicios.

No realiza la correspondencia entre todas las unidades significantes elementales del registro de partida con el registro de llegada. No se observa que establezca la univocidad semántica terminal entre estas. En consecuencia no logra el pasaje de un registro a otro, ya que no traza la recta corresponde a la ecuación dada. Por lo que se puede concluir que no posee la comprensión del objeto ecuación de la recta.

Comentarios sobre el Caso 1

Este alumno presenta dificultades para identificar las unidades significantes elementales tanto en el registro algebraico como en el registro gráfico, así también para establecer la correspondencia entre estas, sobre todo desde el registro algebraico al gráfico, aunque se observó que en un ítem logra establecer una correspondencia semántica entre ciertas unidades significantes elementales. Con respecto a la univocidad semántica terminal, no se observa que cumpla este criterio en ninguno de los ítem del cuestionario, tampoco existe conservación del orden de aprehensión entre las unidades significantes (ver *Tabla 9*). Al no evidenciar la existencia de estos tres criterios, el grado de no-congruencia es grande.

Se puede afirmar que el alumno no tiene los conocimientos matemáticos necesarios sobre el objeto ecuación de la recta, pues en ninguno de los ítem propuestos en el cuestionario logró la representación del objeto en el registro de llegada, es decir el tránsito entre las representaciones semióticas no es espontáneo para este alumno, siendo de un nivel de dificultad muy alto, como lo señala Duval (2004).

Tabla 9:

Presencia de los criterios de congruencia y de la conversión en el Caso 1.

C A S O 1	Ítem	Criterios de Congruencia			Realiza Conversión
		Cs	Uv	Co	
	1	No	No	No	No
	2	No	No	No	No
	3	No	No	No	No
	4	Parcial*	No	No	No
	5	No	No	No	No
	6	No	No	No	No

* Se observa la correspondencia semántica entre algunas de las unidades significantes elementales solamente.

V.2 CASO 2

En el primer ítem, se observa que identifica las unidades significantes del registro de partida: x e y en los ejes coordenados, estableciendo la correspondencia semántica con las variables independiente y dependiente en el registro algebraico; la coordenada $y=0$, donde la recta intercepta al eje Y , la asocia con el coeficiente de posición n en el registro de llegada (ver Figura 20), confirmando estas asociaciones durante la entrevista.

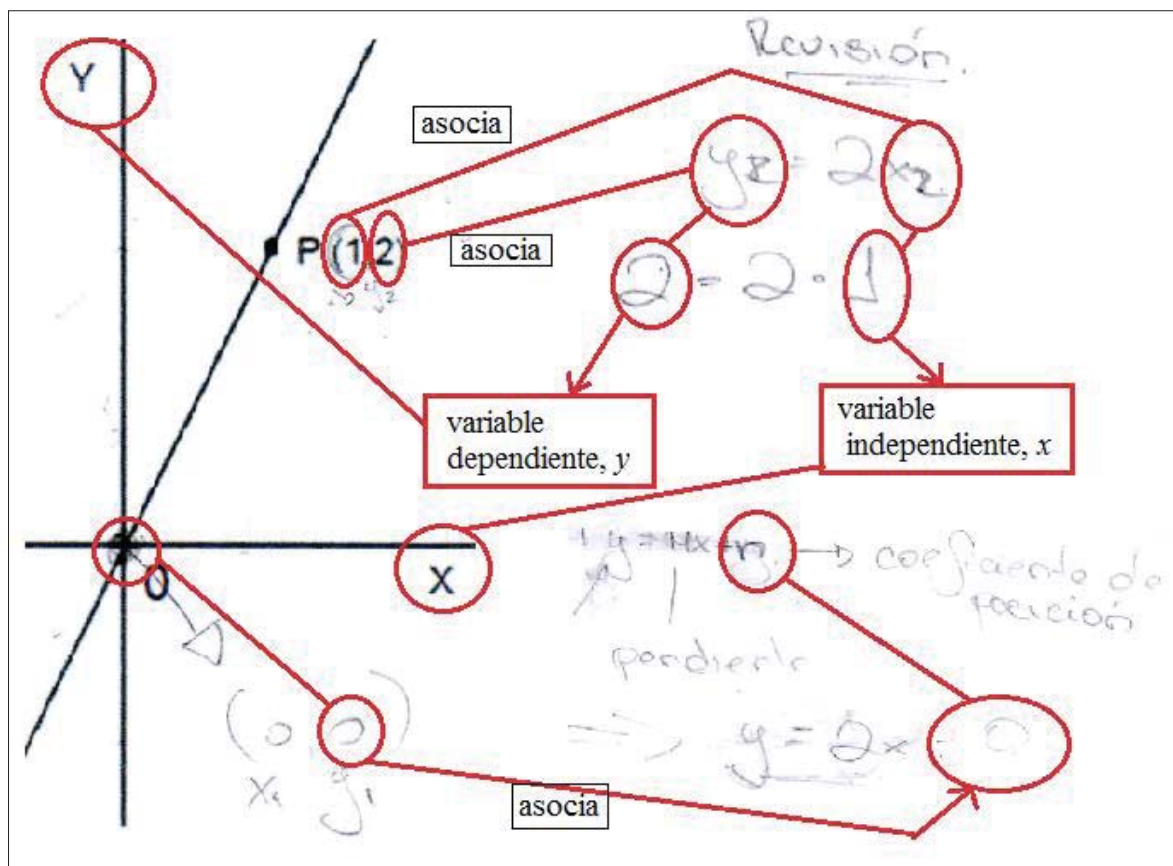


Figura 20. Caso 2, ítem 1. Correspondencia entre algunas unidades significantes elementales.

Con respecto al sentido e inclinación de la recta, el alumno no la identifica ni establece la correspondencia entre esta unidad significativa elemental del registro de partida y su correspondiente en el registro de llegada (ver Figura 8). Sin embargo, determina la constante m , utilizando una de las estrategias propuestas en el análisis *a priori*, es decir, recurre al tratamiento de la expresión $m = \frac{2-0}{1-0}$ (ver Figura 21).

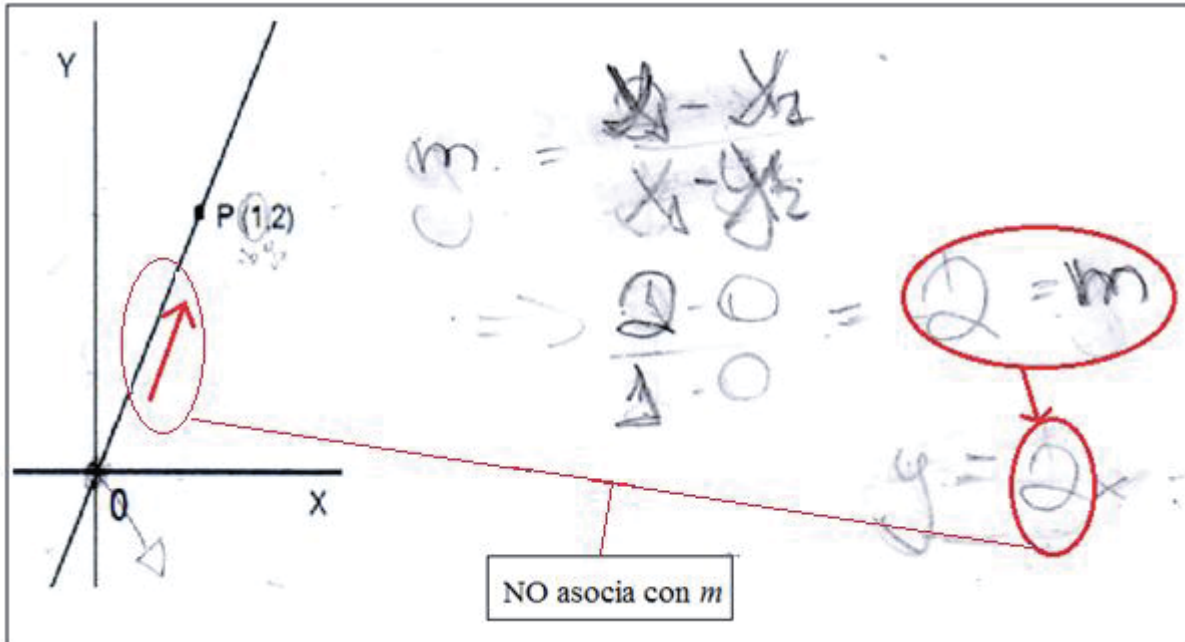


Figura 21.Caso 2, ítem 1 Se observa que no asocia la pendiente de la recta con $m > 0$, recurre a la fórmula de la pendiente.

Identifica parcialmente las unidades significantes elementales en el registro gráfico, logrando establecer la correspondencia entre casi todas las unidades significantes elementales de cada sistema semiótico.

Finalmente, para este alumno el tránsito de un registro a otro es inmediato, pues realiza sin problemas la conversión desde el registro gráfico al algebraico, lo cual indica que posee cierto manejo y comprensión de lo que necesita para realizar la conversión desde la recta trazada a la ecuación de esta.

En el segundo ítem, identifica las unidades significantes del registro de partida: x e y en los ejes coordenados, estableciendo la correspondencia semántica con las variables independiente y dependiente en el registro algebraico; la coordenada $y=2$, donde la recta intercepta al eje Y, la asocia con el coeficiente de posición n en el registro de llegada (ver Figura 22), confirmando estas asociaciones durante la entrevista.

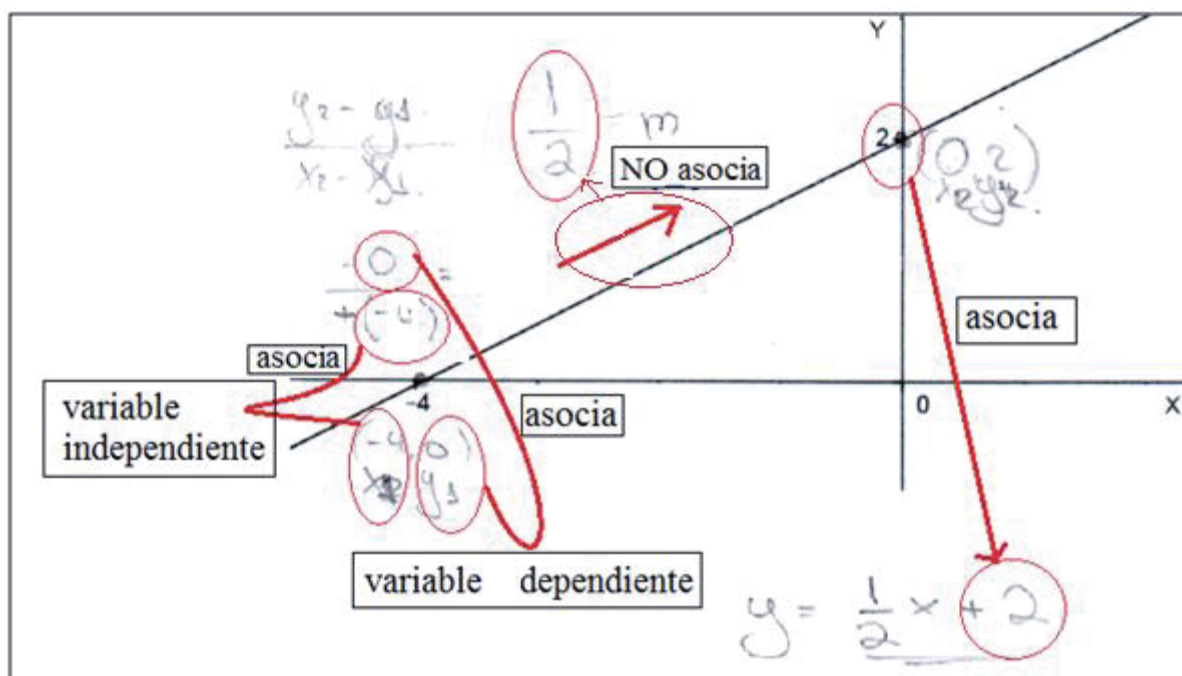


Figura 22. Caso2, ítem 2. Correspondencia y univocidad entre las unidades significantes elementales.

