PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO
Facultad de Ciencias
Instituto de matemática

"La variable aleatoria con probabilidad desde la perspectiva de la teoría APOE"

Trabajo final para obtener el grado de magíster en didáctica de la matemática

De: Rodrigo Salazar Bórquez

Profesora guía: Marcela Parraguez González

2014

Colaboradores

Grupo seminario cognitivo:

Isabel García Martínez
Irma Pinto Rojas
Ximena Gutiérrez Figueroa
Valeria Randolph Veas

Y la ayuda de los profesores de matemática y magister en didáctica de la matemática:

Violeta Chávez Aninat
Mauricio Gamboa Inostroza

Agradecimientos

A mi madre por estar en todo momento, por su apoyo incansable, por tener la capacidad de soportarme a pesar de los años, de comprenderme y por ser siempre una persona de bien.

A mi padre por haberme enseñado todo; estás más presente que nunca y te admiro esto es lo que siempre te hubiera gustado ver, sé que lo estás mirando desde el cielo, te amo padre.

A mi abuelita que acaba de partir, gran parte de lo que soy es gracias a ella, quién me crió y entregó los valores y principios básicos de vida.

A mi esposa e hijas que tuvieron que asimilar mi falta de tiempo para estar con ellas, por su cariño, por su comprensión.

A mi profesora guía Marcela Parraguez, una gran persona y profesional, que sin su apoyo constante, su sabiduría, sus ganas, su pasión, su motivación, este sueño no habría sido posible. Gracias querida maestra por toda su entrega y acompañamiento constante.

A los profesores del magister, a la profesora Elizabeth Montoya por su compromiso y su apoyo; a la profesora Patricia Vásquez porque siempre se aprendía algo nuevo con ella, por su dedicación, paciencia y apoyo; especialmente a don Arturo Mena quien logra cuestiones que parecen imposibles, gran prócer de la didáctica-de-la-matemática, el cambio epistemológico es posible, gracias por su enorme convicción, pasión y sabiduría.

Al grupo del seminario cognitivo, por su constante apoyo, por sus críticas constructivas, por su grata compañía, por su cariño.

A todos mis compañeros de Magister con quienes hicimos un grupo de excelencia, compañerismo y trabajo; en especial a mis compañeros-amigos Nola Labé, Solange Leyton, Mónica Carreño y Reinaldo Romero, gracias por su compañerismo, amistad y apoyo, han sido un bastión importantísimo en estos dos años y el comienzo de una gran amistad.

Índice

GLOSARIO

Variable: Magnitud que puede tener un valor cualquiera de los comprendidos en un conjunto.

Experimento aleatorio: Experiencia en la que bajo el mismo conjunto de condiciones iniciales, no se puede predecir con exactitud su resultado final.

Espacio muestral: Conjunto que incluye todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Suceso: Subconjunto del espacio muestral al que puede asignársele una probabilidad.

Probabilidad: Chance de ocurrencia o medida de cuan probable es un suceso definido en un espacio muestral, de un experimento aleatorio.

Función: Relación entre un conjunto dado X (Dominio) y otro conjunto de elementos Y (Codominio) en la que a cada elemento del dominio le corresponde un único elemento del codominio.

Variable aleatoria: Función definida sobre un espacio muestral que asocia un número real a cada elemento de dicho espacio muestral.

Función de probabilidad: Función que asigna a cada elemento de la variable aleatoria una probabilidad.

Teoría APOE: Estructura teórica creada por Ed. Dubinsky, basada en las ideas de Piaget, que busca describir cognitivamente la comprensión matemática de un individuo. Se compone principalmente de 2 tipos de elementos: construcciones mentales y mecanismos de abstracciones reflexiva.

Construcción mental en la Teoría APOE: Se refiere a la organización de las ideas para intentar comprender algo. Estas son: Acción, Proceso, Objeto y Esquema.

Construcción Acción: Resulta de una operación mental o física repetible que transforma de alguna manera un objeto físico o mental. Es, de manera general, algorítmica y con estímulos externos.

Construcción Proceso: Resulta de la interiorización una Acción. Esta construcción no se deja conducir por los estímulos externos, sino por los internos.

Construcción Objeto: Resulta de la reflexión sobre las operaciones aplicadas en el proceso, que es dinámico inicialmente, y quien que la posee puede actuar sobre el proceso, puede realizar transformaciones y pensarlo como algo estático, como algo involucrado en sí mismo, es decir encapsulado.

Construcción Esquema: Formar un nuevo esquema resulta de la organización de las construcciones acción, proceso, objeto y también otros esquemas previamente construidos.

Abstracción Reflexiva: Mecanismo mediante el cual el individuo se moviliza de una a otra fase, y que se lleva a efecto mediante actividades (físicas o mentales) del individuo que tienen dos partes, indisolublemente unidas: la elevación del conocimiento que este posee a un plano superior, y la reorganización y reconstrucción de ese conocimiento para formar nuevas estructuras.

Abstracción Reflexiva en la Teoría APOE: Es el proceso por el cual se construyen objetos mentales a través de acciones mentales sobre esos objetos. Estos son: interiorización, coordinación, encapsulación, desencapsulación, generalización, reversión *y* tematización.

Interiorización – Un tipo de abstracción reflexiva. Una construcción de procesos internos como una manera de atribuir sentido a fenómenos observados. Piaget se refiere a esa construcción como "traducción de una sucesión de acciones materiales en un sistema de operaciones interiorizadas".
(Dubinsky 1991a)

Coordinación: Un tipo de abstracción reflexiva. Un acto cognitivo de hacer coincidir dos o más procesos para construir un nuevo proceso; esta coincidencia de procesos puede realizarse por simple concatenación.

Encapsulación: Un tipo de abstracción reflexiva, en la cual uno puede pasar de una concepción proceso a una concepción objeto. Tal abstracción permite al individuo mirar un proceso como algo cerrado en sí mismo con "existencia propia" lo que permite mirarlo como un objeto.

Desencapsulación: Mecanismo de abstracción reflexiva que permite mirar un objeto desde el proceso que lo encapsulo. Un individuo solo puede desencapsular un objeto en el proceso que lo generó (Mena, 2011)

Reversión: Un tipo de abstracción reflexiva. Una vez que un proceso existe internamente, es posible para el sujeto a pensar a la inversa, no necesariamente en el sentido de deshacer, pero como medio de la construcción de un nuevo proceso que consiste en invertir el proceso original.

RESUMEN

Esta investigación presenta un estudio en torno a las características y propiedades del concepto Variable aleatoria con probabilidad. En base a la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) enmarcada en el ámbito de la didáctica de la matemática, realizamos un estudio en profundidad de los conceptos matemáticos involucrados para la construcción del concepto Variable aleatoria y las construcciones mentales asociadas a él. Para esto, basándonos en libros, textos, curriculum e investigaciones, se propone una Descomposición Genética (DG) − modelo cognitivo mediante el cual un estudiante puede construir un concepto matemático (Dubinsky, 1991) − cuya viabilidad se pone a prueba a través del enfoque metodológico del estudio de casos (Stake, 1998). Como objetivos de esta investigación, se proponen: (1) Mostrar evidencias empíricas de los aprendizajes de probabilidades y funciones, relacionados con la variable aleatoria. (2) Documentar las construcciones mentales que pueden explicitar estudiantes de pedagogía y profesores de matemática al trabajar las probabilidades y funciones para la construcción de la Variable aleatoria con probabilidad. (3) Proponer actividades para desarrollar y promover la construcción de la Variable aleatoria en la enseñanza media.

Los resultados del análisis de los tres casos de estudio indicaron la que la DG es viable y dieron luces de la falta de coordinación de procesos de probabilidades con procesos de funciones, lo cual dificultó la construcción de la variable aleatoria con probabilidad como función, en la mayoría de los informantes.

Palabras clave: Variable aleatoria, probabilidad, Descomposición Genética (DG), Teoría APOE, construcción mental.

ABSTRACT

This research presents a study about the characteristics and properties of the random variable with a probability concept. Based on APOS theory (Action, Process, Objects and Schemas) framed in the field of mathematics education, we conducted an in depth study of mathematical concepts involved to build the random variable concept and mental constructs associated with it. To do this, based on books, texts, curricula and research a decomposition Genetics (DG) is proposed - cognitive model by which a student can build a mathematical concept (Dubinsky, 1991) - whose viability is tested through focus methodological case study (Stake, 1998). The objectives of this research are proposed: (1) Show empirical evidence of learning probability and functions associated with random variable. (2) Document the mental constructs that can explain student teachers and teachers of mathematics to work the odds and functions for the construction of the random variable with probability. (3) Propose activities to develop and promote the construction of the random variable in secondary education.

The results of the analysis of three case studies indicated that the DG is feasible and got lights uncoordinated processes with processes likely functions, making it difficult to construct the random variable with probability function as in the most informants.

Keywords: Random variable, probability, decomposition Genetics (DG), Theory APOS, mental construction.

INTRODUCCIÓN

En nuestro país y en el mundo en general es cada vez más necesario el estudio de la estadística y la visión moderna de este campo o área de las matemáticas tiene relación con el estudio en profundidad de las probabilidades.

La utilidad de la inferencia estadística, consiste en que si el modelo se considera adecuado, puede usarse para la toma de decisiones o para la realización de las previsiones convenientes. Para el desarrollo de cualquier tema se utilizarán variables aleatorias.
El desarrollo de la física, específicamente de la mecánica cuántica tiene su raíz en lo aleatorio, está la famosa frase de Stephen Hawking que contradecía a Einstein: "*Dios no solo jugó a los dados, sino que los lanzó donde nadie pueda verlos*".

Los orígenes de la teoría de la probabilidad datan de hace 2000 años, con los primeros juegos de azar organizados por el estado en China; luego en Roma las apuestas deportivas eran parte de la vida de sus ciudadanos. Sin embargo es recién en 1933 cuando Kolmogorov estructuró el sistema axiomático de la teoría de la probabilidad, aunque Liapunov acuñó el término variable aleatoria a inicios del siglo XX.
La teoría de la probabilidad desde el punto de vista de su desarrollo no es una disciplina antigua, ya que su desarrollo más profundo se ha visto durante los últimos 100 años, lo cual sugiere que aún en las sociedades modernas la teoría de la probabilidad no ha entrado aún en los currículum de enseñanza con una importancia mayor, aunque en Chile lo que se ha visto es que en los últimos años se registran una participación mayor de estos tópicos en los contenidos a enseñar.

La didáctica de la matemática posee marcos teóricos explícitos y sitúa a la matemática como eje central, diferenciándose de la pedagogía aunque la reconoce como el motor principal de quienes trabajamos en una labor de docencia. Por lo mismo busca dar respuestas y analizar en profundidad los fenómenos que ocurren en el proceso de enseñanza − aprendizaje de la matemática. En nuestro país, como en otros existen dificultades de sus estudiantes con su aprendizaje, lo que nos muestran mediciones nacionales (SIMCE, PSU) e internacionales (TIMM`s, PISA) que indican un estancamiento de nuestra educación y que además hay problemas en diversas partes del mundo.

En mi experiencia como docente he notado los problemas que existen en la construcción del concepto de variable aleatoria. Los estudiantes cometen errores donde se les presenta unión e intersección de probabilidades, las confunden; no logran determinar la variable aleatoria de un espacio muestral determinado. La implementación en el currículum ha sido lenta, incluso de parte del sistema educativo chileno, ya que aunque se declara por primera vez la variable aleatoria en el currículum para el año 2005, aparece en los textos de estudio oficiales del ministerio de educación (MINEDUC, 2005) con el énfasis actual, recién en el año 2013. Esto último ha traído como consecuencia que gran parte de los profesores que imparten clases en el sistema educativo no estén familiarizados con el concepto y de hecho ni siquiera lo enseñen, ya que su aparición en pruebas nacionales como el SIMCE y la PSU, hasta el momento ha sido escasa.

Por lo anterior cabe hacerse las preguntas: ¿Hasta qué punto debiera abarcar el concepto de variable aleatoria o probabilidad y estadística el currículum escolar?

¿Cuánto saben o cómo construyen el concepto de variable aleatoria con probabilidad los estudiantes? ¿Cuánto conocen del tema los profesores del sistema educativo? ¿Por qué debiéramos enseñar variable aleatoria, es decir, como didactas, que queremos lograr con la enseñanza de este objeto matemático?

Este trabajo se mira o analiza desde la perspectiva de la teoría APOE, (Dubinsky, 1991), marco teórico de carácter cognitivo, que exige documentar las estructuras y mecanismos mentales que son requeridas para la construcción de un objeto matemático como lo es la Variable aleatoria con probabilidad, a través de una Descomposición Genética (DG) propuesta, por lo cual centraremos la atención en la construcción cognitiva del objeto en estudiantes de enseñanza media, estudiantes de pedagogía en matemática y profesores del sistema educativo.