Con respecto a la pendiente de la recta, el alumno no establece la correspondencia entre esta unidad significativa elemental del registro de partida y su correspondiente en el registro de llegada, es decir la constante m en el registro algebraico (ver Figura 14). Sin embargo, calcula la pendiente recurriendo al tratamiento de la expresión $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$ (ver Figura 23).

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$$

$$\frac{2 - 0}{0 - (-4)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = m$$

Figura 23. Caso 2, ítem 2. Cálculo de la Pendiente.

Este alumno identifica parcialmente las unidades significantes elementales en el registro gráfico, logrando establecer la correspondencia entre casi todas las unidades significantes elementales de cada sistema semiótico de representación.

Para este alumno, el tránsito de una representación a otra es inmediato, pues realiza sin problemas la conversión desde el registro gráfico al

algebraico, lo cual demuestra una comprensión parcial del objeto, ya que se realiza en una sola dirección el cambio de registro.

En el ítem 3, el alumno repite el procedimiento realizado en los ítems anteriores, o sea, identifica las unidades significantes del registro de partida: x e y en los ejes coordenados, estableciendo la correspondencia semántica con las variables independiente y dependiente en el registro algebraico; la coordenada $y=4$, donde la recta intercepta al eje Y , la asocia con el coeficiente de posición n en el registro de llegada (ver Figura 24), confirmando estas correspondencias durante la entrevista.

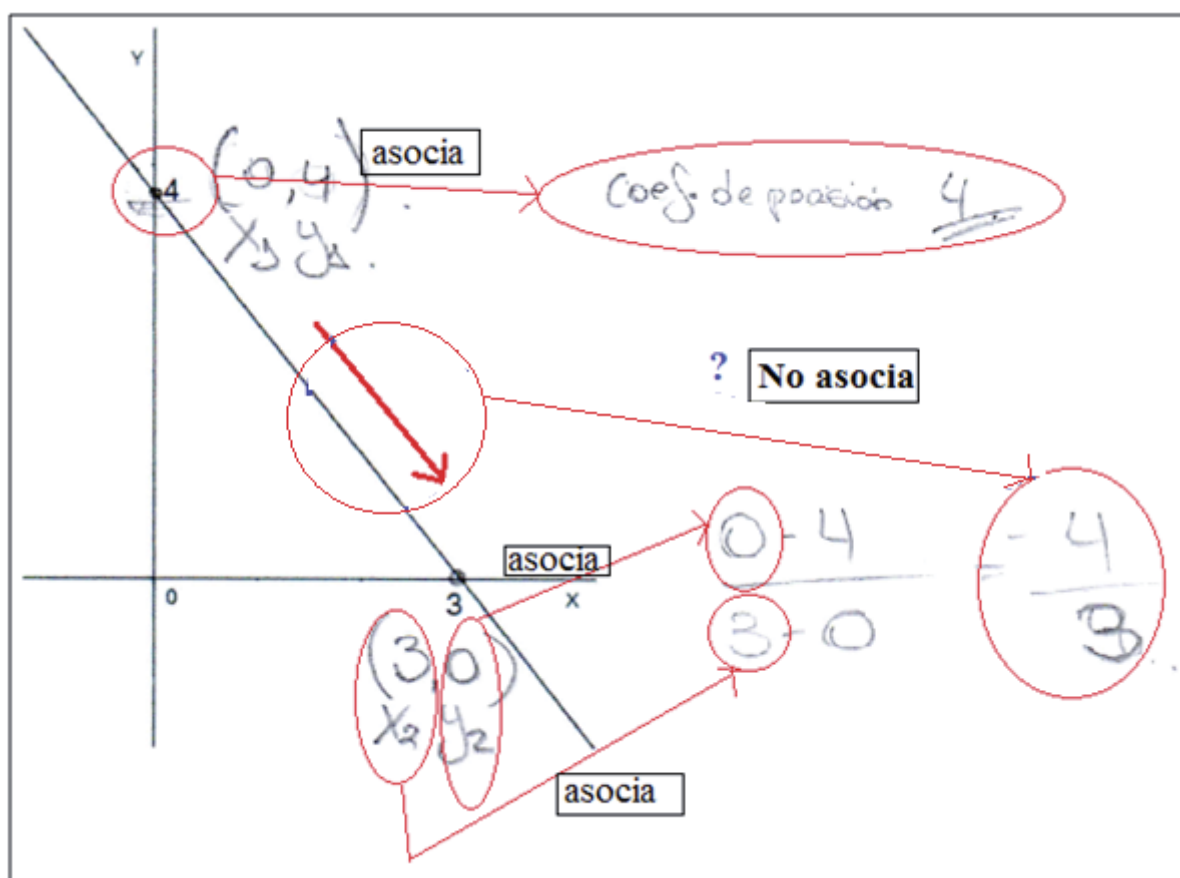
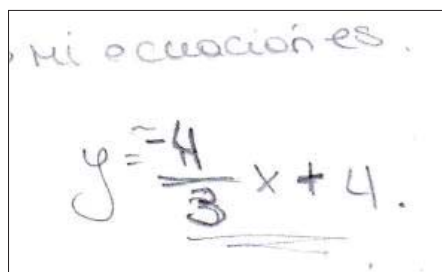


Figura 24. Caso 2, ítem 3. Correspondencia y univocidad semántica.

Con respecto a la pendiente de la recta, el alumno no establece la correspondencia entre esta unidad significativa elemental del registro de partida y su correspondiente en el registro de llegada, es decir la constante m en el registro algebraico. Sin embargo, calcula el valor de m de forma algebraica, al igual que el ítem 1, recurriendo al tratamiento de la expresión $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$. La estrategia utilizada por el este alumno coincide con la propuesta en el análisis a priori realizado.

Este alumno identifica parcialmente las unidades significantes elementales en el registro gráfico, sin embargo igualmente logra establecer la correspondencia entre casi todas las unidades significantes elementales de cada sistema semiótico de representación. Asimismo, la univocidad semántica terminal.

Se concluye que para este alumno el tránsito de una representación a otra resultó espontáneo, pues realiza sin problemas la conversión desde el registro gráfico al algebraico, lo cual evidencia que posee un nivel de comprensión que le permite representar la recta, presente en el registro gráfico, en el registro algebraico (ver *Figura 25*).



mi ecuaciones.

$$y = -\frac{4}{3}x + 4.$$

Figura 25. Caso 2, ítem 3. Planteamiento ecuación de la recta.

En el ítem 4, el alumno aborda este ítem partiendo por las tres gráficas, en las cuales anota el punto de intersección entre la recta y el eje Y, en cada una de ellas (ver *Figura 26*).

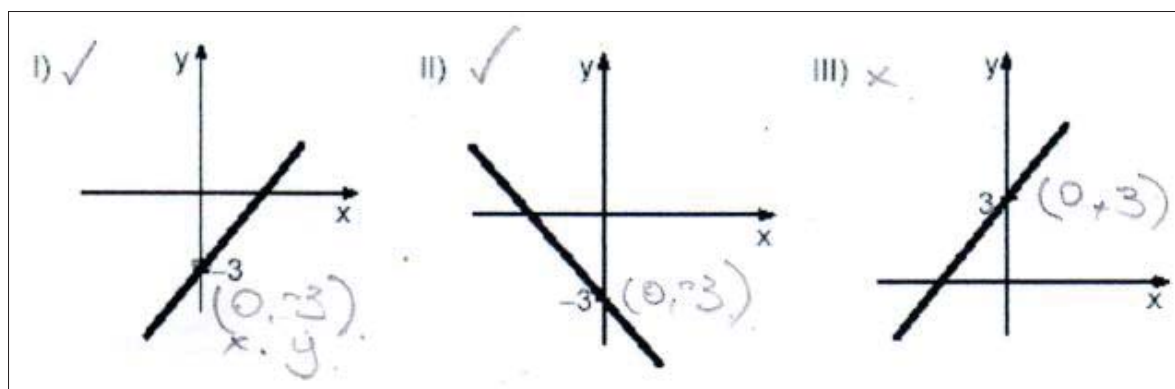


Figura 26. Caso 2, ítem 4. Identifica las variables y sus valores en las gráficas.

Si bien el alumno identifica las unidades significantes x e y en los ejes cartesianos, no se aprecia que realice lo mismo en el registro algebraico, puesto que no identifica las unidades significantes elementales en el registro de partida (algebraico), es decir, pendiente a ni coeficiente de posición $n=-3$, esto queda de manifiesto en la entrevista, cuando se le pide realice la relación entre las unidades significantes del registro algebraico con las del registro gráfico.

Con respecto a la correspondencia semántica entre las unidades significantes elementales, ésta la realiza desde el registro gráfico al algebraico, entre las unidades significantes elementales x e y con las variables independiente e dependiente, respectivamente. Esto queda de manifiesto en el tratamiento de la ecuación de la recta, cuando reemplaza los valores x e y en esta (ver *Figura 27*); el objetivo es, según lo señala el alumno durante la entrevista, obtener una igualdad, si eso ocurre la gráfica corresponde a la ecuación dada.

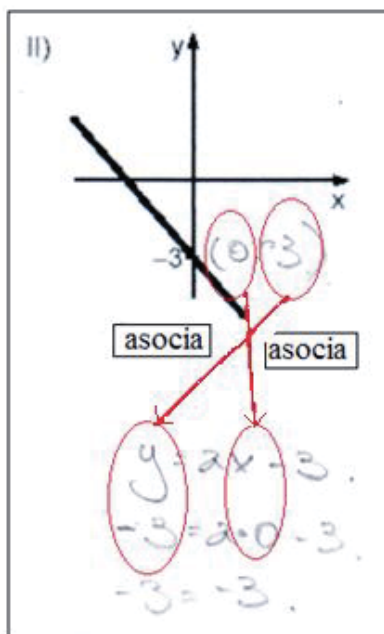


Figura 27. Caso 2, ítem 4. correspondencia entre las unidades significantes desde el registro de gráfico al algebraico.

Esta estrategia le permite al alumno establecer correctamente que las gráficas I y II corresponden a la ecuación de la recta propuesta en el enunciado del ítem.

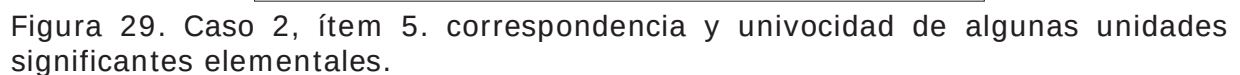
Esta estrategia utilizada por el Caso 2, no fue propuesta en el análisis *a priori*, ya que no corresponde para este ítem, pues la conversión debe ser desde el registro algebraico al registro gráfico y no al contrario.

Luego, se puede establecer que en este ítem el alumno no realiza la correspondencia semántica entre las unidades significantes elementales del registro de partida y del registro de llegada, tampoco se aprecia que establezca la univocidad semántica terminal.

Se puede concluir que este alumno posee una comprensión parcial del objeto, pues logra responder lo solicitado, pero no realiza el tránsito correspondiente, es decir desde el registro algebraico al gráfico, lo cual en el tiempo puede tener como consecuencia para el alumno, la pérdida del conocimiento matemático acerca de este objeto.

$$\begin{aligned} 4x - 2y - 6 &= 0 \quad / -2y \\ 4x - 6 &= 2y \quad / \frac{1}{2} \\ \textcircled{2} \underline{2x - 3} &= y. \end{aligned}$$

Realiza la correspondencia semántica y univocidad entre algunas de las unidades significantes elementales pertenecientes a la representación de la ecuación en su forma principal (registro algebraico), y la unidades significantes elementales en el registro de llegada, o sea a la unidad significativa $n=-3$ (coeficiente de posición), lo asocia con la unidad significativa $y=-3$, donde la recta intercepta al eje Y; a las unidades significantes variables, dependiente e independiente, las asocia con las coordenadas de x e y en el gráfico (ver *Figura 29*).



Luego, realiza un tratamiento a la expresión $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$, para probar si puede establecer alguna igualdad con los valores de las unidades significantes elementales x e y , y la pendiente 2 que calculó en la ecuación principal, solo obtiene una expresión compleja (ver *Figura 30*).

$$\frac{y+3}{y+3-0} = (y+3) \cdot \frac{2}{y+3}$$

Figura 30. Caso 2, ítem 5. Expresión que obtiene del tratamiento a la fórmula de la pendiente.