La organización de nuestro trabajo se hará en seis capítulos como se describe a continuación:

CAPÍTULO I: ANTECEDENTES Y PROBLEMÁTICA

En este capítulo se relatan algunos hechos pesquisados en torno a la enseñanza de la variable aleatoria con probabilidad, se muestran antecedentes curriculares y otros obtenidos al aplicar una medición inicial con el fin de dar sustento al problema de estudio.

CAPÍTULO II: EL ESTADO DEL ARTE

Para iniciar el estudio de la variable aleatoria, se realiza un estudio epistemológico y un seguimiento de otras investigaciones que hayan trabajado este objeto matemático.

CAPÍTULO III: MARCO TEÓRICO

Para explicitar la elección del marco teórico que guía la mirada de esta investigación, se establecen algunos aspectos claves de la teoría APOE.

CAPÍTULO IV: METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

En esta sección se relata el diseño metodológico con el cual se lleva a cabo la investigación, el cual complementa la metodología que incorpora la teoría APOE y la propuesta por Stake (1998) en su libro "El estudio de casos". Los componentes que esta incorpora son: un análisis teórico −en el cual se explicitan aspectos disciplinares del objeto de estudio−, la propuesta de una ruta que permita alcanzar al comprensión de un objeto matemático, denominada Descomposición Genética hipotetica (DG) la cual en esta instancia es de carácter teórico y la elaboración de un instrumento −que permita documentar la DG−.

CAPÍTULO V: ANÁLISIS Y VERIFICACIÓN DE DATOS

En este capítulo hacemos un relato los resultados del cuestionario a la luz de lo provisto en el análisis a priori y las construcciones mentales que evidencian tener los informantes.

CAPÍTULO VI: CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS DIDÁCTICAS

En este capítulo establecemos las conclusiones que nacen del estudio de la viabilidad de la ruta hipotética, que fue planteada para construir cognitivamente el objeto Variable aleatoria con probabilidad. Este análisis se sustenta principalmente en los resultados obtenidos al aplicar los instrumentos diseñados en el capítulo IV.

Presentamos también conclusiones teóricas y reflexiones didácticas que emergen tanto de los objetivos alcanzados, como de los aspectos que han quedado pendientes y que pueden ser abordados en futuras investigaciones.

CAPÍTULO I:
ANTECEDENTES Y PROBLEMÁTICA

1. Antecedentes de una medición inicial

Para validar la problemática se realizó una medición inicial con dos grupos: uno formado por estudiantes de 4º año medio (17 – 18 años) con buen rendimiento en la asignatura de matemática de dos distintos colegios particular – subvencionados de la región metropolitana de Santiago y un segundo grupo formado por estudiantes de 3er año de pedagogía en matemática de una universidad tradicional del sistema educativo chileno, todos con formación en estadística.

La siguiente actividad tiene por objetivo evidenciar cuales son las construcciones mentales que muestran los estudiantes de 4º año medio. La actividad es la siguiente:

<u>Actividad 1</u>: Se lanza una moneda y un dado. ¿Cuál es la probabilidad de?

- C) Que salga una cara o un sello y un número primo en el dado.

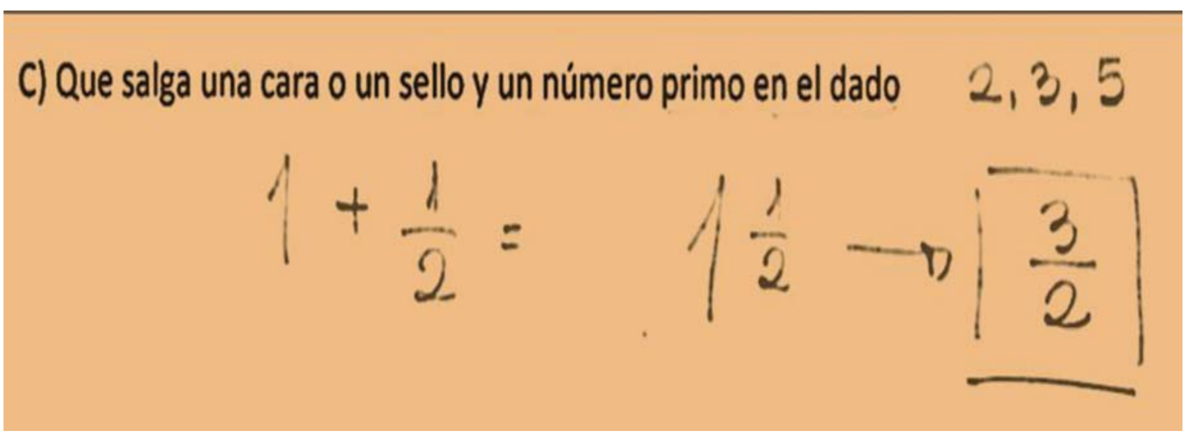
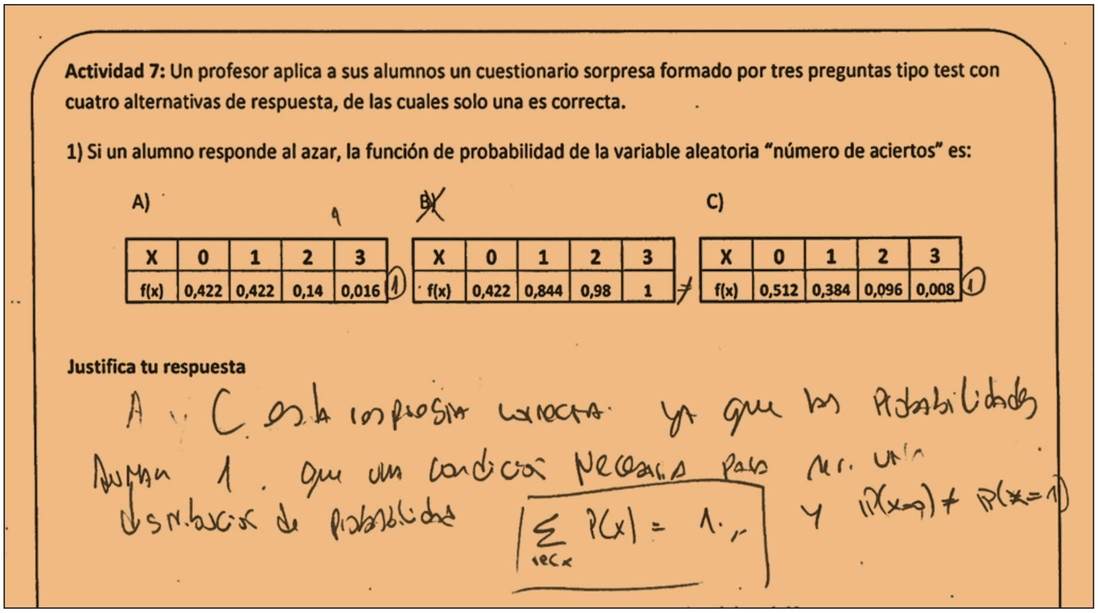


Figura 1: Respuesta 1.c dada por el estudiante 5 del 1er grupo.

Como podemos apreciar en la figura 1 la evidencia nos muestra que los estudiantes no son capaces de discernir que son eventos independientes o qué es lo que se debe hacer con este tipo de sucesos o no son capaces de aplicar correctamente las propiedades de la unión e intersección de probabilidades.

La siguiente actividad tiene por objetivo mostrar cuales son las construcciones mentales que muestran los estudiantes de 3[er] año de pedagogía en matemática, con respecto a la variable aleatoria, vista como función de probabilidad.



Actividad 7: Un profesor aplica a sus alumnos un cuestionario sorpresa formado por tres preguntas tipo test con cuatro alternativas de respuesta, de las cuales solo una es correcta.

1) Si un alumno responde al azar, la función de probabilidad de la variable aleatoria "número de aciertos" es:

A)

X	0	1	2	3
f(x)	0,422	0,422	0,14	0,016

~~B)~~

X	0	1	2	3
f(x)	0,422	0,844	0,98	1

C)

X	0	1	2	3
f(x)	0,512	0,384	0,096	0,008

Justifica tu respuesta

A y C es la respuesta correcta. ya que las Probabilidades suman 1. que un condición necesaria para ser una distribución de probabilidad $\boxed{\sum_{x \in C_x} P(x) = 1}$ y $P(x=0) \neq P(x=1)$

Figura 2: Respuesta 7.1 dada por el estudiante 11 del 2º grupo.

La respuesta dada nos muestra que los estudiantes no logran determinar cuál es la relación del problema con el concepto de variable aleatoria. Si bien determina que la suma de los valores debe ser igual a 1, su justificación de la elección de su respuesta carece de sentido al afirmar que se elige la alternativa "C" ya que $P(X = 0) \neq P(X = 1)$. Además no trata de calcular si quiera las probabilidades de los valores de la variable aleatoria.

2. Antecedentes curriculares y de textos escolares

2.1 Curriculares

En el sistema educacional chileno, el ministerio de educación es el ente que organiza los contenidos y saberes a través del marco Curricular, el cual en su actualización 2009, establece que el concepto de variable aleatoria debe ser trabajado en segundo y tercero medio (16 − 17 años) en el eje de Datos y Azar, para ello plantea los siguientes Contenidos Mínimos Obligatorios (CMO):

Segundo año Medio (15 - 16 años)

- CMO[1] 19: Aplicación del concepto de variable aleatoria en diferentes situaciones que involucran azar e identificación de esta como una función.

AE 04

Comprender el concepto de variable aleatoria y aplicarlo en diversas situaciones que involucran experimentos aleatorios.	› Reconocen una variable aleatoria como una clase especial de función. › Asignan números específicos a resultados de experimentos aleatorios.

Figura 3: *Aprendizajes Esperados para la Unidad de Datos y Azar, Programa de Estudio Segundo Año Medio.*

Cada CMO se organiza en diferentes AE (Aprendizajes esperados), que se subdividen en otros sub aprendizajes.

En este aprendizaje esperado se puede observar que se presenta la variable aleatoria como una función y que así debe ser tratada, aunque no hay una coherencia ya que solo se limitan estos sub − aprendizajes a reconocer y a asignar números específicos a resultados de experimentos aleatorios. El AE está un poco desconectado de los sub − aprendizajes, ya que solo con los que se manifiestan aquí es muy difícil que ocurra el aprendizaje esperado donde el estudiante debe aplicar.

Tercer año Medio (16 – 17 años)

CMO 15. Utilización de la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta y establecimiento de la relación con la función de distribución.

[1] Contenidos mínimos obligatorios establecidos por el ministerio de educación (MINEDUC)

CMO 16. Explorar la relación entre la distribución teórica de una variable aleatoria y la correspondiente gráfica de frecuencias, en experimentos aleatorios discretos, haciendo uso de simulaciones digitales.

CMO 17. Aplicación e interpretación gráfica de los conceptos de valor esperado, varianza y desviación típica o estándar de una variable aleatoria discreta.

CMO 18. Determinación de la distribución de una variable aleatoria discreta en contextos diversos y de la media, varianza y desviación típica a partir de esas distribuciones.

CMO 19. Uso del modelo binomial para analizar situaciones o experimentos, cuyos resultados son dicotómicos: cara o sello, éxito o fracaso o bien cero o uno.

Como se puede apreciar en los CMO de este nivel, la idea es que tomando en cuenta de que los estudiantes ya construyeron en el nivel anterior la variable aleatoria, ahora aprendan distribuciones discretas de probabilidad, construyendo la función de distribución binomial.

En 4º año medio el MINEDUC (2009) establece que se debe tratar las funciones de distribución continuas, profundizando en la distribución normal.

Cabe mencionar que en nuestro currículum la enseñanza de la estadística siempre ha estado muy poco presente, desde el año 2000 que apareció en el currículum junto con las probabilidades. Desde el año 2005 que emerge la variable aleatoria como tal en los planes y programas de estudio, lo que reafirma luego la actualización 2009 del mismo. En este momento el currículum está en proceso de actualización (de los niveles 7º básico a 2º medio) para que sea implementado gradualmente ya para el año2018 hasta 2º medio y en ellos se reafirma el tratamiento del concepto de variable aleatoria desde 2º medio. Al momento de finalizar este trabajo, el MINEDUC no tenía abiertas páginas web o información de los planes y programas que se actualizarán de 3º y 4º medio.

2.2 Análisis de textos escolares

Los textos de estudio en Chile se licitan a las editoriales de carácter privado que operan en el mercado, adjudicándose los textos dichas editoriales según el nivel. Los que son elegidos por el MINEDUC, son los textos oficiales y se reparten gratuitamente a todos los colegios del país que tengan alguna subvención del estado, que son el 92 % de los alumnos de Chile. Les llamaremos textos del MINEDUC.