Finalmente, desiste de continuar, así lo declara en la entrevista, porque no recuerda de cómo realizar el procedimiento.

Si bien logra establecer algunas correspondencias entre las unidades significantes, solo lo hace de forma parcial, asimismo sucede con la univocidad semántica terminal entre algunas unidades significantes, resultándole un ejercicio difícil de resolver.

En este ítem, el alumno solo realiza algunas transformaciones en el registro algebraico, pero no logra el tránsito entre un registro y otro, es decir la conversión desde el registro algebraico al gráfico, esto se evidencia frente a la dificultad que presenta el alumno al tratar de trazar la recta, lo cual no realiza. A pesar de los problemas que evidencia este alumno para resolver este tipo de ítem, se puede observar que posee cierto conocimiento matemático, el cual le permite establecer estrategias para poder resolver la tarea, es decir, posee una baja comprensión del objeto.

En el último ítem, el sexto, el alumno declara no acordarse de cómo realizar el procedimiento que le permita representar la recta correspondiente a la ecuación dada, es decir la conversión desde el registro algebraico al registro gráfico, incluso afirma en la entrevista que le resultó un ejercicio difícil de resolver al igual que el ítem 5. Se puede concluir que no posee la comprensión del objeto.

Comentarios sobre el Caso 2

Este alumno presenta algunas dificultades para establecer la correspondencia entre algunas unidades significantes elementales de los registros, sobre todo desde el registro algebraico al gráfico, sin embargo quedó de manifiesto, en los cuatros primeros ítem, que establece parcialmente la correspondencia semántica, es decir, entre casi todas unidades significantes elementales. Se observa que cumple parcialmente, el criterio de univocidad semántica terminal, en la mayoría de los ítem del cuestionario. Con respecto a la existencia de conservación del orden de aprehensión entre las unidades significantes (ver *Tabla 10*), este no se observa en ninguno de los ítem. Al evidenciar la existencia parcial de dos de los tres criterios, el grado de no-congruencia es bajo.

Se puede afirmar que el alumno posee ciertos conocimientos matemáticos sobre el objeto ecuación de la recta, pues en algunos de los ítem propuestos en el cuestionario logró la representación del objeto en el registro de llegada, es decir el tránsito entre las representaciones semióticas no le resultó tan complejo, sin embargo, el manejo de un solo registro le significará a futuro, la posible pérdida del conocimiento matemático que tiene, según lo señala Duval (2004).

Tabla 10:

Presencia de los criterios de congruencia y de la conversión en el Caso 2.

	Ítem	Criterios de Congruencia			Realiza Conversión
		Cs	Uv	Co	
C A S O 2	1	Parcial*	Parcial**	No	Si
	2	Parcial*	Parcial**	No	Si
	3	Parcial*	Parcial**	No	Si
	4	Parcial*	Parcial**	No	No en la dirección propuesta
	5	Parcial*	No	No	No
	6	No	No	No	No

* Se observa la correspondencia semántica entre una o algunas de las unidades significantes elementales.

** Se observa que establece la correspondencia univoca entre una o algunas de las unidades semántica.

V.3 CASO 3

En el ítem 1 se observa que el alumno solo asocia la unidad significativa elemental x correspondiente al eje X , con la variable independiente $x=1$ en el registro de llegada (ver *Figura 31*).

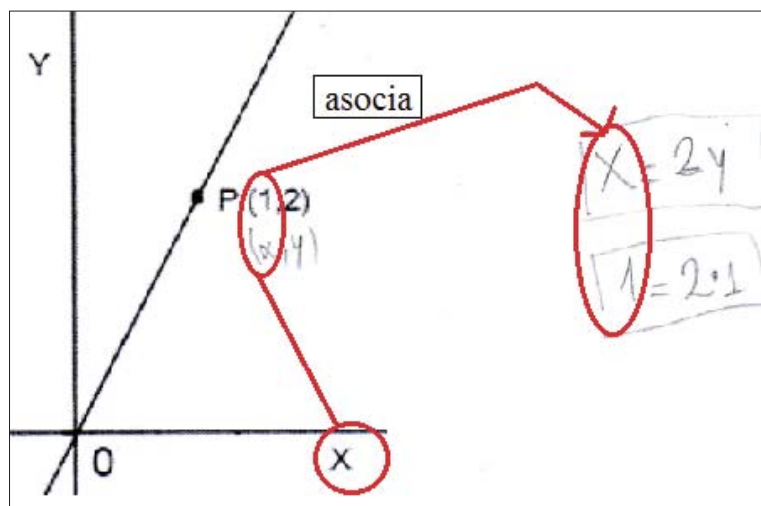


Figura 31. Caso 3, ítem 1. Asocia una unidad significativa elemental.

Con respecto a las demás unidades significantes elementales de los sistemas semióticos, el alumno no logra establecer la correspondencia semántica, tampoco se observa la univocidad semántica terminal, es decir, no hay una correspondencia uno a uno entre las unidades significantes.

En conclusión, no logra realizar la conversión desde el registro gráfico al registro algebraico, es decir, el tránsito de una representación a otra no le resultó espontáneo, lo cual demuestra que no posee la comprensión necesaria para llevar a cabo la tarea.

En el ítem 2, establece la correspondencia semántica entre la unidad significativa elemental x con la variable independiente y la unidad significativa elemental y con la variable dependiente, presentes en el registro de llegada (ver *Figura 32*).

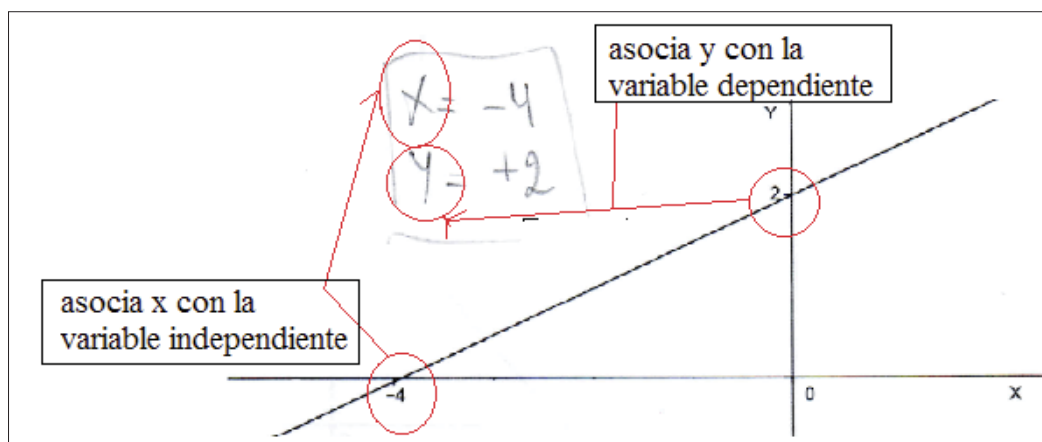


Figura 32. Caso 2, ítem 2. Correspondencia entre unidades significantes.

Con respecto a las demás unidades significantes elementales de los sistemas semióticos, el alumno no logra establecer la correspondencia semántica, tampoco se observa la univocidad semántica terminal, es decir, no hay una correspondencia uno a uno entre las unidades significantes. Plantea la ecuación de la forma $-4x=y$ como la ecuación que representa a la recta, aunque no se observa cómo obtuvo el valor de la constante m , quizás la dedujo de $x=-4$ que declara en su producción.

Este alumno presenta dificultades para identificar la totalidad de las unidades significantes elementales del registro de partida, asimismo para establecer las correspondencias semánticas con las unidades significantes del registro de llegada.

En conclusión, no logra realizar la conversión desde el registro gráfico al registro algebraico, es decir no establece la representación correspondiente a la recta en el registro de llegada, lo cual demuestra que no logró comprender el objeto matemático cuando abordó su estudio.

En el tercer ítem, el alumno establece la correspondencia semántica entre la unidad significativa x con la variable independiente y la unidad significativa y con la variable dependiente en el registro de llegada (ver Figura 33).

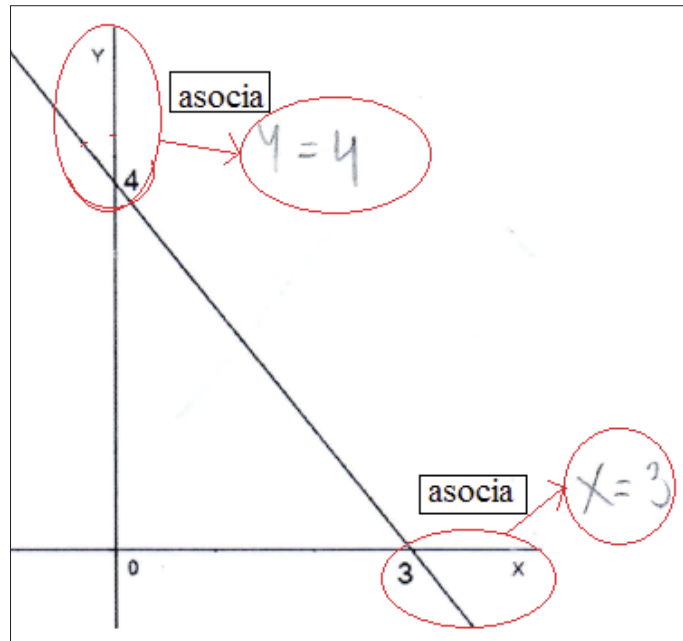


Figura 33. Caso 3, ítem 3. Correspondencia y univocidad semántica.

Con respecto a las demás unidades significantes elementales de los sistemas semióticos, el alumno no logra establecer la correspondencia semántica entre las unidades significantes elementales de cada registro, tampoco se observa la univocidad semántica terminal entre todas las unidades significantes de los registros considerados.

Plantea la ecuación $x=y$ seguido de un comentario: *"no me acuerdo de la ecuación"*.

En conclusión, no logra realizar la conversión desde el registro gráfico al registro algebraico, es decir no establece la representación de la recta en el registro de llegada, lo cual demuestra que no tiene comprensión del objeto en estudio, dicho de otro modo tuvo una pérdida del conocimiento matemático de este objeto, después de haberlo estudiado, posiblemente debido al tratamiento en un solo registro.

En el ítem 4, con respecto a las unidades significantes elementales de los sistemas semióticos, el alumno no las identifica, tampoco se observa que realice la correspondencia semántica ni la univocidad semántica terminal, es decir, no hay una correspondencia uno a uno entre las unidades significantes.

En este ítem, el alumno solo marca la gráfica II, se presume que puede deberse a que es la única diferente de las tres opciones o puede ser que lo relacione con el signo negativo del coeficiente de posición de la ecuación de la recta, $n=-3$ (ver Figura 34).

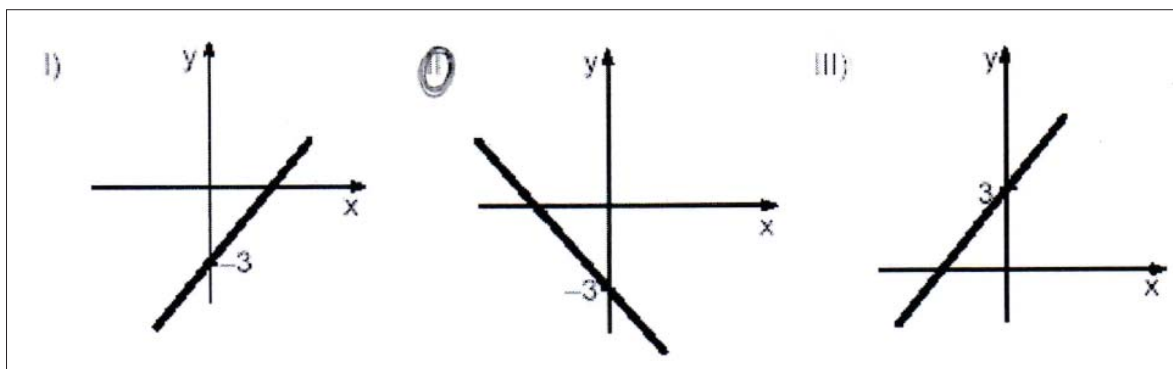


Figura 34. Caso 3, ítem 4. Selecciona erróneamente II) sin realizar tratamiento alguno.