Si bien el concepto de variable aleatoria estaba declarado en el currículum desde el año 2005 y después reafirmado el año 2009, no aparece explícitamente en los textos del MINEDUC, sino hasta el año 2010, cuestión muy paradójica.

En los primeros textos donde apareció la variable aleatoria, o hizo como título de un capítulo "variable aleatoria", lo cual era nada más que una ampliación de las probabilidades y nunca visto como una función, era tratada bajo el paradigma de magnitud aleatoria.

> • Llamamos variable aleatoria a toda magnitud que puede cambiar azarosamente.

Figura 4: Definición de variable aleatoria dada en el
Texto para el estudiante tercero medio año 2012, p. 299.

El mismo texto carece a ratos de rigurosidad matemática y no usa un lenguaje conjuntista como debiera, como se aprecia en la siguiente definición:

> • Para calcular la probabilidad de que ocurra un suceso u otro, calcula el complemento de la probabilidad de que ambos sucesos ocurran a la vez; esto es: $P(A \text{ o } B) = 1 - P(\text{no } A \text{ y no } B)$

Figura 5: Escritura simbólica planteada por el
Texto para el estudiante tercero medio año 2012, p. 324.

El mismo texto se usa ahora con algunos cambios, ya que a partir del año 2013, se actualizó, pero es el mismo texto y hay algunas contradicciones importantes, ya que en alguna parte del texto se declara ahora a la variable aleatoria como una función, no se condice con la siguiente definición, que está ambigua:

En años anteriores has estudiado y calculado algunos estadígrafos que describen una muestra. En esta sección recordaremos algunos de ellos que utilizaremos en el estudio de la segunda parte de nuestro capítulo.

1 **Variable aleatoria:** Es toda magnitud cuyos valores se obtienen de mediciones en algún tipo de experimento aleatorio. Formalmente, una variable aleatoria es una función, que asocia un número real a cada elemento del espacio muestral (por ejemplo los posibles resultados de obtener cara al lanzar una moneda: $s \longrightarrow 0$, $c \longrightarrow 1$).

Figura 6: Conocimientos previos planteados en el texto para el estudiante tercero medio año 2014, p. 324.

En la figura 7 podemos observar el infortunio de llamar variable estadística a la variable aleatoria:

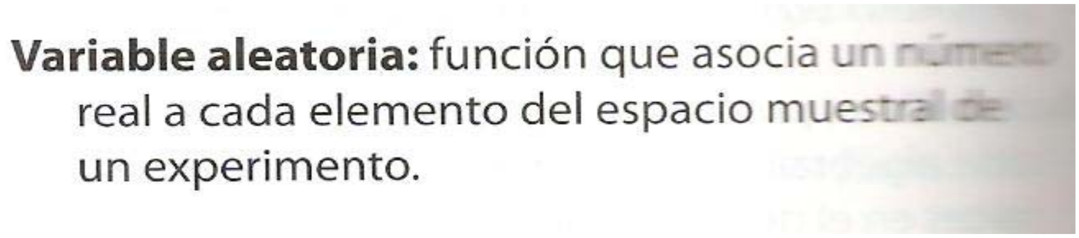
Variable aleatoria: Es una variable estadística cuyos valores se obtienen de mediciones en algún tipo de experimento aleatorio.

Figura 7: Definición de Variable aleatoria propuesta en el texto para el estudiante tercero medio año 2014, p. 494.

Este mismo texto habla sobre función de probabilidad como la que relaciona los valores de la variable aleatoria con una probabilidad. Sin embargo en ningún caso relaciona la variable aleatoria con su dominio y recorrido con la función de probabilidad.

El siguiente texto es el oficial aprobado por el MINEDUC para el año 2014, para 2º medio y comenzó a usarse masivamente recién el presente año ya que no es una adaptación de otro y tiene varios aciertos importantes como veremos a continuación:

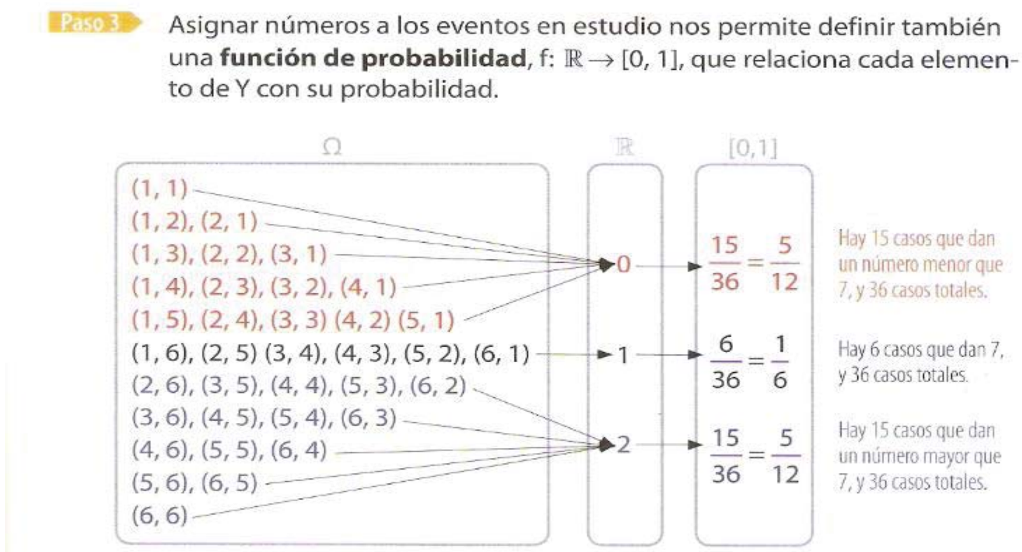
La definición de variable aleatoria que muestra la siguiente figura:



Variable aleatoria: función que asocia un número real a cada elemento del espacio muestral de un experimento.

Figura 8: Definición de Variable aleatoria propuesta en el texto para el estudiante 2º medio año 2014, p. 382

En este mismo texto se entrega el siguiente ejemplo donde es interesante observar que se ajusta bastante a lo que propone nuestro trabajo:



Paso 3 Asignar números a los eventos en estudio nos permite definir también una **función de probabilidad**, f: $\mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, que relaciona cada elemento de Y con su probabilidad.

Figura 9: Ejemplo que se da al tratar el concepto de Variable aleatoria en el texto para el estudiante 2º medio año 2014, p. 281

2.3 La variable aleatoria en la matemática escolar

La palabra "variable" es una palabra que en matemática no cuenta con una sola definición; más bien se habla de los usos de la variable (Trigueros, 2006), sin embargo los docentes en el aula la usamos bastante ya sea para definir una variabe estadística, para determinar el valor desconocido en un problema de proporciones, etc. Lo cierto es que desde el momento en que enseñamos la variable aleatoria como tal, se produce un obstáculo, ya que esta siempre es una función, sin embargo la variable determinista casi no la nombramos y además no implica una función como en el caso de la variable aleatoria, por lo tanto aquí el concepto de variable es muy desafortunado, es una verdadera desgracia el nombre usado, además lo aleatorio tampoco lo usamos mucho, salvo cuando mencionamos un experimento aleatorio. Se cuenta, además a raíz de esto, el siguiente antecedente:

> En los países de habla anglosajona, la teoría matemática de la probabilidad la introdujeron dos matemáticos norteamericanos, Feller, W. y Doob, J., con sus trabajos al inicio de los años 1950. Según el profesor Doob, ambos tuvieron una discusión acerca de si las variables aleatorias había que llamarlas "variables aleatorias" o "variables de probabilidad". Acabaron con la controversia tirando una moneda al aire: ganó "variables aleatorias".
> (Evans, Rosenthal, 2005, p.57)

3. Problemática de investigación

La teoría de la probabilidad como ya se dijo, desde el punto de vista de su desarrollo matemático, ha tenido su más importante desarrollo durante los últimos 100 años, con innumerables aplicaciones a la física y a la astronomía, por lo mismo es que es tan relevante. Sin embargo todavía la probabilidad y la variable aleatoria no ha entrado completamente en los currículum de enseñanza, aunque en Chile en los últimos años hay una participación mayor de estos conceptos.

En las pruebas de selección universitaria (PSU)[2] no se consideraba este concepto sino hasta el año 2012, por lo que muchos docentes no lo enseñaban en los colegios aunque estuviera en el currículum. Tampoco lo consideraban en el SIMCE[3], sino hasta el año 2013 (SIMCE 2º medio). Por lo demás no existe una obligación de los directores de colegios por velar que se enseñe la totalidad de los contenidos que está en los currículum, si se preocupan mucho de los resultados en las dos pruebas nacionales nombradas anteriormente. Sin embargo, mediciones internacionales, como la prueba PISA o la prueba TIMMS que se han tomado en nuestro país, han mostrado la falencia en la que estamos en educación en general y en matemática en particular, en comparación a los países de la OCDE. Esto nos llama a preguntarnos ¿para qué enseñamos lo que enseñamos? Ya

[2] Examen que se rinde al finalizar la educación media en Chile para ingresar al sistema de selección de las universidades adscritas a él.

[3] Prueba que se realiza a los estudiantes cada dos años para evaluar la calidad de la educación en el país, examen que también se ha usado para establecer una especie de "Ranking" de colegios.

que al parecer una buena parte de los profesores no tomaban o no toman en cuenta la variable aleatoria para enseñar probabilidades y eso radica en el desconocimiento de esta como una función, como hemos podido percibir en la medición inicial y como ya veremos más adelante en el desarrollo de la investigación.
En programas de pedagogía en matemática de universidades chilenas, se establece el estudio en profundidad de la variable aleatoria como preámbulo a las funciones de distribuciones de probabilidad y al estudio profundo de la estadística a nivel superior, lo que requiere de una apropiada construcción del concepto en nuestras aulas en la enseñanza secundaria o enseñanza media.
Todo esto radica en que el estudiante en general no reconoce o no articula la probabilidad y sus propiedades con la teoría de conjuntos, los conectivos lógicos y el concepto de función, para la construcción del concepto de variable aleatoria.
Por ende, existen situaciones preocupantes en las aulas de nuestro país para la enseñanza de la variable aleatoria, las que se pueden resumir como sigue:

- Los alumnos en general no logran establecer la variable aleatoria definida sobre un espacio muestral.
- La definen como una magnitud aleatoria.
- Confunden la unión con la intersección de sucesos.
- Confunden sucesos mutuamente excluyentes con sucesos independientes.

Y los profesores del sistema también muestran algunas situaciones complejas como:

- No tratar el contenido de variable aleatorio por considerar que no aparece en las pruebas de medición de aprendizajes nacionales.
- Considerar que la variable aleatoria es innecesaria y que se puede construir la teoría de la probabilidad sin ella.
- Desconocimiento de la variable aleatoria como una función.

CAPÍTULO II:
EL ESTADO DEL ARTE

1. Aspecto histórico epistemológico.

PRECURSORES

La probabilidad matemática tiene sus orígenes en los juegos de azar, principalmente los juegos con dados y cartas, muy populares desde tiempos antiguos. Los chinos realizaban juegos de azar organizados por el estado hace 2.000 años. Durante la época del imperio romano tuvieron gran auge los juegos de azar, las apuestas deportivas eran parte de la vida de los romanos.

Los primeros estudios "científicos" sobre fenómenos aleatorios se centraban en dos problemas:

1. Contabilizar el número de posibles resultados de lanzar un dado varias veces.
2. Distribuir las ganancias entre jugadores cuando el juego se interrumpía antes de finalizar, conocido como el 'problema del reparto de apuestas'.

Una respuesta al primer problema se puede encontrar en el poema *De Vetula*, de Richard de Fournival (1200−1250), donde afirma correctamente que si se lanzan tres dados hay 216 combinaciones posibles y calcula correctamente los diferentes valores para la suma de los tres dados. Aunque ahora puede parecer una cuestión trivial, en aquella época no lo era, y otros autores erraron al intentar resolverla, generalmente porque no tenían en cuenta las posibles permutaciones de una misma combinación.

El segundo problema fue abordado por Luca Pacioli (1445−1517), quien en 1487 propuso estos dos similares problemas particulares: un juego en el que el premio es de 22 ducados que consiste en alcanzar 60 puntos se interrumpe cuando un equipo lleva 50 puntos y el otro 30; y tres arqueros que compiten por un premio de 6 ducados lanzan flechas hasta que uno de ellos haga 6 dianas, siendo interrumpidos cuando el primero de ellos lleva 4 dianas, el segundo 3 y el tercero 2. ¿Cómo deben repartirse los premios entre los contendientes? Pacioli propuso que el premio debería ser repartido en función de las victorias obtenidas anteriormente: así, el premio del primer problema se dividía en $60\times5/8$ ducados para el primer equipo y en $60\times3/8$ para el segundo; para el problema de los arqueros, el premio se dividía en la proporción 4/9, 3/9 y 2/9. Como más tarde se pondría de manifiesto, esta solución es incorrecta.

GIROLAMO CARDANO Y NICCOLO TARTAGLIA

La primera obra importante relacionada con el cálculo de probabilidades en juegos de azar fue el *Libro de los Juegos de Azar*, de Girolamo Cardano (1501–1576), escrito en 1565, aunque no publicado hasta 1663. Cardano era un jugador empedernido y su obra es más bien un manual para jugadores; contiene descripciones de juegos y las precauciones a tomar para que los rivales no hagan trampas, y sólo una pequeña parte está dedicada al estudio del azar: problemas tales como calcular todos los resultados posibles al lanzar dos o tres dados y las frecuencias con que aparecían, hallar la probabilidad de que al lanzar un dado una serie de veces salga un determinado número al menos una vez, o calcular las frecuencias de los valores de la suma de las caras de una tirada de dos dados. En la resolución de estos problemas, Cardano trabajó con los conceptos de la definición clásica de la probabilidad, aunque no los definió. En concreto, Cardano introdujo la idea de asignar una probabilidad p entre 0 y 1 a un suceso cuyo resultado se desconoce, considerando el número total de resultados y el número de resultados favorables, y esbozó de una forma rudimentaria lo que ahora se conoce como la "ley de los grandes números", al afirmar que si la probabilidad de un suceso es p, después de un número n grande de repeticiones lo más razonable es apostar a que ocurrirá alrededor de np veces. Sin embargo, Cardano no alcanzó a reconocer la importancia teórica de estos conceptos, ya que consideraba estas relaciones como meramente aritméticas, más que como una medida de la posibilidad de ocurrencia de un experimento aleatorio. Cardano se había ocupado previamente del problema de reparto de apuestas e ideó una respuesta, también errónea, ya que era válida solo en casos particulares. El problema del reparto de apuestas también fue abordado por Niccolo Tartaglia (1499–1557), quien en 1556 publicó un libro sobre aritmética en el que criticaba la solución dada por Pacioli. («Si un bando ha ganado 10 puntos y el otro ninguno, entonces todo el premio sería para el primer jugador, pero esto no tiene ningún sentido») y dio su propio solución: si un equipo ha ganado a puntos y el otro b, se juega a n puntos y el premio total es P, las ganancias deberían repartirse de la forma $(P/2) \pm P[(a-b)/n]$, siendo la cantidad mayor para el equipo que tenga más victorias. Sin embargo, Tartaglia fue consciente de que su solución no era la correcta y le dio un carácter más jurisdiccional que matemático.

GALILEO GALILEI

Galileo Galilei (1564–1642) también se dedicó a resolver problemas sobre dados. Su obra *Sobre la Puntuación en Tiradas de Dados* calculaba el número de resultados posibles tirando tres dados. A pesar de que ya se sabía desde mucho tiempo antes que hay 216 posibilidades diferentes, Galileo fue el primero que llegó a esta conclusión a través del simple cálculo $216=6^3$. Sin embargo, la principal contribución de Galileo a la teoría de la probabilidad fue la creación de la teoría de la medida de errores. Según Galileo, los errores de medida son inevitables y los clasificó en dos tipos: los errores 'sistemáticos', debidos a los métodos y las herramientas de medida; y los errores 'aleatorios', que varían impredeciblemente de una medida a otra. Esta clasificación sigue en vigor actualmente. Galileo fue muy cuidadoso al analizar las propiedades de los errores aleatorios y estableció que son más frecuentes los errores pequeños que los grandes; que los errores por defecto son tan frecuentes como los errores por exceso; y que la mayoría de las mediciones se agrupan alrededor del verdadero valor. Con estas ideas, Galileo no sólo contribuyó al desarrollo de la teoría de la probabilidad, sino que puso las bases para el nacimiento de la estadística.

BLAISE PASCAL Y PIERRE DE FERMAT

El desarrollo de la teoría de la probabilidad experimentó un gran avance en Francia a mediados del siglo XVII con la correspondencia que mantuvieron Blaise Pascal (1623–1662) y Pierre de Fermat (1601-1665) durante 1654. Antoine Gombaud, caballero de Méré, filósofo y literato que jugaba compulsivamente, pidió a Pascal que le resolviese el problema del reparto de apuestas. Pascal y Fermat lo resolvieron correctamente por medios diferentes pero equivalentes, aunque el desconocimiento de la teoría general les hizo pensar que no lo eran. Once años más tarde, en 1665, Pascal publicaba su *Tratado sobre el Triángulo Aritmético*, la más importante contribución realizada hasta entonces en el campo de la combinatoria. El libro comienza con la construcción de lo que se dio en llamar el triángulo de Pascal, aunque era conocido desde hacía más de 500 años en diversas partes del mundo. El triángulo es de la siguiente forma:

Fila / Columna	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1								
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

donde el valor de la k-ésima entrada de la n-ésima fila es el número combinatorio $\binom{n}{k}$.

Pascal demostró algunas propiedades importantes del triángulo: cada elemento es la suma de todos los elementos de la columna anterior hasta la fila anterior (es decir, $\binom{n}{k} = \sum_{j=k-1}^{n-1} \binom{j}{k-1}$); la suma de todos los elementos de la fila n-ésima es 2^n y $\binom{n}{k} : \binom{n}{k+1}$ = (k + 1) : (n − k). Para demostrar estos argumentos usaba algo parecido al principio de inducción, pues demostraba un caso y, a continuación, que eso implicaba el caso inmediatamente siguiente. La última gran propiedad del triángulo que demostró Pascal fue que $\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$, demostrándolo por inducción e identificando ese número como el número de combinaciones de *k* elementos en un conjunto de *n* elementos. Finalmente, Pascal aplicó todos estos resultados para producir una solución sistemática del problema del reparto de apuestas: si al jugador A le faltan *r* juegos para ganar y al jugador B le faltan *s* (con $r+s\geq 1$), las apuestas deberían dividirse de manera que al jugador A le correspondiera una parte proporcional al cociente entre $\sum_{k=0}^{s-1} \binom{n}{k}$ y 2^n , donde $n=r+s-1$.

Pascal aplicó los razonamientos probabilísticos sobre la toma de decisiones a la teología y trató de demostrar la existencia de Dios. Su argumento era el siguiente: Dios existe o no existe; si no existe, da igual creer en él que no creer; si existe, creer que no existe provoca la condenación eterna, mientras que creer trae la salvación. Como la salvación es preferible a la condenación (en términos probabilísticos, la ganancia es mayor), una persona 'razonable' actuará como si Dios existiera, aunque crea que la probabilidad de que exista es pequeña.

CHRISTIAAN HUYGENS

Los trabajos de Pascal y Fermat fueron continuados por el científico holandés Christiaan Huygens (1629−1695). Su interés por la probabilidad nació en 1655 durante el transcurso de un viaje a París, donde coincidió con otros científicos y discutió con ellos el problema del reparto de apuestas. Fue así como Huygens entró en conocimiento de las obras de Pascal y Fermat y sus métodos. En 1656 salía publicado su tratado *Sobre los Cálculos en los Juegos de Azar*, el cual constaba de un breve prefacio y 14 proposiciones. En las tres primeras, Huygens introducía el concepto de esperanza matemática para variables aleatorias que toman dos o tres valores, definida como la ganancia media si se repitiera el juego muchas veces; la palabra 'esperanza' apareció por primera vez en la historia en la traducción al latín del original en holandés. En las seis siguientes proposiciones Huygens proponía su solución al problema del reparto de apuestas, muy similar a la de Pascal, pero lo llevó más allá, pues Huygens fue capaz de extender el problema al caso de tres jugadores; sobre esto

último, no dio una solución general, sino que indicó cómo aplicar al caso general los casos particulares previamente resueltos.
Hacia el último cuarto del siglo XVII, existía ya un gran volumen de conocimientos sobre sucesos aleatorios, acompañados por un buen número de problemas correctamente planteados y resueltos. Pero todos estos conocimientos se enfocaban a problemas concretos limitados a los juegos de azar, y ningún estudioso había sido capaz de dar una definición general de la probabilidad.
El primer estudioso de la probabilidad que no se centró en juegos de azar fue el comerciante inglés John Graunt (1620−1675), quien en 1662 abordó problemas sobre demografía —o "política aritmética", como se la llamaba entonces. Graunt se propuso encontrar un método preciso para estimar la edad media de los habitantes de Londres mediante la edad de defunción; haciendo esto introdujo el concepto de 'frecuencia de un suceso', remarcando el cierto grado de aleatoriedad presente en las proporciones obtenidas. También demostró que en Londres la proporción de nacimientos de niños y niñas no era igual sino 14:13 y elaboró la primera tabla de mortalidad. Graunt comprendió que cuántas más observaciones
hacía más precisos eran los resultados, anticipando el principio estadístico de estabilidad de las medias.
Las ideas de Graunt fueron recogidas por William Petty (1623−1687), quien elaboró un análisis comparativo entre la mortalidad de los Londres y la de París, basándose en los datos de los hospitales de caridad, y por el astrónomo Edmund Halley (1656−1742), quien presentó en 1693 una tabla de mortalidad de la ciudad de Breslau (Alemania) — Halley prefería ciudades pequeñas con pocos movimientos migratorios antes que ciudades grandes como Londres, París o Dublín— e introdujo el concepto de longitud de vida tal que la frecuencia con que se superaba o no se alcanzaba era la misma; en otras palabras, el concepto de 'mediana'. En los trabajos de Halley también se pueden encontrar las bases de los teoremas de la suma y la multiplicación de probabilidades y de la ley de los Grandes Números, aunque no los enunció explícitamente. Las obras de Halley tuvieron gran influencia en demografía y los seguros.

Sólo cuando los fenómenos aleatorios dejaron de enfocarse como casos particulares y se intentó ver los conceptos generales que habías detrás de ellos, las nociones de probabilidad mejoraron en su definición. El primero en dar la definición clásica de probabilidad fue Jakob Bernoulli (1654−1705) en su obra *El Arte de Predecir,* publicada póstumamente en 1713. Más adelante, el matemático francés exiliado en Inglaterra Abraham De Moivre (1667−1754) aceptó la definición dada por Bernoulli y la reformuló en términos modernos: «una fracción en la que el numerador es igual al número de apariciones del suceso y el denominador es igual al número total de casos en los que es suceso pueda o no pueda ocurrir. Tal fracción

expresa la probabilidad de que ocurra el suceso». La definición clásica de la probabilidad, en su forma actual, está basada en el concepto
de equiprobabilidad de los resultados, basado a su vez en la simetría. Se supone que un experimento se puede descomponer en *n* sucesos equiprobables y mutuamente excluyentes $E_1,\dots,E_n$, llamados sucesos 'elementales'. Así, la probabilidad del suceso aleatorio A es el número del intervalo [0,1] que expresa el cociente entre los *m* sucesos elementales que componen A y el número total *n* de posibles sucesos elementales. El principal escollo que encuentra esta interpretación de la probabilidad es la dificultad de descomponer un suceso en sucesos elementales equiprobables; siendo fácil para problemas sencillos, como los de cartas, dados o urnas, es casi imposible para problemas más complejos.
Basándose en los trabajos de Graunt y Petty, Bernoulli resolvió incluso la cuestión de cómo hallar la probabilidad de ocurrencia de un suceso aun siendo imposible contar los casos favorables: «Aquí hay otro camino disponible para alcanzar el resultado deseado. Lo que no se puede hallar *a priori* se puede obtener *a posteriori*, es decir, mediante la observación múltiple de los resultados de pruebas similares…» De esta manera, Bernoulli introdujo el concepto de probabilidad 'frecuentista' o 'estadística': asignar como probabilidad de un suceso el resultado que se obtendría si el proceso se repitiera en condiciones similares un número grande de veces. Sin embargo, estas condiciones son demasiado vagas para servir como base para una definición científica rigurosa. En primer lugar, se menciona un 'número grande' de veces, pero no se da ninguna indicación sobre cuál es ese número lo suficientemente grande; no se describe con precisión qué se entiende por condiciones similares —si las condiciones fuesen siempre exactamente las mismas se obtendría siempre el mismo resultado—; tampoco se especifica cuál es la máxima desviación admitida respecto del resultado teórico; además, sigue habiendo sucesos que no pueden plantearse suponiendo la posibilidad de repetirlos muchas veces.
Precisamente, fueron la necesidad de precisar qué se entiende por un 'número grande' de repeticiones del experimento y la tolerancia del resultado obtenido respecto del teórico, lo que llevaron a Jakob Bernoulli a idear, en su forma más intuitiva y básica, la Ley de los Grandes Números.