Independiente de cuál sea el caso, se evidencia que no efectúa el tránsito entre los distintos sistemas semióticos de representación.

En conclusión, no posee una comprensión del objeto, siendo que lo había estudiado anteriormente.

En este ítem 5, el alumno transforma la ecuación general en otra expresión, para luego dar valores, arbitrariamente, a las unidades significantes elementales, variables x e y , en la ecuación que plantea (ver *Figura 35*); el objetivo es obtener dos valores para las variables independiente y dependiente, las cuales ubica en el plano cartesiano y por donde se trazaré la recta (ver *Figura 36*).

$$\begin{array}{lcl}
 4x - 2y - b = 0 & & 4 \cdot 1 - b = 2 \cdot 2 \\
 4x - b = 2y & & 4 - b = 2 \cdot 2 \\
 \downarrow & \downarrow & \boxed{2 = 4} \\
 1 & 2 &
 \end{array}$$

Figura 35. Caso 3, ítem 5. Tratamiento a la ecuación general.

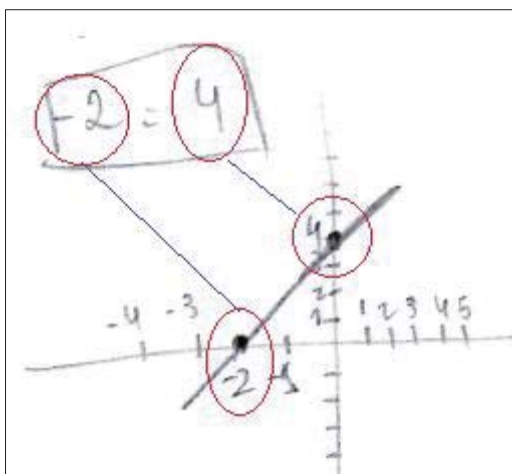


Figura 36. Caso 3, ítem 5. Representa los valores que determinó para las unidades significantes elementales x e y .

Si bien, el intento del alumno por graficar la recta que representa la ecuación dada, es un fracaso, se puede apreciar en este caso que identifica las unidades significantes elementales de las variables independiente y dependiente en la ecuación que obtiene, realizando la correspondencia semántica entre las unidades significantes elementales $x=-2$ e $y=4$, en los ejes cartesianos (ver *Figura 36*).

A partir de lo observado en la producción, el alumno no logra establecer la correspondencia semántica, tampoco se observa la univocidad semántica terminal, entre las unidades significantes elementales de los sistemas semióticos abordados en esta investigación. Como consecuencia, no representa la recta correspondiente a la ecuación del ítem 5, en el registro de llegada (gráfico).

Como conclusión se puede conjeturar que al alumno le resultó de un alto nivel de complejidad este tipo de conversión, evidenciando que no posee la comprensión del objeto matemático.

En el sexto ítem, el alumno realiza un tratamiento en la ecuación dada asignándole valores, arbitrariamente, a las unidades significantes elementales, variables dependiente e independiente de la ecuación de la recta, con el objetivo de obtener dos valores para las variables x e y (ver *Figura 37*).

$$y = -\frac{x}{3} - \frac{1}{13} = y = -\frac{x}{3} - \frac{3}{13}$$

$$- \frac{1}{3} \cdot y = -x - 3$$

$$\frac{3}{3} = -2 - 3$$

x	y
2	3

$$1 = -5$$

Figura 37. Caso 3, ítem 6. Tratamiento a la ecuación principal.

El intento del alumno por graficar la recta que representa la ecuación dada, es erróneo (ver *Figura 38*), aunque establece algunas correspondencias, pero no indica que comprenda lo que hizo.

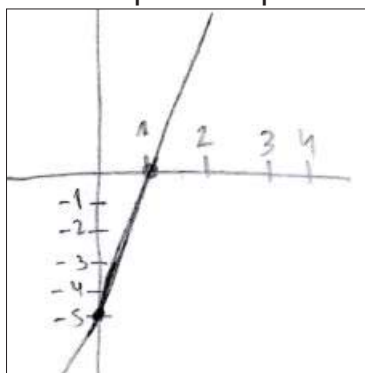


Figura 38. Caso 3, ítem 6. Traza una recta que no corresponde a la ecuación propuesta.

Se observa en la producción, que el alumno no logra establecer la correspondencia semántica entre las unidades significantes elementales, tampoco se observa la univocidad semántica terminal. No logra transitar de un registro a otro ni representar la recta correspondiente a la ecuación dada. Se puede concluir que no posee una comprensión del objeto ya estudiado, o sea tuvo pérdida del conocimiento ecuación de la recta.

Comentarios sobre el Caso 3

Este alumno presenta muchas dificultades para identificar las unidades significantes elementales tanto en el registro algebraico como en el registro gráfico, así también para establecer la correspondencia entre estas, si bien se observó que en tres ítem logra establecer parcialmente la

correspondencia semántica entre algunas unidades significantes elementales, en algunos de estos casos comete errores en los valores de ellas. Con respecto a la univocidad semántica terminal, no se observa que cumpla este criterio en ninguno de los ítem del cuestionario, tampoco existe conservación del orden de aprehensión entre las unidades significantes (ver *Tabla 11*). Al no evidenciar la existencia de estos tres criterios, el grado de no-congruencia es grande.

Se puede afirmar que el alumno no tiene los conocimientos matemáticos necesarios sobre el objeto ecuación de la recta, pues en ninguno de los ítems propuestos en el cuestionario logra realizar la representación del objeto en el registro de llegada, es decir el tránsito entre las representaciones semióticas no es espontáneo para este alumno, siendo de un nivel de dificultad muy alto, como lo plantea Duval (2004).

Tabla 11:

Presencia de los criterios de congruencia y de la conversión en el Caso 3.

C A S O 3	Ítem	Criterios de Congruencia			Realiza Conversión
		Cs	Uv	Co	
	1	Parcial *	No	No	No
	2	Parcial *	No	No	No
	3	Parcial *	No	No	No
	4	No	No	No	No
	5	No	No	No	No
	6	No	No	No	No

* Se observa la correspondencia semántica entre una o algunas de las unidades significantes elementales.

V.4 CASO 4

En el ítem 1, el alumno solo establece la correspondencia entre las unidades elementales variable independiente (x) y la variable dependiente (y) en los ejes X e Y, respectivamente.

Al parecer conoce la pendiente, pero solo en el registro algebraico, pues realiza un tratamiento con la expresión $m = \frac{2-0}{1-0}$, determina el valor de la

constante m , la cual reemplaza en la expresión algebraica que plantea como ecuación de la recta (ver *Figura 39*).

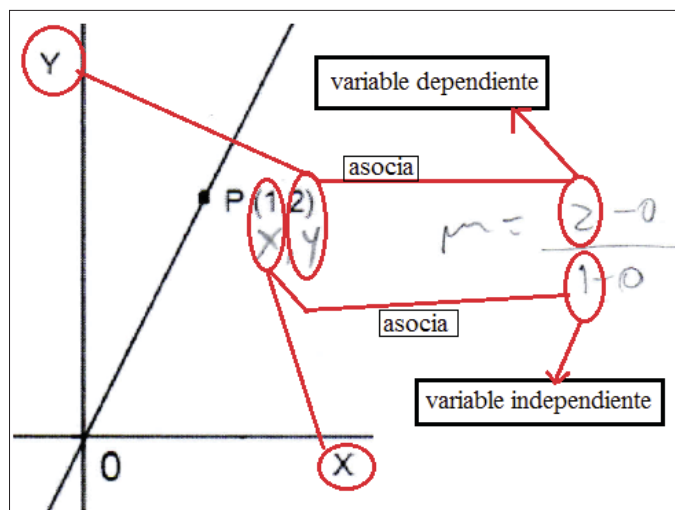


Figura 39. Caso 4, ítem1. Correspondencia entre las unidades significantes.

No realiza la correspondencia entre el sentido e inclinación de la recta con el signo positivo del valor de la constante $m=2$, que obtuvo.

Con respecto a la unidad significativa $y=0$, donde la recta intercepta al eje Y, no se observa que lo identifique ni que establezca la correspondencia con el coeficiente de posición n , en el registro de llegada. Posiblemente se deba a que, como él mismo expresa en su producción: *"me lo aprendí para la prueba"*. Se podría decir que su aprendizaje fue temporal y sin llegar a comprensión del objeto matemático.

Este alumno, no realiza la conversión entre los sistemas semióticos presentes en este ítem, o sea, no logra representar la recta como una ecuación.

En el segundo ítem, no establece la correspondencia entre las unidades elementales variable independiente (x) y la variable dependiente (y) en los ejes X e Y, respectivamente, sin embargo identifica sin problemas las coordenadas x e y de los puntos, esto se observa cuando reemplaza estas unidades significantes elementales para calcular la constante m , a través del tratamiento en la expresión $m = \frac{0-2}{-4-0}$. Tampoco realiza la correspondencia entre el sentido e inclinación de la recta con la proposición $m > 0$, ya que $m = \frac{2}{4}$ (ver *Figura 40*).

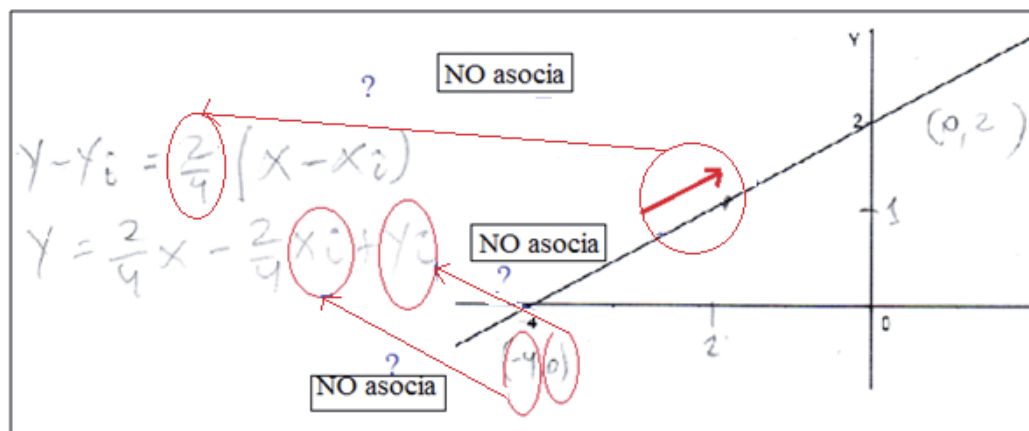


Figura 40. Caso 4, ítem 2. No se observa correspondencia semántica entre las unidades significantes elementales.

Con respecto a la unidad significativa $y=2$, donde la recta intercepta al eje Y, no establece la correspondencia con el coeficiente de posición en la representación del registro de llegada. Esto se evidencia en la ecuación de la forma $y - y_i = \frac{2}{4}(x - x_i)$, que plantea para determinar la ecuación de la recta (ver Figura 40), que finalmente no logra obtener, debido a que no asocia los valores de las unidades significantes $x=-4$ e $y=0$ con las variables x_i e y_i lo que resulta contradictorio, pues para el cálculo de la pendiente los utiliza correctamente.

El alumno en este ítem evidencia dificultades para realiza la conversión entre los sistemas semióticos de representación. Esto indica que no tiene una comprensión del objeto en estudio, ya que no logra asociar las unidades significantes elementales que componen cada registro.

En el ítem 3, se observa que establece la correspondencia entre las unidades elementales variable independiente (x) y la variable dependiente (y) en los ejes X e Y, respectivamente (ver Figura 41).