TEOREMAS BÁSICOS DE LA TEORÍA DE LA PROBABILIDAD

Los tres teoremas básicos que hicieron posible el desarrollo de la probabilidad tal y como la conocemos hoy fueron los teoremas de la suma, de la multiplicación y de la probabilidad total. Aunque ni Fermat ni Pascal ni Huygens los idearon, en sus escritos aparecen ya de una forma implícita y utilizados correctamente.

<u>Teorema de la Suma</u>.- Pascal dio a entender implícitamente que sabía cómo calcular los casos favorables de un suceso A si conocía los casos

favorables de unos A_j disjuntos cuya unión es A (es decir, si los A_j son una partición de A). Jakob Bernoulli también fue consciente de ello, y fue más allá al darse cuenta de que la probabilidad de la unión no es la suma de las probabilidades si los sucesos no son disjuntos, aunque no supo dar la razón. Previamente, Cardano había expresado un resultado similar en términos de casos en vez de probabilidades. No fue ninguno de ellos quien formuló finalmente el teorema de la suma de la probabilidades, sino el reverendo inglés Thomas Bayes (1702−1761), cuyo trabajo fue leído póstumamente, en 1763. En esta obra, Bayes da la primera definición explícita de sucesos disjuntos — él los llamó 'inconsistentes'— y enunció la fórmula ahora conocida: $P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{A \cap B\}$

Teorema de la Multiplicación.- Del mismo modo, el teorema de la multiplicación de probabilidades era conocido por casi todos los estudiosos a través de cálculos particulares. Sin embargo, fue Abraham De Moivre (1667−1754) el primero que los enunció con autoridad. En la introducción a su obra *Doctrina de las Posibilidades* de 1711, De Moivre presentó el importante concepto de independencia de sucesos aleatorios; así, escribió: «Diremos que dos sucesos son independientes, si uno de ellos no tiene ninguna relación con el otro» y procedió a definir los sucesos dependientes: «Dos sucesos son dependientes si están ligados el uno al otro y la probabilidad de ocurrencia de uno de ellos influye en la probabilidad de ocurrencia del otro». Una vez hecho esto, De Moivre lo aplicó al cálculo de probabilidades: «la probabilidad de ocurrencia de dos sucesos dependientes es igual a la probabilidad de ocurrencia de uno de ellos dividida por la probabilidad de que el otro ocurra si el primero ya ha ocurrido. Esta regla puede generalizarse para varios sucesos». El caso de varios sucesos lo describía así: «Se necesita elegir uno de ellos como el primero, otro como el segundo, y así. Luego, la ocurrencia del primero debe considerarse independiente de todas las demás; el segundo debe considerarse con la condición de que el primero ha ocurrido: el tercero con la condición de que tanto el primero como el segundo han ocurrido, y así. De aquí, la probabilidad de las ocurrencias de todos los sucesos es igual al producto de todas las probabilidades». O en notación moderna:

$P\{A_1 \cap A_2 \ldots A_n\} = P\{A_1\} \cdot P\{A_2| A_1\} \cdot P\{A_3| A_1 \cap A_2\} \ldots \cdot P\{A_n| A_1 \cap \ldots A_{n-1}\}$

De Moivre acompañó sus afirmaciones con ejemplos resueltos. También fue consciente de que lo verdaderamente difícil de este teorema es descubrir cuándo dos sucesos son o no independientes.

Teorema de Bayes.- El trabajo de De Moivre obtuvo una gran difusión, así que el mérito de Bayes no fue tanto la originalidad sino expresar la probabilidad condicional en función de la probabilidad de la intersección:

$$P\{A|B\} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Además, el honor del teorema que lleva su nombre no es completamente suyo, ya que él no estaba en condiciones de formular con probabilidades totales. Fue Pierre−Simon Laplace (1749−1827) quien desarrolló la mayor parte del teorema de Bayes en su *Experiencia en la Filosofía de la Teoría de la Probabilidad* (1812). Sea A un suceso que ocurre en conjunción con uno y sólo uno de los *n* sucesos disjuntos $B_1,...,B_n$. Si se sabe que el suceso A ha ocurrido, ¿cuál es la probabilidad de que el suceso B_j también? Laplace respondió de la siguiente manera: «La probabilidad de existencia de una de esas causas es igual a una fracción con un numerador igual a la probabilidad del suceso que se sigue de esta causa y un denominador que es la suma de las probabilidades similares relativas a todas las posibles causas. Si estas diferentes causas *a priori* no son equiprobables, entonces en lugar de tomar la probabilidad del evento que sigue a cada causa, se toma el producto de esta probabilidad veces la probabilidad de la causa». Esta enrevesada receta puede escribir en notación moderna:

$$P\{B_i|A\} = \frac{P\{B_i\} \cdot P\{A|B_i\}}{\sum_{i=1}^{\infty} P\{A|B_i\} \cdot P\{B_i\}}$$

Laplace aplicó el teorema a problemas de la mecánica celeste, la estadística médica e, incluso, a la jurisprudencia. Al igual que los otros dos teoremas, el Teorema de Bayes ya se usaba anteriormente, aunque nunca había sido formulado.

LOS TEOREMAS DEL LÍMITE

<u>La Ley de los Grandes Números</u>.- Jakob Bernoulli era consciente de que las frecuencias observadas se acercaban a un cálculo previo de su probabilidad al aumentar el número de repeticiones del experimento. Pero él quería encontrar
una prueba científica que no sólo demostrara que al aumentar el número de observaciones se podía estimar la probabilidad auténtica con cualquier grado de precisión deseado, sino que permitiera calcular explícitamente cuántas observaciones eran necesarias para garantizar esa precisión de que el resultado queda dentro de un intervalo predeterminado alrededor de la verdadera solución. El experimento que consiste repetir una prueba con la misma probabilidad de éxito un número grande de veces recibió el nombre de 'experimento de Bernoulli' y, más adelante, con la creación del concepto de variable aleatoria, la variable que contabiliza el número de éxitos en *N* pruebas se llamó 'Bernoulli' o 'binomial'.
Consciente de que en las situaciones de la vida real, la certeza absoluta (probabilidad 1) es imposible de alcanzar, Bernoulli introdujo la idea de la 'certeza moral': para que un resultado fuese moralmente cierto, debía tener una probabilidad no menor que 0.999, mientras que un resultado con probabilidad no mayor que 0.001 se consideraría 'moralmente imposible'. Fue para determinar la certeza moral de un suceso para lo que Bernoulli formuló su teorema, la Ley de los Grandes Números.

Para ilustrar este concepto, Bernoulli propuso el siguiente ejemplo: una urna con 30.000 bolas blancas y 20.000 negras, aunque el observador no lo sabe, pues lo que quiere es determinar la proporción entre bolas blancas y negras, sacando una de cada vez, anotando el resultado —éxito si es blanca y fracaso si es negra— y reintroduciéndola en la urna. Sea N el número de observaciones, X el número de éxitos y p = r/(r+s) la probabilidad de éxito en cada prueba, siendo r el número de bolas blancas y s el de bolas negras. El teorema de Bernoulli afirma, en terminología moderna, que dada cualquier pequeña fracción ε (que Bernoulli siempre escribía en la forma 1/(r+s)) y dado cualquier número entero positivo grande c, se puede hallar un número N = N(c) tal que la probabilidad de que X/N difiera de p no más de ε es mayor que c veces la probabilidad de que X/N difiera de p más de ε. Con símbolos:

$$P\left\{\left|\frac{X}{N}-p\right| \leq \varepsilon\right\} > c \cdot P\left\{\left|\frac{X}{N}-p\right| > \varepsilon\right\}$$

O como escriben los libros modernos:

$$\forall\varepsilon > 0\ \forall c \in \mathbb{Z}^{+} \exists N\ tal\ que\ P\left\{\left|\frac{X}{N}-p\right| > \varepsilon\right\} < \frac{1}{c+1}$$

En su ejemplo, para c=1.000, Bernoulli obtuvo como resultado que eran necesarias 25.550 observaciones. La intuición le decía que no hacían falta tantas y, por ello, lo intentó con otros valores de c. Desilusionado por sentir que había fracasado en su intento de cuantificar la certeza moral, Bernoulli no incluyó en su libro las aplicaciones prometidas. El que sí lo hizo fue su sobrino Niklaus (1687−1759), que aplicó el resultado de su tío a registros de 14.000 nacimientos y llegó a la inesperada conclusión de que la frecuencia de nacimientos de niños es mayor que la de niñas, en la proporción de 18:17. Este resultado fue confirmado años después por Laplace.

<u>El Teorema Central del Límite</u>.- La ley de los Grandes Números planteó el problema de estimar la suma de un subconjunto de términos de una expresión binomial. La principal dificultad era calcular la probabilidad de que el número de éxitos de un suceso dado de probabilidad *p* en *n* pruebas estuviera entre A y B. Jakob Bernoulli había demostrado que esta probabilidad era $\sum_{A<k<B}\binom{m}{k}\cdot p^{k}\cdot(1-p)^{m-k}$, siendo éste una parte de la expansión 1 = $(p+(1-p))^{m}$. Lo más difícil era calcular $\binom{m}{k}=\frac{m!}{k!(m-k)!}$, pues *m*! se hace muy grande cuando *m* es grande. Bernoulli recurrió a estimaciones muy poco precisas, pero suficientes para probar su teorema. De Moivre quiso ser algo más preciso y recurrió a una expresión asintótica y demostró que $m! \approx B\cdot e^{-m}\cdot m^{m+\frac{1}{2}}$, con B constante. Para determinar el valor de esta constante, construyó la siguiente expansión: ln B = $1-\frac{1}{12}+$

$\frac{1}{360} - \frac{1}{1260} + \frac{1}{1680} - \cdots$, y halló que B es aproximadamente 2,5074, pero no quedó satisfecho porque no logró vincular este número a ninguna constante matemática conocida. De Moivre pidió ayuda a su amigo James Stirling (1692−1770), quien demostró que $B = \sqrt{2\pi}$. Con este dato, De Moivre calculó una tabla para la función $m!$ con m entre 10 y 900, y enunció un resultado que, en notación moderna, dice:

$$P\left\{X = \frac{N}{2} + t\right\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} \int_0^k e^{-\left(\frac{2t^2}{n}\right)} dt$$

De Moivre trabajó con el valor de k = $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ y obtuvo que la probabilidad de que el número de ocurrencias de un experimento binomial cayera dentro de un intervalo de radio $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ era 0,6827; luego repitió el cálculo para otros múltiplos de $\sqrt{n}$. Finalmente, De Moivre encontró que $\sqrt{n}$ era unidad cuya distancia del centro debe ser medida. Así, la precisión de una estimación de probabilidad aumenta igual que la raíz cuadrada del número de experimentos; en otras palabras, De Moivre acababa de descubrir la importancia de la 'varianza'.

De Moivre repitió el experimento de Bernoulli y obtuvo que bastaban 6.498 observaciones. Aunque mejoró el método de Bernoulli, sin embargo, no llegó a reconocer la importancia de la curva que había encontrado y no pudo aplicar su resultado a otros problemas.

EL PROBLEMA DE LA 'RUINA DEL JUGADOR'

El problema de la 'ruina del jugador' tuvo un papel importantísimo en el desarrollo de la teoría de la probabilidad, pues era extraordinariamente complejo para la época y exigió la creación de nuevo métodos para su resolución; además, sirvió como trampolín para el desarrollo de los procesos estocásticos. El problema de la 'ruina del jugador' fue propuesto por primera vez por Huygens en su libro y consiste en lo siguiente: los jugadores A y B tienen a y b francos, respectivamente. Después de cada juego, el ganador le quita un franco al perdedor. La probabilidad de ganar de A es p y la de B es $q = 1-p$. ¿Cuál es la probabilidad p_A de que el jugador A arruine totalmente al jugador B? El problema intrigó a muchos de los científicos más importantes del momento, como Jakob y Niklaus Bernoulli, De Moivre y Laplace. Jakob Bernoulli criticó la formulación y solución numérica del problema que dio Huygens, argumentando que restringía la posibilidad de encontrar una regla general. Los resultados obtenidos por estos matemáticos demostraron que eran capaces de afrontar problemas de sucesos muy complicados y que sabían manejar los teoremas de la suma, la multiplicación y la probabilidad total, incluso antes de ser formulados.