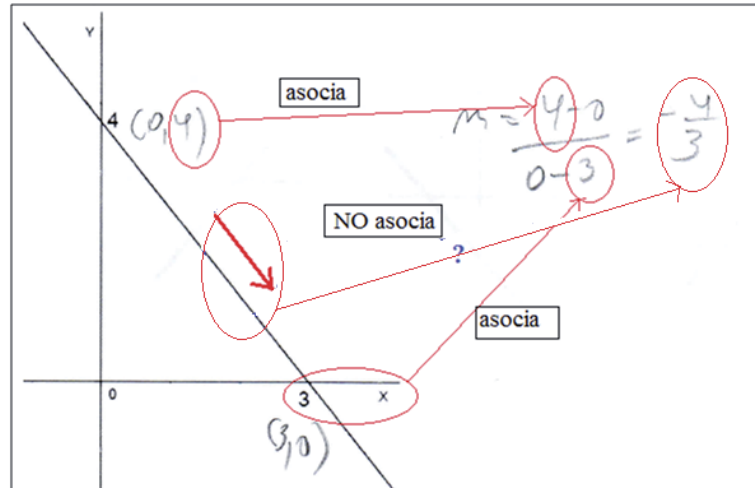


Figura 41. Caso 4, ítem 3. Correspondencia y univocidad semántica de algunas unidades elementales.

No se observa que realice la correspondencia entre el sentido e inclinación de la recta con la proposición $m < 0$. Solo reconoce la unidad significativa pendiente en el registro algebraico (ver *Figura 41*), pues determina el valor de la constante m a través del tratamiento de la expresión $m = \frac{4-0}{0-3}$.

Con respecto a la unidad significativa elemental y , donde la recta intercepta al eje Y , no se observa que lo identifique ni que establezca la correspondencia con el coeficiente de posición n , en el registro de llegada. En este ítem, el alumno no plantea ninguna ecuación de la recta.

En este caso, no se observa que realice el tránsito entre los sistemas semióticos de representación debido a que no reconoce todas las unidades significantes de los registros planteados, lo que dificulta la asociación entre estas unidades. Esto muestra de que no posee una comprensión del objeto en estudio.

Ítem 4. Con respecto a las unidades significantes elementales de los sistemas semióticos, el alumno no logra establecer la correspondencia semántica, tampoco se observa la univocidad semántica terminal, es decir, no hay una correspondencia uno a uno entre las unidades significantes.

En este ítem, solo marca la gráfica II, no siendo posible determinar con certeza las razones del porqué la elección de esa gráfica, ya que no existe evidencia alguna en el ítem de esta producción (ver *Figura 42*).

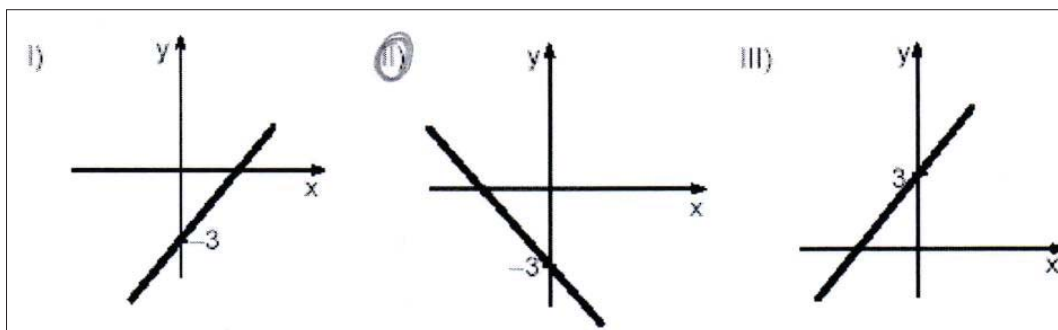


Figura 42. Caso 4, ítem 4. Selecciona erróneamente II) sin realizar tratamiento alguno.

En conclusión, se evidencia que no logra realizar el tránsito entre los distintos sistemas semióticos de representación, quedando de manifiesto que no posee una comprensión del objeto, siendo que ya había abordado su estudio anteriormente.

En el quinto ítem, el alumno realiza un tratamiento erróneo, en la ecuación dada, obteniendo una expresión que no corresponde a la recta propuesta. De esta expresión extrae el valor de la variable independiente $x=4$ y de la variable dependiente $y=3$, los cuales ubica en el plano cartesiano y correspondería a un punto en este plano (ver *Figura 43*).

$$4x - 2y = 6$$

$$4x = 3y$$

Figura 43. Caso 4, ítem 5. Tratamiento a la ecuación general.

Con respecto a las unidades significantes elementales de los sistemas semióticos, el alumno no logra establecer la correspondencia semántica, tampoco se observa la univocidad semántica terminal, es decir, no hay una correspondencia uno a uno entre estas unidades significantes (ver *Figura 44*).

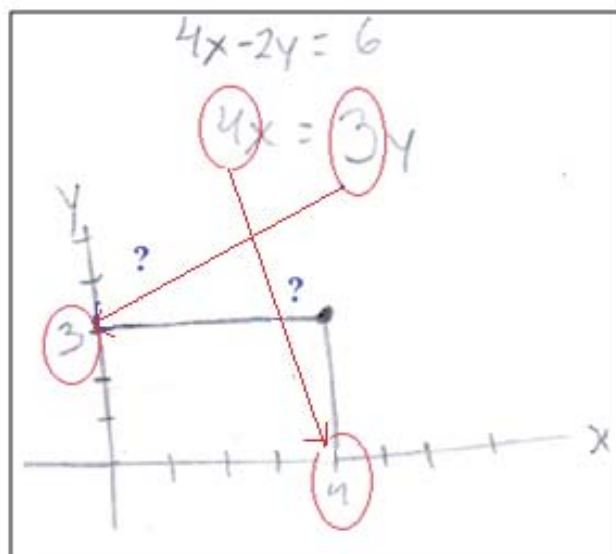


Figura 44. Caso 4, ítem 5. Relación que establece a partir del tratamiento de la ecuación.

Se puede afirmar que el alumno no posee la comprensión del objeto matemático, ya que no logra representar la recta correspondiente a la ecuación en su forma general.

En el sexto ítem, el alumno lo aborda realizando un tratamiento en la ecuación dada, obteniendo una expresión (ver Figura 45) que no corresponde a la recta solicitada. De esta expresión extrae el valor para las unidades significativas, variable independiente $x = -3$ y la variable dependiente $y = 3$, los cuales ubica en el plano cartesiano dibujando un punto (ver Figura 46).

$$y = \frac{-x - 3}{3}$$

$$3y = -x - 3$$

Figura 45. Caso 4, ítem 6. Tratamiento a la ecuación principal de la recta.

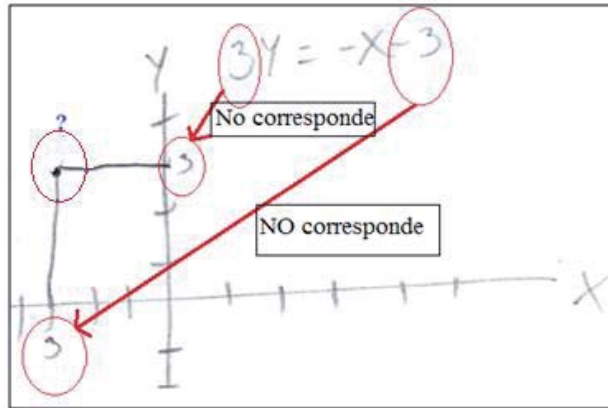


Figura 46. Caso 4, ítem 6. Correspondencia semántica errónea.

Con respecto a las unidades significantes elementales de estos sistemas semióticos, el alumno no logra establecer la correspondencia semántica entre las unidades significantes elementales, tampoco se observa la univocidad semántica terminal. Por tanto no logra representar la recta correspondiente a la ecuación principal, dada, en el registro gráfico.

A partir de lo realizado por el alumno se puede concluir que no logra el tránsito de un registro a otro, resultándole difícil el resolver esta tarea, esto se puede deber a que no posee la comprensión del objeto en estudio.

Comentarios sobre el Caso 4

Durante todo el desarrollo del cuestionario este alumno presenta grandes dificultades para identificar las unidades significantes elementales de los registros algebraico y gráfico, así también para establecer la correspondencia entre estas, si bien se puede apreciar la observación que en tres ítems logra establecer parcialmente la correspondencia semántica entre una de las unidades significantes elementales, en algunos de estos casos además comete errores en el tratamiento de las representaciones. Con respecto a la univocidad semántica terminal, no se observa que cumpla este criterio en ninguno de los ítem del cuestionario, tampoco existe conservación del orden de aprehensión entre las unidades significantes (ver *Tabla 12*). Al no evidenciar la existencia completa de estos tres criterios, el grado de no-congruencia es grande.

Se puede inferir que el alumno no tiene los conocimientos matemáticos necesarios sobre el objeto ecuación de la recta, pues en ninguno de los ítems propuestos en el cuestionario logra realizar la representación del

objeto en el registro de llegada, es decir el tránsito entre las representaciones semióticas no es espontáneo para este alumno, siendo de un nivel de dificultad muy alto, como lo plantea Duval (2004).

Tabla 12:

Presencia de los criterios de congruencia y de la conversión en el Caso 4.

C A S O 4	Ítem	Criterios de Congruencia			Realiza Conversión
		Cs	Uv	Co	
	1	Parcial *	No	No	No
	2	Parcial *	No	No	No
	3	Parcial *	No	No	No
	4	No	No	No	No
	5	No	No	No	No
	6	No	No	No	No

* Se observa la correspondencia semántica entre una o algunas de las unidades significantes elementales.

CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES

El análisis e interpretación de los resultados permiten mostrar las dificultades que los alumnos, participantes de esta investigación, presentan cuando enfrentan la tarea de articular distintas representaciones de la ecuación de la recta.

Este estudio permite tener una mejor comprensión de por qué se producen las deficiencias en los alumnos al representar en distintos registros el objeto matemático, y en qué momento del proceso las dificultades se presentan.

Esta investigación reveló que una de las causas que origina el problema presente en el proceso de conversión, es la no identificación de las unidades significantes elementales correspondientes a cada registro semiótico, lo cual se convierte en un obstáculo para articular los registros abordados en este trabajo, algebraico y gráfico. Así queda evidenciado en los resultados obtenidos por los cuatro casos que componen este estudio y confirmado por las respuestas dadas en la entrevista por dos de estos casos.

También se aprecia la no discriminación entre la variable independiente de la dependiente, esto se hace evidente en dos de los casos, cuando asignan arbitrariamente y de forma simultánea, valores a estas dos variables, representando en el gráfico el resultado obtenido para x e y . A partir de esto se puede presumir que el estudio realizado por ellos, en años anteriores sobre las variables y su relación, fue un aprendizaje temporal, siendo esto una posible causa de la formación del obstáculo didáctico, presente en estos alumnos.

Por otra parte, de las 6 preguntas del cuestionario, las tres primeras se enfocan en la conversión desde el registro gráfico al algebraico, siendo realizada solo por uno de los cuatro casos. Los otros tres casos mostraron tener alguna noción de la ecuación que se pedía, no lograron establecer la ecuación que representa a la recta.

En las preguntas 4, 5 y 6 del cuestionario, se solicita representar la ecuación de la recta en el registro gráfico. En el ítem 4 quedó de manifiesto por dos de los casos, que solo manejaban un tipo de registro, ya que abordaron este ejercicio desde las gráficas propuestas y no de la ecuación de la recta planteada en la pregunta. Los otros dos casos solo se limitaron a expresar que no recordaban cómo resolverlo. De los dos

últimos ítems ninguno de los alumnos logró graficar la recta que correspondía a la ecuación propuesta.

Este estudio sobre la ecuación de la recta muestra la complejidad de este objeto para los alumnos en la enseñanza media, pues los errores observados develan que existe más uso de un tipo de registro que otro. Lo más probable es que no haya existido una práctica constante en los distintos registros del objeto matemático, en sus experiencias de enseñanza y aprendizaje, quedando en evidencia que en todos los casos estudiados existe ausencia de este conocimiento matemático.

El proceso de conversión, es una actividad mecanizada, quizás esto se deba a que el estudio de la ecuación de la recta, durante la enseñanza media no tenga como uno de sus objetivos la coordinación entre distintos registros, sino más bien sea una enseñanza cargada de contenidos sin un mayor análisis y comprensión por parte de los alumnos.

A partir de lo expuesto anteriormente, se puede concluir que los alumnos no mostraron aprehensión del objeto ecuación de la recta, posiblemente debido a la ausencia de una movilización simultánea entre las representaciones, lo cual les significó dificultades en la coordinación de los registros. Producto de esto se sugiere reformular el enfoque que se le da a la enseñanza, el cual está centrada en los contenidos y la cantidad de estos que se puedan abordar. El docente debe proponer al alumno situaciones que involucren la realización de conversiones entre distintos registros, llevar a cabo diversos tratamientos en cada uno de ellos, tal que le permita al alumno diferenciar el objeto de sus diversas representaciones semióticas.

Este trabajo pretende entregar al docente posibles causas que dan origen a los problemas que presentan los alumnos, cuando deben representar en distintos registros la ecuación de la recta. Considerando esto se deja como propuesta al docente la elaboración de una secuencia didáctica que le permita al alumno realizar la conversión entre distintos registros de forma consciente y analítica, de tal manera que él sea protagonista de su aprendizaje.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Agencia de Calidad de la Educación. *Resultados SIMCE 2013*. Chile.

Recuperado de https://s3-us-west-2.amazonaws.com/resultados-simce-2013/Conferencia_Nacional_ResultadosSimce2013.pdf

Agencia de Calidad de la Educación. *Informe Técnico SIMCE 2012*, p.4.

Chile. Recuperado de <http://www.agenciaeducacion.cl/investigadores/informe-tecnico-simce/>

Baptista, P, Fernández, C. & Hernández, R. (1997). *Metodología de la*

Investigación. Recuperado de http://www.upsin.edu.mx/mec/digital/metod_invest.pdf

Bell, E. (2011). *Historia de las Matemáticas*. México: Fondo de Cultura Económica.

Boyer, C. (1999). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza

D'Amore, B. (2006). *Conclusiones y Perspectivas de Investigación Futura*.

Relime. Número Especial, 301-306.

Delval, J. (2001). *Descubrir el Pensamiento de los Niños: introducción a la práctica del método clínico*. España: Paidós Ibérica.

DEMRE (2012). Publicación del documento N°9 del 1 de septiembre de

2011. PSU. Recuperado de [http://www.demre.cl/text/publicaciones/2012/septiembre/publicacion12\(01092011\).pdf](http://www.demre.cl/text/publicaciones/2012/septiembre/publicacion12(01092011).pdf)

DEMRE. (2014). *Temario: Prueba Obligatoria de Matemática*.

http://www.demre.cl/temario_matem_p2014.htm.

- DEMRE (2014). *Publicación del documento N°15 del 5 de septiembre de 2013*. PSU. Recuperado de [http://www.demre.cl/text/publicaciones/2013/septiembre/publicacion18\(06092012\).pdf](http://www.demre.cl/text/publicaciones/2013/septiembre/publicacion18(06092012).pdf)
- Duval, R. (1992). *Gráficas y Ecuaciones. La articulación de dos registros*. Antología en Educación Matemática, p.128. IPN México: Cinvestav.
- Duval, R. (1998). *Registros de Representación Semiótica y Funcionamiento Cognitivo del Pensamiento*. En F. Hitt (Ed.), Investigaciones en Matemática Educativa II, 173-201. Departamento de Matemática Educativa. México: Cinvestav.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano*. Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía, Colombia.
- Gascón, J. (2002). *Geometría Sintética en la ESO y Analítica en el Bachillerato: ¿dos mundos completamente separados?*. Revista SUMA 39, 13-25.
- Lehmann, Ch. (1995). *Geometría Analítica*. México: Limusa.
- Murdoch, D. (1968). *Geometría Analítica con Vectores y Matrices*. México: Limusa.
- OECD. Better Life. Index. Informe de la Educación en Chile. Recuperado de <http://www.oecdbetterlifeindex.org/es/topics/education-es/>
- Olfos, R., Silva, H., Soto, D. (2005). *Renovación de la Enseñanza del Álgebra Elemental: un aporte desde la didáctica*. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

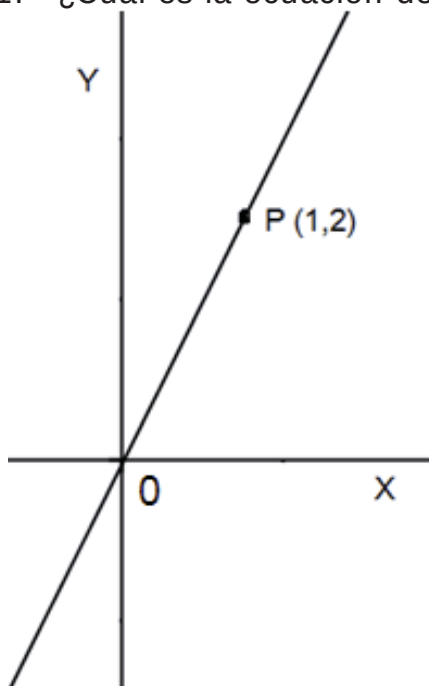
- Ospina, D. (2012). *Las Representaciones Semióticas en el Aprendizaje del Concepto Función Lineal* (Tesis inédita de Maestría). Universidad Autónoma de Manizales
- PISA (2012). *Informe Español*, pp34-42. Recuperado de <http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pisa2012/pisa2012lineavolumeni.pdf?documentId=0901e72b81786310>
- Resultados PISA 2012 Chile. Recuperado de <https://s3-us-west-2.amazonaws.com/documentos-web/Informes/Resultados+PISA+2012+Chile.pdf>
- Torregrosa, G., Quesada, H. (2007). *Coordinación de Procesos Cognitivos en Geometría*. Relime 10 (002), 275-300.

ANEXOS

ANEXO 1: CUESTIONARIO ECUACION DE LA RECTA

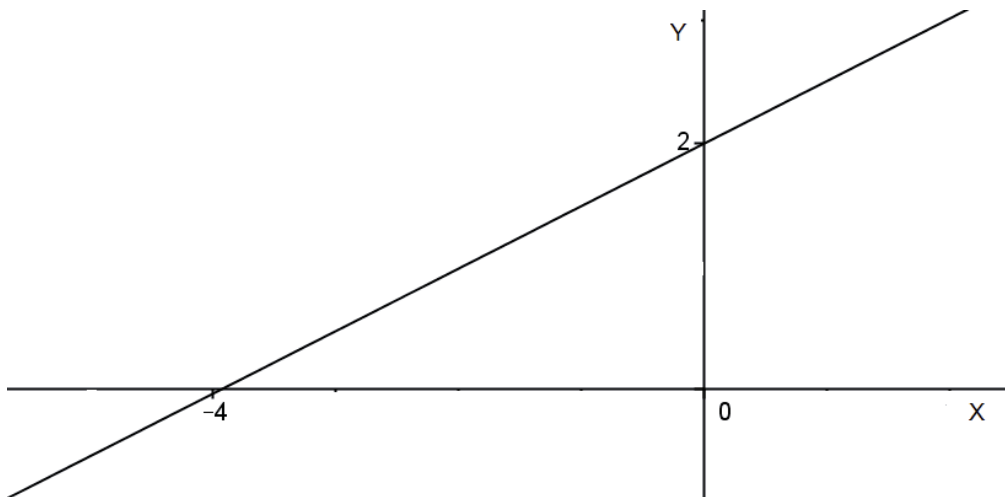
En el siguiente ejercicio anota el desarrollo y el procedimiento realizado para obtener lo solicitado.

1. ¿Cuál es la ecuación de la recta que representa la gráfica?



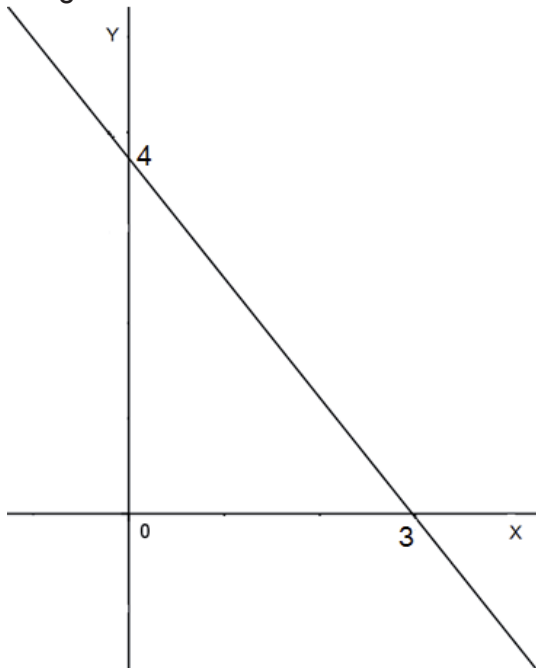
En el siguiente ejercicio anota el desarrollo y el procedimiento realizado para obtener lo solicitado.

2. ¿Cuál es la ecuación de la recta que representa la gráfica?



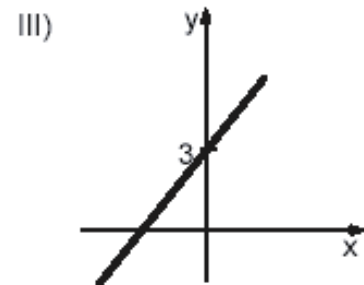
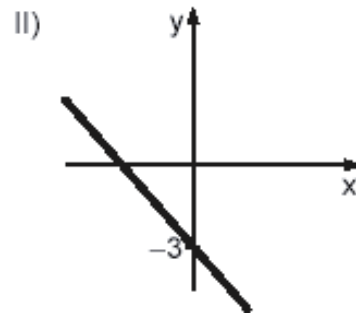
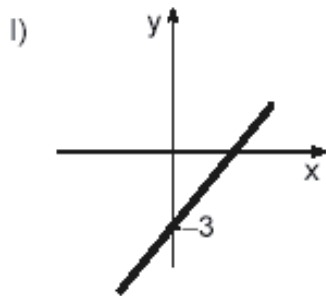
En el siguiente ejercicio anota el desarrollo y el procedimiento realizado para obtener lo solicitado.

3. ¿Cuál es la ecuación de la recta que representa la gráfica?



En el siguiente ejercicio anota el desarrollo y el procedimiento realizado para obtener lo solicitado.

4. ¿Cuál(es) de las siguientes gráficas representa(n) la ecuación $y = ax - 3$?



En el siguiente ejercicio anota el desarrollo y el procedimiento realizado para obtener lo solicitado.

5. Graficar la recta cuya ecuación es $4x - 2y - 6 = 0$
(sin utilizar la tabla de valores)

En el siguiente ejercicio anota el desarrollo y el procedimiento realizado para obtener lo solicitado.