La solución fue hallada por De Moivre y Niklaus Bernoulli de forma independiente en 1710−1711. Según De Moivre,

$p_A = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b} - 1}$, y $p_B = \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^b - 1}{\left(\frac{p}{q}\right)^{a+b} - 1}$

Y el número esperado N de juegos que son necesarios para que un jugador arruine al otro es,

$$E\{N\} = \frac{bp_A - ap_B}{p - q}$$

LA PARADOJA DE SAN PETERSBURGO

Una vez definido matemáticamente el concepto de esperanza, la idea general era que la manera más razonable de tomar una decisión que involucrase probabilidades sería optar por aquélla que tuviese una mayor esperanza. Pero esta manera de pensar quedó desacreditada cuando en 1713 Niklaus Bernoulli propuso el siguiente juego: el jugador A lanza una moneda; si sale cara en la primera tirada, paga 2 ducados al jugador B; si la primera cara sale en la segunda tirada, le paga 4 ducados; y así, si la primera cara sale en la tirada n−ésima, le paga 2^n ducados. ¿Cuánto pagaría el jugador B al jugador A para jugar a este juego? Si se calcula la esperanza matemática, tenemos $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$, y, por tanto, B podría pagar a A cualquier cantidad, porque su ganancia seguiría siendo infinita, pero, sin embargo, la probabilidad de ganar sólo 2 ducados es de 1 a 1, y la de ganar más de 10 es de 1 contra 7. Este ejemplo —conocido como la paradoja de San Petersburgo por ser la ciudad donde discutieron el problema Niklaus Bernoulli y su hermano Daniel (1700−1782)— puso de manifiesto que no siempre la opción más razonable es la más correcta matemáticamente. La solución a esta paradoja consistió en la introducción del concepto de 'esperanza moral' (en contraposición a la 'esperanza matemática') o 'utilidad', que consiste en dar prioridad al sentido común y las circunstancias personales o particulares sobre el resultado matemático. Así, una persona rica, con mucho dinero que perder, podría permitirse el lujo de hacer de jugador B, mientras que un pobre podría arriesgarse a hacer de jugador A, porque la posibilidad de perder dinero es muy pequeña; sin embargo, los papeles no serían intercambiables. Esta paradoja tuvo mucha importancia en el desarrollo de la teoría de la probabilidad aplicada a los problemas relacionados con los seguros: pagar una gran cantidad al asegurado pero con una probabilidad muy pequeña de que eso ocurra.

LA TEORÍA DE LA MEDIDA DE ERRORES

La teoría de la medida de errores fue iniciada por Galileo y continuada por otros muchos científicos, en su mayoría astrónomos, como, por ejemplo, Ticho Brahe (1546−1601), que encontró que cada medida tiene un posible error y que la precisión de la medida puede aumentar si se hacen varias medidas y se calcula la media aritmética. Los primeros intentos de construir matemáticamente la teoría de la medida de errores fue hechos por R. Cotes (1682−1716), T. Simpson (1710−1761) y Daniel Bernoulli. Cada uno de ellos tenía una idea diferente sobre la medida de los errores. Cotes opinaba que los errores se distribuyen uniformemente a lo largo el intervalo (-a, a). Simpson creía que los errores pequeños ocurren más frecuentemente que los grandes, pero que están restringidos por un número a, de manera que el error es 0 en los intervalos (-∞,-a] y [a,+∞); así, la función de densidad es $x - 2a^2 y = -a$ en el intervalo (-a,0), y en (0,a) es $x + 2a^2 y = a$. Daniel Bernoulli fue el primero en poner en duda que la media aritmética fuera la mejor estimación del error y propuso como función de densidad $y = \sqrt{R^2 - (x - \bar{x})^2}$, donde R es conocido y $\bar{x}$ se determina mediante repetidas observaciones. Bernoulli no se dio cuenta de que la integral de esta función no es 1, sino $\left(\frac{\pi}{2}\right) R^2$ por lo que sólo represente una verdadera función de densidad en casos particulares. El trabajo de Bernoulli, no obstante, es importante porque fue el primero en proponer estimar un parámetro desconocido mediante el método de 'máxima verosimilitud'.

Otro estudioso de la cuestión fue Laplace, que consideraba la teoría de probabilidad más como una disciplina de la ciencia natural que de las matemáticas. Muy dedicado a la astronomía, aplicó a sus investigaciones en teoría de medida de errores. Laplace afirmó los errores de medida observados eran la suma de una gran cantidad de pequeños errores; si estos errores tenían una distribución normal, su suma también debería tenerla. Como estimación del valor desconocido del error a, Laplace sugirió tomar el valor que minimiza la cantidad $\sum_{1 \le k \le n} |x_k - a|$ que es igual a la media de las n observaciones realizadas.

Sin embargo, el trabajo de Laplace no alcanzó mucha difusión porque quedó eclipsado por las nuevas ideas presentadas por K. Gauss (1777−1855) y A. Legendre (1752−1833), que propusieron y desarrollaron el método de mínimos cuadrados. Gauss demostró que, bajo ciertas condiciones generales, la función de densidad de los errores de medida tiene la forma $\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 \Delta^2}$.

Otra gran contribución fue la realizada por Simeon Poisson (1781−1840). En particular, planteó la siguiente pregunta: ¿es cierto que la media aritmética es siempre mejor que una única observación? La respuesta es no. Como contraejemplo, presentó la siguiente distribución $p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $-\infty < x < \infty$. Poisson demostró que la suma de dos variables aleatorias con esta distribución tiene la misma distribución pero con otra escala y luego probó que la media aritmética de variables aleatorias independientes de este tipo tiene exactamente la misma distribución que cualquiera de ellas. 20 años después A. Cauchy (1789−1857) repitió este mismo resultado y la distribución descubierta por Poisson recibió el nombre de Cauchy. Más tarde, la teoría de errores atrajo la atención de muchos probabilistas rusos, como P. Chebyshev (1821−1894) y A. Markov (1856−1922), que desarrollaron el método de mínimos cuadrados.

FORMACIÓN DEL CONCEPTO DE VARIABLE ALEATORIA

Suele ocurrir que la formación de los conceptos científicos ocurre antes de que sean comprendidos totalmente. Eso también fue lo que pasó con el concepto de 'variable aleatoria', uno de los pilares básicos de la teoría de probabilidad moderna.

El concepto de 'variable aleatoria' estuvo presente de forma encubierta casi desde el principio de la teoría de probabilidad. En uno de los problemas de su libro, Huygens introdujo una variable aleatoria que sigue una distribución hipergeométrica. Cuando Galileo habló de los errores 'aleatorios' que no se pueden predecir y que varían de medida en medida, en realidad se refería a que esos errores son una variable aleatoria de distribución desconocida. Cuando Bernoulli enunció su ley de los grandes números, al contabilizar el número bolas blancas extraídas de la urna, ese número de éxitos es una variable aleatoria que toma valores entre 1 y *n* el número total de pruebas, siguiendo una distribución binomial. Al analizar el problema de la ruina del jugador, también aparece una variable aleatoria, el número de juegos hasta que uno de los jugadores queda arruinado. Y De Moivre fue incluso más lejos al introducir la distribución normal. Sin embargo, ninguno de ellos se dio cuenta que hacía falta introducir un nuevo concepto. Tampoco Gauss, Daniel Bernoulli o Laplace mencionaron en ningún momento esta idea, ni siquiera cuando en el comienzo del siglo XIX aparecieron nuevos problemas en los que siempre aparecía la distribución normal: el tamaño de los órganos de animales de la misma edad, la desviación de los proyectiles en la artillería o en la teoría matemática de la física molecular aplicada a los gases. Además, la preeminencia de la distribución normal sobre todas las demás tuvo el efecto contraproducente de desalentar la investigación sobre las

propiedades de la media y la varianza, porque para el caso de la normal es una cuestión bien conocida.
Los primeros pasos en la dirección de introducir la idea de 'variable aleatoria' fueron dados por Poisson en 1832 en su libro Sobre la Probabilidad de los Resultados Promedios de Observaciones. No utilizó el término 'variable aleatoria', pero sí habló de 'alguna cosa' que uno puede entender como un conjunto a_1, $a_2,\ldots,a_n$ con sus correspondientes probabilidades p_1, $p_2,\ldots,p_n$; es decir, habló de las variables aleatorias discretas. También consideró variables aleatorias continuas y sus densidades. La palabra 'variable' fue utilizada por primera vez por Chebyshev, que asumió implícitamente que todas las variables aleatorias eran independientes y fue A. Liapunov (1857–1918) el primero que usó sistemáticamente el término 'variable aleatoria' y especificó que serían independientes cuando fuese necesario. En el comienzo de su obra Sobre una Afirmación en la Teoría de Probabilidad, Liapunov dio la definición de función de distribución tal y como la conocemos hoy:
$P\{a < \xi < b\} = F(b) - F(a)$.

LA LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS

El teorema de Bernoulli fue generalizado por vez primera por Poisson en 1837, quien también introdujo el término 'ley de los grandes números'. Poisson consideró una sucesión de *n* pruebas independientes, en cada una de las cuales A puede ocurrir con probabilidad p_k, k=1,...n. Si μ_n es el número de ocurrencias de A en las *n* observaciones, entonces:
$\forall\varepsilon > 0\ P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - \frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{n}\right| < \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. En 1843 Chebyshev criticó el teorema de Poisson, alegando que no daba una cota explícita para el error y enunció su propia versión, dando una estimación de *n* para que se cumpliera la desigualdad:

$$\forall\varepsilon > 0 \forall\eta\ P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}{n}\right| < \varepsilon\right\} > 1 - \eta$$

Sin embargo, estas dos versiones no significaron ningún avance, pues no superaban la idea original de Bernoulli. Sólo cuando en 1867 Chebyshev empezó a considerar variables aleatorias en lugar de sucesos, se produjo ese avance cualitativo.
En 1909 Émile Borel (1871–1956) demostró que el experimento de Bernoulli llevaba a una afirmación más fuerte que la ley de los grandes números para *p*=0.5. En 1917, el matemático italiano Francesco Cantelli (1875–1966) extendió este hecho para *p* arbitrario: $P\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{\mu_n}{n} = p\right\} = 1$, afirmación que se conoce como la Ley Fuerte de los Grandes Números. Una generalización de este resultado fue dada por Andrei Kolmogorov (1903–1987) en 1930.

En 1935 A. Khinchine (1894−1959) introdujo el concepto de estabilidad relativa de suma de variables aleatorias: la suma $S_n = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$, se dice 'relativamente estable' si existen constantes $A_n>0$ tales que para todo $\varepsilon>0$ y $n\to\infty$, se cumple $P\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{\mu_n}{n}=p\right\}=1$. Para variables aleatorias idénticamente distribuidas, Khinchine encontró condiciones necesarias y suficientes; su discípulo A. Bobrov (1912−) extendió este resultado a variables con distribuciones diferentes.
Uno de los resultados relacionados con la ley de los grandes números es el teorema de Glivenko−Cantelli, descubierto por A. Glivenko en 1929−1933, que trata sobre la convergencia de una distribución empírica a una verdadera función de distribución.

EL TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE

Los esfuerzos por lograr una generalización del teorema de De Moivre vinieron desde dos campos: la teoría de medida de errores y la estadística física. Entre los primeros se cuentan Laplace, que en 1809 formuló un teorema de límites para la suma de variables aleatorias distribuidas uniformemente en un intervalo (-h,h) y, considerando un número creciente de variables aleatorias discretas dio una aproximación de una distribución continua a partir de otra discreta; Poisson, que en 1837 dio un teorema local del límite y falló al generalizarlo a la suma de variables aleatorias independientes arbitrarias con varianza finita porque le faltó añadir que debían ser idénticamente distribuidas; y F. Bessel, que coincidió con Laplace en que la suma de un número grande de cantidades aleatorias pequeñas en comparación con la suma tiene una distribución normal, aunque en 1838 dio ejemplos de medidas en las que los errores adoptan otras distribuciones, como por ejemplo, la medida de ángulos.
En el lado de la estadística, aparecen principalmente los matemáticos rusos de finales del siglo XIX y principios del XX. El primero de ellos fue Chebyshev, quien en 1887 demostró un teorema sobre la acotación de la suma de variables aleatorias con esperanza 0. Para probarlo, Chebyshev ideó el Método de los Momentos, de gran importancia en la estadística. Sin embargo, la demostración tenía algunos errores que fueron corregidos por su discípulo A. Markov, que demostró en 1898 la siguiente versión del Teorema de Chebyshev:
Sea S_n la sucesión de sumas $u_1 + u_2 + ... + u_n$ y $\Phi_n(x)$ la distribución de u_n
Si $\forall k$ se cumple $\int_{-\infty}^{\infty} x^k d\Phi_n(x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{-x^2/2}dx$, entonces se cumple

$$\forall\, a,b\ P\left\{a<\frac{S_n}{Var\ S_n}<b\right\}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-x^2/2}dx$$

Este parecía el teorema del límite definitivo, hasta que en 1900 A. Liapunov demostró que si las variables aleatorias tienen momento de orden 3 finito $c_k = E\{|\xi_k - a_k^3|\}$ y $c_n = \sum_{1\le k\le n} c_n$, $B_n^2 = \sum_{1\le k\le n} Var(\xi_k), y\ \frac{C_n}{B_n^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, entonces las funciones de distribución de S_n convergen a la distribución normal. Al año siguiente, Liapunov probó bastaba con pedir que el momento de orden 2+δ con δ>0, y probó el mismo teorema pero cambiando 3 por 2+ δ. Liapunov llegó incluso a calcular el orden de esta convergencia a la normal: $n^{-\frac{1}{2}}$ log(n).