6. Graficar la recta, cuya ecuación es $y = -\frac{x}{3} - 1$
(sin utilizar la tabla de valores)

ANEXO 2: ENTREVISTAS DE LOS ALUMNOS

2.1 Caso 1

Ítem 1:

1. P: ¿Qué es lo que está haciendo ahora?

2. A1: "estoy tratando de recordar cómo era la ecuación" (se refiere a la fórmula para calcular la pendiente dados dos puntos)

3. "...porque la pendiente, si mas no recuerdo es 1 menos 0 en el numerador y dos menos cero en el denominador" (indica los puntos donde la ecuación interseca a los ejes (0,0) y (1,2)),

4. "...entonces la pendiente sería $\frac{1}{2}$,..., lo que sé es esto" (escribe: $y - y_1 = m(x - x_1)$)

5. "...esta es la otra ecuación, el tema es que $y_2 - y_1$, entonces y_1 sería 1, acá x_1 sería 2, entonces lo que debería hacer es reemplazar $\frac{1}{2}$ de x " (alude a la formula de la ecuación dado un punto y su pendiente, reemplaza la pendiente $m = \frac{1}{2}$ y la multiplica por x , luego sigue explicando)

6. P: ¿qué está reemplazando?

7. A1: "el y_1 con el x_1 q puse en esta ecuación" (alude a la ecuación para calcular la pendiente dado dos puntos).

8. P: esos valores ¿de dónde los sacó? (alude a los puntos de la recta)

9. A1: "de la recta que se intercepta acá" (señala la recta que pasa por el origen del plano cartesiano en el primer ítem)

10. "...y de los puntos que se toman acá" (señala el punto (0,0) y (2,1), reemplaza los valores en la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$ y hace los cálculos para despejar, queda pensando y luego dice)

11. "...falta algo"

12. P: ¿y esa expresión que representa? (alude a $y - y_1 = m(x - x_1)$)

13. A1: " m la pendiente"

14. P: pero toda la expresión ¿qué es lo que representa?

15. A1: "creo que es la ecuación general de la recta"

16. P: ya

17. A1: la verdad es que no me acuerdo mucho.

18. P: pero ¿representa a la ecuación de la recta?

19. A1: "eso es lo que no me acuerdo mucho" (el alumno observa la gráfica, marca con una línea segmentada las coordenadas del punto (2,1) en la gráfica)

20. **P: ¿cuál sería su ecuación?, ¿la encontró?**

21. A1: "si, pero creo que en algo falle, es que no recuerdo si esto es así o así..." (escribe la expresión para calcular la pendiente dado dos puntos, $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; señalando que puede utilizar cualquiera de las dos fracciones)

22. "...reemplazando queda $\frac{1}{2} = y$; no me sirve, como haga esta ecuación

23. igual me va a dar $\frac{1}{2}$, entonces la pendiente es $\frac{1}{2}$ "

(luego escribe otra ecuación, pero utilizando la misma expresión $y_1 = m(x - x_1)$, reemplaza $y = -1$ y $x = -2$ con la pendiente $\frac{1}{2}$ en la ecuación $y - (-1) = \frac{1}{2}(x - (-2))$, obteniendo la ecuación $y = \frac{x}{2}$)

24. **P: ¿a qué llega?**

25. A1: $y = \frac{x}{2}$

26. **P: ¿Cuál es la duda que tiene?**

27. A1: "lo que pasa es que no tengo muy claro cómo era la ecuación..o sea recuerdo que esto era así" (señalando la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$)

28. "...y esto, creo que era así, como lo hice acá" (señalando la expresión para calcular la pendiente y el cálculo que hizo)

29. **P: ¿Qué es lo es eso?**

30. A1: "esto es para sacar la pendiente, esto es la ecuación" (señalando la expresión $y - y_1 = m(x - x_1)$)

31. "...entonces yo reemplace.."...(señala los valores de la pendiente y el punto (2,1))

32. "... pero llego a que $y = \frac{x}{2}$, ahí no recuerdo como seguir,...esta ecuación" (señala $y - y_1 = m(x - x_1)$)

33. "...es esto" (señala $y = \frac{x}{2}$)

34. **P: ¿esto es lo que piden?**

35. A1: "claro si esta es la ecuación de la recta" (señala $y - y_1 = m(x - x_1)$)

36. "...y me dio eso" (señala $y = \frac{x}{2}$)

37. "...no recuerdo bien eso" (alude a obtener la ecuación que piden)

Ítem 2

(el alumno observa el items1 y lo compara con el segundo ítems, comienza a anotar $x_1 = -4$, $x_2 =$, $y_1 = 2$, $y_2 = 0$ en la gráfica, el alumno se da

cuenta que el punto (0,0) no pertenece a la recta y que el punto (-4,2) tampoco pertenece a la recta, solo considera esos valores visibles en la grafica y los junta como un solo punto)

38. **P: ¿ahí que está anotando?**

39. A1: "reemplazando y_2 , y_1 , para anotar al tiro la pendiente..."

40. **P: ¿a qué corresponde y_2 ?, ¿a que es igual?**

41. A1: " $y_2=0$ " (designa $y_2=0$ e $y_1=2$, va anotando los valores en la expresión para calcular la pendiente)

42. **P: lo identifica con el cero, ya, ¿y el y_1 ?**

43. A1: "el y_1 es el punto 2...y acá el x_1 sería el -4....para sacar la ecuación de la recta, igual que antes daría eso"...(señala $\frac{0-2}{0--4}$)

44. "... y queda $-\frac{1}{2}$, igual a la pendiente" (luego vuelve a mirar lo que hizo en el items1)

45. "...voy aplicar la misma ecuación: $y-y_1=m(x-x_1)$ " (luego reemplaza los valores del punto (-4,2) y $m=-\frac{1}{2}$, en la ecuación y va desarrollando, al momento de reemplazar $x_1=-4$, lo anota como $x_1=4$, luego obtiene $y=-\frac{x}{2}$)

Ítem 3

(el alumno comienza anotando $x_1=3$, $y_1=4$, $x_2=0$, $y_2=0$ al lado de los valores que se encuentra en la gráfica, repitiendo el mismo error que cometió en el ítems 2...luego anota los valores que ya designo para calcular la pendiente, la cual le dio $\frac{4}{3}$...continúa reemplazando $m=\frac{4}{3}$, $x_1=3$, $y_1=4$ en la ecuación $y-y_1=m(x-x_1)$)

46. **P: cuénteme ¿qué hizo en la primera parte?**

47.A1: "hice la misma ecuación para calcular la pendiente y ahora estoy haciendo la misma otra ecuación"

(señala la ecuación $y-y_1=m(x-x_1)$)

48. **P: ¿y el 4 o no?...**

49. A1: "sí"

50. **P: ¿el 4 y un 3?...**

51. A1: "sí, son mis puntos"

(señala en la gráfica el punto (0,4) y el (3,0) pero como valores 4 y 3 no como puntos, también señala el otro punto que utiliza para calcular la pendiente el punto (0,0))

52. **P: ¿y en la expresión cómo traspasó esos valores?, en la ecuación que anoto ahí**

53. A1: "yo le di el valor $x_1=3$, $y_1=4$, $x_2=0$, $y_2=0$, luego reemplazo y obtengo la pendiente" (señalando la expresión para calcular la pendiente)

54. **P: ¿y en esa?** (señalando $y - (-4) = \frac{4}{3}(x - 3)$)

55. A1: "...ah es que esto era, esta misma ecuación" (escribe la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$)

56. **P: entonces ¿el x_1 y el y_1 son las coordenadas?**

57. A1: "sí, son las coordenadas de la ecuación"

58. **P: y Ud. me dice que allá en la ecuación es $y - 4$?**

59. A1: "ah...me equivoque, era $y - 4$ como 4 es positivo" (lo borra y reemplaza $y - 4 = \frac{4}{3}x - 4$, obteniendo $y = \frac{4}{3}x$)

60. "no me acuerdo bien, pero si sé que con estos datos se puede obtener esto" (señala $y = \frac{4}{3}x$)

Ítem 4

61. **P: ¿Qué es lo que está haciendo ahí?**

62. A1: "estaba buscando otro número para hacer mi ecuación" (señalando las gráficas)

63. **P: ¿porqué?, ¿qué dice la pregunta?**

64. A1: "que ecuación llega a $y = ax - 3$, entonces lo que haría sería tomar, crear un número acá..." (señala la primera gráfica donde la recta intercepta al eje X y continúa)

65. "...entonces sigo igual que antes, este sería mi $x_2...a$ " (comienza a escribir en la gráfica 1: x_1, x_2, y_1, y_2)

66. **P: ¿ese a es por la ecuación que le dan?**

67. A1: "es un número cualquiera, en este caso voy a tomar a ..." (comienza a reemplazar $x_1=a$, $x_2=0$, $y_1=-3$, $y_2=0$ en la expresión para calcular la pendiente dados dos puntos..obtiene $m = -\frac{3}{a}$)

68. "...ya y aquí saque mi pendiente, llegue a ese caso..." (señala $-\frac{3}{a}$) 69. "...pendiente negativa y ahora hago la ecuación..." (comienza a escribir la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$)

70. "...voy a reemplazar al tiro..." (reemplaza $y - (-3) = -\frac{3}{a}(x - a)$, luego desarrolla: $y + 3 = -\frac{3}{a}x...$)

71. **P: una pregunta..ese -3 que aparece ahí en la expresión...¿de dónde apareció?** (señalando al -3 de la pendiente y el $y_1 = -3$)

72. A1: "el -3 de acá..." (señala el -3 donde la recta intercepta al eje Y)

73. "...y este -3 de la ecuación para sacar la pendiente..." (señalando el numerador de la pendiente $(0-3)$, luego continúa con el desarrollo de la ecuación, obteniendo $y + 3 = -\frac{3}{a}x - 3$)

74. **P: ¿para qué buscó esa ecuación?**

75. A1: "¿esta ecuación?...es la ecuación de la recta, lo que no fue inteligente es sacar una pendiente así" (señala la letra a que él había anotado en la gráfica)

76. "...esta es otra ecuación, voy a tomar mi pendiente igual a ..."

(escribe otra ecuación $y - -3 = ax$, luego cambia el a que había anotado en la gráfica1 por una letra b , reemplaza $x_1 = b$ en la ecuación: $y - -3 = ax - ab$, obteniendo: $y = ax - ab - 3$)

77. "...la primera no llega en ningún caso, es que mi problema es esta multiplicación que se saca acá... (señala ab)... porque si esto no estuviera, el ab , puede ser az o lo que sea, pero como esta multiplicación se genera de esta ecuación" (señala la ecuación $y - (-3) = -\frac{3}{a}(x - a)$)

78. **P: ¿está tratando de buscar entonces, la ecuación de la recta, de esa recta?** (señala la gráfica1)

79. A1: "sí, tampoco me dan ningún número acá" (señala el punto donde la recta intercepta al eje X)

80. **P: pero si observa solamente la ecuación que le dan en la pregunta, ¿Ud. podría determinar que rectas podrían representar la ecuación?**

81. A1: "yo creo que si...yo diría que esta dos rectas" (señala la gráfica1 y la gráfica2)

82. "la 1 y la 2, porque la pendiente es negativa, en este caso la pendiente va hacia abajo, si se da cuenta" (señala con los dedos sobre las gráficas 1 y 2 recorriendo el trazo de las rectas desde arriba hacia abajo, ambas con sentido contrario)

83. ".... entonces acá dice -3" (señala el -3 que corresponde al coeficiente de posición en la ecuación que se da en el enunciado $y = ax - 3$)

84. "...y yo podría deducir que las primeras dos se pueden..así que estoy haciendo algo mal acá" (se refiere a las dos ecuaciones que obtuvo anteriormente)

85. **P: entonces, con las primeras dos podría, pero ¿porqué?**

86. A1: "porque la pendiente es negativa...se ve que es negativa"
(señala la gráfica y con el dedo sigue el sentido de cada una de las rectas 1 y 2, de arriba hacia abajo)

87. **P: ¿ambas son negativas?...(señalando las gráficas 1 y 2)**

88. A1: "ah no, perdón...esta es positiva" (señala la gráfica3)

89. "...esta es positiva" (señala la gráfica1)

90. "...y esta es negativa" (señala la gráfica2)

91. **P: ¿solamente esa** (se refiere a la gráfica2) **podría representar la ecuación?**

92. A1: "sí, solamente esa..."

93. **P: ¿porqué dice que la pendiente es negativa?**

94. A1: "por como esta inclinada...su inclinación así"

(señalando con el lápiz el sentido e inclinación de la recta en el gráfico2, de izquierda a derecha hacia abajo)

95. **P: ¿pero con qué lo relaciona en la ecuación?...me dice que en la ecuación aparece la pendiente negativa**

96. A1: "porque hay un -3" (señala el intercepto -3 que aparece en la ecuación del enunciado)

97. "puedo relacionar el -3 con una pendiente negativa y por eso podría ser la 2"

98. **P: ah ya, entonces dice que es solo la 2...marque la dos, enciérrela en un círculo.**

Ítem 5

99. A1: "no se"

El alumno no desarrolla este ítem.

Ítem 6

(El alumno anota la ecuación que se entrega en el enunciado y encierra en un círculo la pendiente anotando m arriba de la fracción. Dibuja la gráfica de una recta que intercepta al origen con pendiente negativa)

100. **P: ¿qué está haciendo ahí?**

(A1 anota la pendiente y la iguala a la expresión con la que se calcula una pendiente, es decir el proceso inverso)

101. A1: "creo que era, si recuerdo algo...creo que esta era la pendiente, entonces si igualo la pendiente a la ecuación que hecho antes..."