La demostración de este teorema no exigía la aplicación del método de momentos de Chebyshev y Markov, queriendo recuperar la idea de su maestro, propuso el concepto de variables aleatorias truncadas, para las cuales su versión del Teorema Central del Límite de Liapunov sí necesita el método de momentos.

En 1922 el matemático finlandés Lindeberg fue más allá que Liapunov, al no pedir la existencia de ningún momento salvo el de orden 2. Así, si $\forall\, \tau > 0 \lim_{n\to x} \frac{1}{B}\int_{|x-a_k|>\tau B_n}(x-a_k)^2 dF(x) = 0$, la distribución de la suma de variables aleatorias, centradas en sus esperanzas y normadas por la raíz cuadrada de la suma de sus varianzas converge a una distribución normal estándar. En 1942 William Feller demostró que la condición suficiente de Lindeberg es también necesaria.

Como corolario al teorema de Lindeberg se obtuvo un resultado esperado desde hacía mucho tiempo: si se tienen variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con varianza finita no nula, se puede aplicar el Teorema Central del Límite a su suma.

En 1927 S. Bernshtein consideró un problema más general. Sea ξ_1, ξ_2,..., ξ_n,... una sucesión de variables aleatorias independientes sin suponer nada acerca de sus esperanzas o varianzas. Bernshtein encontró condiciones necesarias y suficientes para hallar constantes $B_n>0$ y A_n, tales que la función de distribución (S_n-A_n/B_n) converja a la normal. En 1935, Feller demostró que esas condiciones eran también necesarias, suponiendo que los términos de la suma son uniformemente pequeños. Ese mismo año, A. Khinchine y Paul Lévy (1886−1971) encontraron, de forma independiente, condiciones necesarias y suficientes para la convergencia de la distribución suma de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas a la distribución normal.

Actualmente, las investigaciones se centran en cuestiones tales como cuánto de rápida es la convergencia a la normal, cómo converge un número aleatorio de variables aleatorias, o las relaciones entre el Teorema Central del Límite y la Ley de los Grandes Números.

LA INTERPRETACIÓN SUBJETIVA DE LA PROBABILIDAD

Las interpretaciones clásica y frecuentista de la probabilidad no satisfacían a todos. Así, en el segundo cuarto del siglo XX surgió una nueva interpretación, llamada 'subjetiva', según la cual la probabilidad mide el grado de creencia de un individuo en la verdad de una proposición, variando entre 0 (el individuo cree que es falso) a 1 (cree que es cierto). Esta interpretación fue propuesta por primera vez por el filósofo Frank P. Ramsey en su libro *Los Fundamentos de las Matemáticas* de 1931, y el primer matemático que la adoptó fue el estadístico italiano Bruno de Finetti en 1937. La interpretación subjetiva de la probabilidad es más amplia que la frecuentista, pues mientras que ésta sólo funciona con experimentos que se puedan repetir un número grande de veces, aquélla se puede aplicar a cualquier tipo de proposiciones. Además, mientras que los frecuentistas consideran que la probabilidad de un suceso es siempre una constante (que se aproxima repitiendo el proceso), para los subjetivistas la probabilidad de un suceso puede —y debe— variar en función de la nueva información recibida respecto del suceso, manera de proceder que se ajusta más al método científico.

Una crítica que se ha hecho de la interpretación subjetiva es la supuesta arbitrariedad con que se asignan probabilidades a sucesos. Los subjetivistas se defienden afirmando que las normas de la moral y la coherencia obligan a quien asigna la probabilidad de un suceso a actuar del modo más objetivo posible y no de forma caprichosa. Además, se han hecho esfuerzos por convertir esta noción intuitiva en demostraciones formales.

La interpretación subjetiva es muy utilizada en los diseños de modelo probabilísticos de la física cuántica, y sus técnicas se han aplicado con éxito recientemente para filtrar el *spam* del correo electrónico legítimo.

LA AXIOMATIZACIÓN DE LA PROBABILIDAD

La definición de variable aleatoria dada por Poisson era demasiado intuitiva y demasiado apegada a la experiencia práctica como para servir de base a un desarrollo teórico de la teoría de la probabilidad. Era necesaria una formalización más grande de los conceptos probabilísticos y hubo que esperar al desarrollo de las teorías de conjuntos y de la medida que tuvo lugar a finales del siglo XIX y comienzos del XX, debidos principalmente a Georg Cantor (1845−1918), Émile Borel y Henri Lebesgue (1875−1941). Ya en 1909, Borel consideró la importancia de la teoría general de la medida para la construcción de la fundamentación de la teoría de la probabilidad, pero no fue hasta 1933 cuando N. Kolmogorov se propuso construir una teoría de la probabilidad de una manera rigurosa,

basándose en axiomas fundamentales, similar el tratamiento que Euclides dio a la geometría.
La construcción axiomática de la teoría de la probabilidad procede de las propiedades fundamentales de la probabilidad, observadas en los ejemplos que ilustran las definiciones clásica y frecuentista. Así, la definición axiomática las incluye como casos particulares y supera las carencias de ambas. De esta manera, la probabilidad pudo desarrollarse como un teoría completamente lógica al mismo tiempo que siguió permitiendo resolver los problemas aplicados de las ciencias modernas y la tecnología.
La definición axiomática da una equivalencia entre los conceptos de la teoría de la medida y los de la teoría de la probabilidad. Se toma un conjunto de medida 1, Ω, cuyos elementos son sucesos elementales (puntos de un espacio de medida) y se considera una 'σ−álgebra' M, un subconjunto de Ω que satisface que incluye a Ω y a Ø, que es cerrado por complementación y por uniones numerables. Luego se define una función P que asigna a un suceso (o conjunto medible en la teoría de la medida) un número entre 0 y 1 (su medida). Así, la terna (Ω, M, P) recibe el nombre de 'espacio de probabilidad'. No obstante, la teoría de la probabilidad no queda inmersa dentro de la de la medida, porque ésta no posee una noción fundamental de la probabilidad, la independencia de variables aleatorias (equivalente probabilístico de las funciones medibles).
Los axiomas de Kolmogorov que definen la probabilidad son los siguientes:
1. Para cada suceso aleatorio A hay asociado un número no−negativo P(A) que se llama su probabilidad.
2. P(Ω)=1
3. Si los sucesos A_1, A_2,..., A_n son mutuamente excluyentes dos a dos, entonces, $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$.

Del hecho de que $\Omega = \emptyset \cup \Omega$ y el axioma 3 se deduce que $P(\Omega) = P(\emptyset) \cup P(\Omega)$, y de esto se obtiene una serie de resultados importantes:
$P(\emptyset) = 0$; $\forall A\ P(A^C) = 1 - P(A)$; $\forall A\ 0 \leq P(A) \leq 1$; $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$; $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$; $P(A_1 \cup \ldots A_n) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.
El sistema de axiomas de Kolmogorov es consistente, pues existen objetos reales que los satisfacen. Por ejemplo, $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y M el conjunto de todos los subconjuntos de Ω, donde $P(a_i) = p_i$ con i=1,...,n, satisface los axiomas de Kolmogorov.
Sin embargo, el sistema de axiomas es incompleto, pues para un conjunto dado Ω se pueden elegir las probabilidades en la σ−álgebra M de maneras diferentes. Esto no significa que el sistema de axiomas no sea lo bastante razonable, sino que ocurre en ocasiones que es necesario estudiar el mismo conjunto de sucesos aleatorios con diferentes probabilidades; por ejemplo, los posibles resultados de lanzar dos dados equilibrados o de lanzar un dado equilibrado y otro trucado son los mismos y, sin embargo, las probabilidades asociadas a estos sucesos son diferentes.

También ocurre en probabilidad que constantemente hay que considerar sucesos que se pueden descomponer en una cantidad infinita de sub–sucesos. Ello exige un nuevo axioma, a elegir de entre estos dos, que son equivalentes: el 'axioma extendido de la suma de probabilidades', que dice que si el suceso A es equivalente a la ocurrencia de al menos uno de los sucesos mutuamente excluyentes dos a dos A_1, A_2,..., A_n,... entonces P(A) = $P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)+...$; o el 'axioma de continuidad': si la sucesión de sucesos B_1, B_2,..., B_n,... es tal que cada suceso implica el anterior y su intersección es el vacío, entonces
$P(B_n)\overrightarrow{n \to \infty}$ 0.

2. Antecedentes de otras investigaciones

Para esta investigación se han reportado dos trabajos que servirán de apoyo.

Según declara Blanca Ruiz (2006), el tratamiento de la variable aleatoria como una función, presenta dificultades, con la definición dada. En este contexto identifica dos obstáculos:

- El predominio del paradigma magnitud aleatoria ha dificultado el surgimiento de un paradigma nuevo basado en variables aleatorias.
- Dificultad en la naturaleza funcional de la variable aleatoria que tradicionalmente ha sido más tratada como variable (magnitud aleatoria) que como función.

Bernardita Pérez (2012) concluye que los estudiantes que están por egresar de la carrera de pedagogía en matemática, no tienen claro el concepto de variable aleatoria. Para estos estudiantes la variable es aleatoria, si no se puede calcular su valor, no comprendiendo que los valores de la variable aleatoria están asociados a una probabilidad y por ende si bien no podemos predecir con certeza su valor si podemos estimarlos; también confunden el concepto variable con el suceso involucrado en la situación.

CAPÍTULO III:
MARCO TEÓRICO

1. La Teoría APOE

La investigación se trabaja a la luz de un Marco Teórico de carácter cognitivo, pues este tipo de marco centra su mirada es el estudio de los procesos de aprendizajes intelectuales y matemáticos que realiza un estudiante, lo que sin duda corresponde al interés del estudio aquí expuesto. Específicamente se trabaja con la Teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema), creada por Ed Dubinsky en 1991, basada en la epistemología genética de Piaget. Este Marco Teórico propone un modelo que permite de manera viable, presentar de forma explícita las construcciones mentales que los estudiantes requieren, para que un determinado concepto sea comprendido y encapsulado en un objeto.

Trabajamos con la teoría APOE (APOS, en el original en inglés), pues esta permite dar aportes al desarrollo curricular en el área matemática, por la forma en que se complementan sus tres componentes: análisis teórico, tratamiento instruccional y datos empíricos. (Mena, A., 2001).

Para describir teoría APOE, ponemos de manifiesto tres de sus principales elementos las Acciones, los Procesos y los Objetos, según esta teoría la construcción del conocimiento matemático pasa por estas tres etapas (Parraguez, 2009).

Concepción acción: Al tener una concepción de Acción, el estudiante trabaja el Objeto como algo que no le es propio, pero que debe desarrollarse y puede hacerse con la ayuda de instrucciones externas definidas de forma clara, el Objeto aun no toma sentido para quien lo intenta usar: *Una acción puede consistir en una simple respuesta o en una secuencia de respuestas (Dubinsky, 1997, pág. 96).*

En nuestra investigación un ejemplo de acción es que el estudiante calcule probabilidades de unión de sucesos y no considere la intersección para el cálculo.

Concepción proceso: *Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede interiorizarse en un proceso* (Dubinsky, 1996), en esta etapa la manipulación del concepto va de la mano con un razonamiento, y es llevada a cabo de forma autónoma.

Cuando el estudiante puede asimilar que una probabilidad no puede ser mayor que 1 y darse cuenta de que hay un procedimiento faltante, que en el ejemplo anterior sería restar la probabilidad de la intersección de los sucesos.

Concepción objeto: Cuando un estudiante reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un determinado Proceso y piensa en el Proceso como un todo relacionado, entonces ha encapsulado tal Proceso como un Objeto cognitivo. No obstante, *"en el curso de una acción o un proceso sobre un objeto, suele ser necesario desencapsular y regresar el objeto al proceso del cual se obtuvo, con el fin de usar sus propiedades al manipularlo"* (Dubisnky, 1991, p. 97).

Esta se produce cuando, por ejemplo, un estudiante relaciona el concepto de variable aleatoria con el dominio de una función como espacio muestral y además con probabilidades, encapsulándolo en un objeto, viéndolo como un todo y logra resolver problemas que involucren esta relación.