102. **P: ¿Ud dice que la pendiente es $-\frac{x}{3}$?**

103. A1: "creo que sí, recuerdo que era eso" (señalando la pendiente en la ecuación dada)

104. **P: y ahí en el gráfico, ¿porqué dibujo la recta así con esa orientación?**

(dibuja la gráfica de una recta que intercepta al origen del plano cartesiano con pendiente negativa)

105. A1: "no...no estoy seguro si pasa por el cero, esta sí creo que pasa por el cero"

106. **P: ¿porqué está igualado a cero, por eso?**

107. A1: "creo, sí... claro no puedo decir que esto al tiro pasa por el cero" (señala la gráfica de la recta)

108. "...si puedo haría la ecuación con $x_2=0$ " (comienza a reemplazar valores, en la expresión para calcular la pendiente, tanteando con valores que le podrían servir para obtener $-x$ en el numerador y 3 en el denominador: $\frac{0-x}{0--3}$, luego anota en la gráfica el 3 en el eje X pero negativo)

109. "...si es que pasa por p, mi $x_1=3$, el problema es que mi y_1 sería un x ..." (ubica el x en el eje Y)

110. **P: ¿x podría estar en el eje de las Y?**

111. A1: "ah no, perdón...no podría...no, no recuerdo como se hacía"

112. **P: ¿y el otro (ítem 5) tampoco?**

113. A1: no

114. **P: ya dejémoslo hasta ahí, muchas gracias**

2.2 Caso 2

Ítem 1

(el alumno anota x_1 , x_2 , y_1 , y_2 en la gráfica, además de la ecuación $y=mx+n$ e identifica m como la pendiente y n como el coeficiente de posición)

115. **P: cuénteme que hizo**

116. A2: "yo me acorde de la ecuación de la recta, saque los puntos de, como se dice, los puntos donde atraviesa la recta" (señala los puntos (0,0) y (1,2))

117. "...luego saque la pendiente con la ecuación que tengo aquí, me dio 2" (señala la expresión para calcular la pendiente, obteniendo $m=2$)

118. **P: ¿dónde sacó esos valores para calcular la pendiente?**

119. A2: "de $y_1 - y_2$ partido por $x_1 - x_2$ "

120. **P: ¿y cuál es y_1 ?**

121. A2: "los saque de aquí" (señala el punto que aparece en la grafica (1,2) y (0,0))

122. "...el primero siempre tiene que ser x, y aparte el gráfico muestra que este valor tiene que ser como el doble de aquí" (señala al 1 en el punto de la gráfica y compara la distancia desde el origen al 1 en el eje X con el lugar y distancia que ocupa el 2 en el eje Y)

123. "...así que tiene que ser un x" (señala el lugar que le corresponde al $x_1 = 1$ y al $y_1 = 2$, en la gráfica)

124. "...así que yo supuse que este sería mi x el 1, por lo tanto mi $x_1 = 1$ "

125. **P: los ceros, ¿de dónde saca los ceros?**

(señalando los ceros que anoto el alumno en la expresión para calcular la pendiente)

126. A2: "del otro punto de intersección de la recta" (señala el punto (0,0) en la grafica,)

127. "...por lo tanto el punto es cero, eso..."

128. **P: ¿la pendiente le dio dos?**

129. A2: "sí, la ecuación de la recta me dio $y = 2x$, es sin coeficiente de posición porque cuando no tiene coeficiente de posición no se agrega"

130. **P: ¿porque dice que no tiene coeficiente de posición?**

131. A2: porque el coeficiente de posición tendría que ser mayor a cero, si fuera mayor a cero sería $2x$, o sea si se agregara sería más cero" (señala que a la ecuación $y = 2x$ sumarle 0)

132. "...igual no influye mucho"

133. **P: ¿y si es menor que cero el coeficiente de posición?**

134. A2: "se agrega igual, pero no influye al hacerlo, después lo revise y me dio" (señala la ecuación $y = 2x$)

135. **P: ¿qué es el coeficiente de posición en la gráfica?**

136. A2: "el primer punto de intersección entre los dos"

(señala los puntos (1,2) y (0,0))

137. "...o sea el que está en la recta Y" (señala el eje Y)

138. **P: ah, en el eje Y**

139. A2: "sí, en el eje Y"

140. **P: ¿cómo determinó, después la ecuación?**

141. A2: "lo revise trasformando los valores" (su revisión consistió en reemplazar los puntos (1,2) en $y_2=2x_2$, obteniendo una igualdad 2 y el punto (0,0) en la expresión $y_1=2x_1$, obteniendo una igualdad cero)

Ítem 2

142. **P: ¿qué está haciendo?**

(A2 anota en la gráfica, donde la recta interseca al eje X, el punto (-4,0) y donde intercepta al eje Y, el punto (0,2))

143. A2: "denotando los puntos para tener más claro..."

144. **P: ¿para qué identifica los puntos?**

145. A2: "para sacar la pendiente" (anota debajo de cada valor de cada punto el $x_1, y_1, x_2, y_2,$)

146. **P: ¿ahora qué está haciendo?**

(el alumno anota la fórmula para calcular la pendiente)

147. A2: "la ecuación de la pendiente" (reemplaza los valores de $y_2=2$, $y_1=0$, $x_2=0$, $x_1=-4$ en la expresión para calcular la pendiente)

148. "...un medio sería la pendiente, entonces la ecuación de la recta sería $y = \frac{x}{2} + 2$, (+2) sería el coeficiente de posición"

149. **P: ¿cómo calcula el coeficiente de posición?, ¿de dónde lo extrae?**

150. A2: "lo extraigo de la recta Y...de este punto"

(señala $y=2$ en la gráfica, valor donde la recta interseca al eje Y)

151. "... se supone que es de la recta Y" (señalando la intersección entre la recta y el eje Y)

152. **P: ¿y esa sería su ecuación, $y = \frac{x}{2} + 2$?**

153. A2: "sí" (subraya la ecuación que obtuvo)

Ítem 3

(A2 anota x_1, y_1, x_2, y_2 en la gráfica, además de la ecuación $y=mx+n$ e identifica m como la pendiente y n como el coeficiente de posición y la ecuación para calcular la pendiente)

154. **P: cuénteme que hizo**

155. A2: "o sea aquí"... (señala la gráfica en el punto (0,4))

156. "...saque el coeficiente de posición al tiro, luego saque la pendiente, cambie los valores con los de la ecuación" (se refiere a la ecuación para calcular la pendiente)

157. **P: ¿qué valores?**

158. A2: "el y_1 con el 4 el y_2 con el cero"
(señala los valores de los puntos (3,0) y (0,4) y los reemplaza en la ecuación de la pendiente)

159. "...entonces me dio $-\frac{4}{3}$ "

160. **P: ¿ $-\frac{4}{3}$ a que es igual, qué representa?**

161. A2: "representa a la pendiente...como ya tenía la pendiente y el coeficiente de posición, lo único que tenía que hacer era reemplazar los valores en la ecuación $y=mx+n$, entonces $y = -\frac{4x}{3} + 4$ "

162. **P: ah ya, entonces ¿Ud. dice que $n=4$?**

163. A2: "sí, coeficiente de posición"

164. **P: ¿porqué?**

165. A2: "lo único que me acuerdo que el coeficiente de posición siempre estaba en la recta Y"

166. **P: en la recta Y...ya...¿y qué relación tiene con la recta graficada ahí?**

167. A2: "no sabría decirle"

Ítem 4

168. **P: ¿en el 4 qué le piden?**

169. A2: "me piden que, cuál(es) de los gráficos representarían esa ecuación..entonces yo voy a revisarlos si me dan"

170. **P: ¿qué está verificando?**

171. A2: "la igualdad que hice en el primer ejercicio"

(se refiere a reemplazar los valores del punto (0,-3) del primer gráfico, en la ecuación que se da en el enunciado: $y=ax-3$)

172. "...esto sería $-3 = a \cdot 0 - 3$, $-3 = -3$, entonces esta ecuación sí representa" (obteniendo una igualdad)

173. **P: ¿cómo lo verificó?**

174. A2: "cambiando los valores, igualando esto ($-3 = -3$)..es que se supone que este ($-3 = a \cdot 0 - 3$) tendría que ser lo mismo que esto ($y=mx+n$), o sea transformarlo, como me dan un punto" (señala el punto (0,-3) de la grafica1)

175. "...ese punto, lo que hago el -3 es él y y el cero es el x y yo cambio los valores" (señala el desarrollo de reemplazar los valores en la ecuación principal de la recta)

176. **P: ¿entonces Ud. dice que su a vale?**

177. A2: "no, no tiene valor porque se cancela con el cero ($a \cdot 0 = 0$)"

178. **P: ¿el primero cumple entonces?** (se refiere a la grafica1)

179. A2: "sí"

180. **P: ¿para el segundo está utilizando el mismo procedimiento?**

181. A2: "sí, lo mismo, también da" (reemplaza el valor del punto (0,-3) de la grafica2 en la ecuación que dan en el enunciado, obteniendo una igualdad. Para la tercera gráfica utiliza el mismo procedimiento, reemplazando (0,3) en la ecuación $y=ax-3$)

182. "no, no da, el 3 debe ser igual a esto (-3), entonces las dos primeras dan"

183. **P: ¿las dos primeras serían?**

184. A2: " sí"

185. **P: ya, veamos la que sigue**

Ítem 5

186. A2: "no me acuerdo, lo único que me acuerdo es pasar esto a una ecuación normal y de ahí..."

187. **P: haga el procedimiento que estime necesario para poder graficar la recta**

188. A2: (el alumno transforma la ecuación de la forma general a la forma principal $y=2x-3$, luego dibuja el plano cartesiano y anota -3 en el eje Y)

189. "...la recta pasa por aquí" (señala el punto (0,-3))

190. "...pero, no sé exactamente" (señala la intersección con el eje X)

191. **P: ¿qué punto es ese (0,-3)?**

192. A2: "el punto -3 que sería el coeficiente de posición"

193. **P: ¿qué está haciendo ahora?**

(el alumno anota el punto en la gráfica que hizo)

194. A2: "reemplazando valores con valores que no se, o sea sería incógnita... tratando de ver si me da la ecuación, o sea la pendiente que sería 2 " (reemplaza los valores del punto y de la incógnita, en la ecuación de la pendiente)

195. "...o sea x_2-x_1 me tendría que dar 2, la pendiente, entonces lo que hago sería la incógnita menos 3 partido en incógnita menos cero y esto igual dos" (despeja esa ecuación, de la pendiente, con dos incógnitas)

196. **P: ¿qué le paso?..¿.no le sirvió?**

197. A2: no...

198. **P: o sea para graficar la recta, ¿qué le faltaría?**

199. A2: acordarme

200. **P: ¿ y si tiene la ecuación?**

201. A2: "me faltaría el otro punto..suponiendo q ese sería el punto"

202. **P: ¿y no se puede extraer información de la ecuación?**

203. A2: "o sea si se puede, pero no me acuerdo"

204. **P: ya, avancemos con el otro ítem entonces**

Ítem 6

(el alumno ve el ítem)

205. A2: sería lo mismo, no me acordaría..

206. **P: pero inténtelo hasta donde llegue**

207. A2: "aquí la recta está hecha" (se refiere a la ecuación de la forma principal dada)

208. " ...pero no podría"

209. **P: ¿y si utiliza tabla de valores?**

210. A2: "no sé lo que es una tabla de valores..o no me acuerdo"

211. **P: ¿cuál le resulto más fácil, entre comillas, de hacer?**

212. A2: ¿entre el anterior y este?...(ítem 5)

213. **P: si**

214. A2: "el anterior me dio esperanzas, pero este..."

215. **P: y de los primeros ejercicios donde tenía que determinar la ecuación, ¿le resulto más fácil esos?**

216. A2: "sí"

217. **P: ¿y mas difícil estos, donde tienen que representar el gráfico de la ecuación?**

218. A2: "sí"

219. **P: listo, muchas gracias**