Se debe señalar que estas etapas no necesariamente son secuenciales, se puede tener concepción de Acción para ciertos aspectos de un determinado concepto, estas Acciones pueden ser interiorizadas como Proceso que se coordinan con otros Procesos, por otro lado, estos proceso pudiesen ser producto de la desencapsulación de un Objeto, lo esencial es que el estudiante evolucione de un estado de construcción del conocimiento a otro por medio de la abstracción reflexiva.

Un esquema es la construcción más amplia y acabada que el individuo realiza de un concepto, la forma en la cual ese concepto existe en la mente: la totalidad del conocimiento de ese individuo que, para él, está conectado de manera consciente o inconsciente con un tópico matemático particular −grupo, función, etc.−, (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews & Thomas, 1996); una estructura inconclusa que evoluciona por la asimilación de nuevos objetos y la reacomodación de las estructuras de acuerdo a las nuevas relaciones que estos establecen (Mena, A., 2001).

Sin los mecanismos de abstracción reflexiva las construcciones mentales no pueden explicar por si solas el proceso de desarrollo del pensamiento, Dubinsky explica que tomó dos aspectos fundamentales de la abstracción reflexiva de Piaget y García para crear la teoría APOE con el objeto de describir el desarrollo del *pensamiento lógico-matemático,* el epistemológico y el psicológico (Mena, A., 2001). "Dubinsky subscribe que hay una relación cercana entre la naturaleza de los conceptos matemáticos y su desarrollo en la mente de un individuo" (Mena, A., 2001, p.78).

La teoría considera cinco *tipos de abstracción reflexiva* o *mecanismos*: *la interiorización, la coordinación, la encapsulación, la generalización y la reversión*, estos permiten que se origen las construcciones mentales: acciones, procesos, objetos y esquemas.

Una acción se *interioriza* en un proceso, dos procesos pueden *coordinarse* entre si, un proceso puede ser *encapsulado* en un objeto, un proceso puede ser *generalizado* o *revertido* en un nuevo proceso.

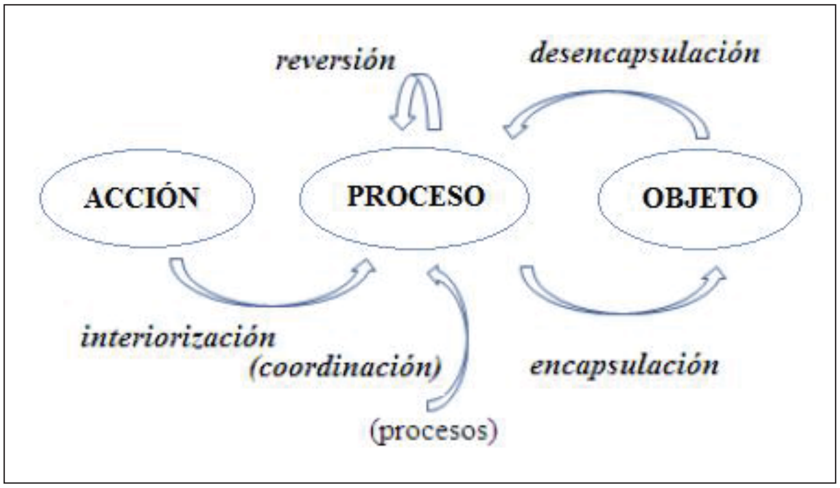


Figura 10: Esquema de Mecanismos Mentales y Abstracciones Reflexivas.

2. Ciclo de Investigación

La teoría APOE tiene incorporado un ciclo de investigación que ha sido validado e implementado por el grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community). Este ciclo consta de 3 etapas:
1) Análisis teórico del concepto o Descomposición Genética, DG,
2) Diseño y aplicación de cuestionarios y entrevistas, y
3) Análisis y verificación de datos.

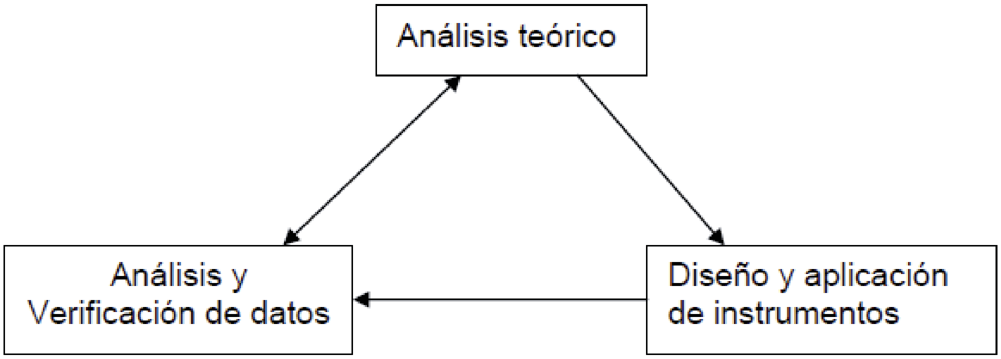


Figura 11: *Ciclo de Investigación (Asiala et al., 1996)*

A continuación se explicitan las 3 componentes de este ciclo

Análisis teórico: Partiendo de la experiencia del investigador y sus conocimientos del concepto matemático en estudio el análisis teórico se complementa con la revisión de textos del saber matemático y textos de estudio, para determinar un camino viable que permita la construcción de un concepto. "Este análisis permite mediante la descripción de las construcciones mentales, modelar la epistemología y cognición del concepto matemático estudiado" (Parraguez, 2009, p.50).

El análisis teórico queda documentado en una Descomposición Genética hipotética, DG, la cual describe el camino propuesto por el investigador y da cuenta de las construcciones mentales y mecanismos de abstracción reflexiva que se complementan para la construcción cognitiva del concepto en estudio.

Diseño y aplicación de instrumentos: En base a la descomposición genética propuesta y para documentar la misma, es decir, tener alguna certeza de la viabilidad del camino señalado en ella, se diseñan instrumentos –Cuestionarios o entrevistas– que permitan identificar si las construcciones y mecanismos mencionados en la descomposición genética permiten realmente la construcción que se pretende.

En el caso del cuestionario cada pregunta está basada en un extracto de la DG y debe reflejar las construcciones mediante las cuales los estudiantes pueden construir dichos conceptos.

Los instrumentos son aplicados a estudiantes que puedan dar cuenta de la viabilidad del camino propuesto, para ello idealmente deben ser estudiantes destacados en el área de estudio, es decir que no tengan problemas para el aprendizaje de las matemáticas.

Análisis y verificación de datos: El resultado de aplicar los instrumentos proporciona datos empíricos que permiten detectar los mecanismos y construcciones de los estudiantes que respondieron al instrumento, estos datos son contrastados con el a priori hecho en base a la DG. "Los resultados obtenidos con la aplicación de los instrumentos deben ser analizados desde la descomposición genética preliminar detectando qué elementos no han sido considerados o cuáles de las construcciones dadas hipotéticamente no se perciben" (Parraguez, 2009, p.51).

Como producto de este análisis se obtiene una versión refinada de la descomposición genética para este ciclo.

3. Pregunta y objetivos de investigación

En base a los antecedentes presentados se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo construyen el concepto de Variable aleatoria con probabilidad los estudiantes de enseñanza media, estudiantes de pedagogía en matemática y profesores de enseñanza media?

La pregunta anterior es necesario declararla en términos de APOE, para que se pueda leer desde nuestra Descomposición Genética (DG), quedando de esta forma:

¿Qué construcciones mentales y mecanismos de abstracción evidencian los estudiantes de enseñanza media, estudiantes de pedagogía y profesores de matemática de enseñanza media al construir la Variable aleatoria con probabilidad?

La pregunta declarada nos hace plantearnos las siguientes hipótesis de investigación

Hipótesis de investigación

Los estudiantes de enseñanza media no logran coordinar los procesos de probabilidad con las funciones ni tampoco conocen el concepto de variable aleatoria.
Los estudiantes de pedagogía en matemática no logran coordinar la Variable aleatoria con las probabilidades asociadas al espacio muestral. Además muestran una concepción acción de los elementos de probabilidades.
Los profesores de matemática no construyen el concepto de variable aleatoria con probabilidad, tratando esta como función.

3.1 Objetivos Generales de investigación

1. Mostrar evidencias empíricas de los aprendizajes de probabilidades y funciones, relacionados con la variable aleatoria.
2. Documentar las construcciones mentales que pueden explicitar estudiantes de pedagogía y profesores de matemática al trabajar las probabilidades y funciones para la construcción de la Variable aleatoria con probabilidad

3. Proponer actividades para desarrollar y promover la construcción de la Variable aleatoria en la enseñanza media.

3.2 Objetivos Específicos de investigación

1. Realizar un análisis histórico epistemológico de la Variable aleatoria con probabilidad.
2. Diseñar la DG hipotética en base a los antecedentes.
3. Diseñar un instrumento para la recogida de datos, basándonos en la DG.
4. Analizar los datos recolectados con la metodología de estudio de casos.
5. Determinar los mecanismos mentales que son necesarios para que un estudiante o profesor muestre la concepción objeto, de la Variable aleatoria con probabilidad, documentarlos y entregar conclusiones.

CAPÍTULO IV:
METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

Según lo establecido en el Capítulo III, la teoría APOE tiene incorporado un ciclo de investigación que ha sido validado e implementado por el grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community). Este ciclo consta de 3 etapas:

1) Análisis teórico del concepto o DG,
2) Diseño y aplicación de cuestionarios y entrevistas, y
3) Análisis y verificación de datos.

La primera etapa de este ciclo consiste en determinar cuáles son los elementos teóricos que permitirán establecer una ruta −cognitiva viable− para construir un concepto matemático (en este caso la Variable aleatoria con probabilidad). Esta ruta, denominada Descomposición Genética, DG, describe las construcciones mentales y mecanismos de abstracción reflexiva que propician la cognición del concepto matemático estudiado.

1. Análisis Teórico

La construcción cognitiva de un concepto, implica más que tener una noción clara de éste, conlleva una comprensión profunda del mismo. "Esto va mucho más allá de la representación mecánica de algoritmos o de la supuesta construcción de un concepto aislado" (Parraguez, 2009, p. 51), permite al individuo relacionar este conocimiento con otros y aplicarlo en diversas situaciones de manera "espontánea".

"El análisis teórico supone que un individuo no aprende los conceptos directamente" (Salgado, 2007, p. 19), requiere de mecanismos apropiados que faciliten la incorporación de dichos conceptos a sus estructuras mentales.

A continuación detallaremos los elementos incorporados en el análisis teórico para la construcción del Objeto Variable aleatoria con probabilidad.

1.1 Elementos de variable aleatoria

Sea Ω, el espacio muestral asociado a un cierto experimento aleatorio, A un álgebra de sucesos definida en dicho espacio muestral y *P* una medida de probabilidad definida sobre A, es decir una aplicación:

$$\begin{aligned} P: \mathcal{A} &\longrightarrow [0,1] \\ A &\longrightarrow P(A) \end{aligned}$$

tal que se cumplen los tres axiomas (axiomas de kolmogorov):
a. $0 \leq P(A) \leq 1$, para todo suceso A del álgebra de sucesos *A*
b. $P(\Omega) = 1$
c. Si $(A \cap B) = \varphi$, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

En las condiciones anteriores se dice que (Ω, A, *P*) es un *espacio de probabilidad* o espacio probabilístico. Hacemos notar que el axioma c. se generaliza para cualquier número de sucesos incompatibles dos a dos.
Sea ahora (Ω, A, *P*) un espacio de probabilidad y R el cuerpo de los números reales. Se dice que la aplicación:

$$\begin{aligned} X: \Omega &\longrightarrow R \\ \omega &\longrightarrow X(\omega) \in R \end{aligned}$$

que a cada suceso elemental hace corresponder un número real, es una variable aleatoria si para todo número real x, se verifica la relación:

$$A = \{\omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A} \text{ ....(1)}$$

es decir, se verifica que A es un suceso. A se indica abreviadamente por
$[X \leq x]$
La condición (1) indica, en palabras, que la imagen inversa en la aplicación «variable aleatoria» para todos los intervalos reales acotados superiormente es medible, puesto que, para cada conjunto del álgebra de sucesos está definida la probabilidad. Así, la definición matemática de la variable aleatoria exige que la imagen inversa de todo $X^{-1}(\omega)$ sea un elemento del álgebra *A*, porque una vez definida una medida de probabilidad P sobre (Ω, A), la variable aleatoria puede determinar una medida de probabilidad sobre (R, *B*), en donde *B* es la sigma-álgebra construida por los conjuntos de Borel en R. De esta forma, la variable aleatoria induce una medida normada sobre los conjuntos que representan a los sucesos.
En realidad la variable aleatoria está definida para todo suceso del álgebra de sucesos, y no sólo para los puntos muestrales (elementos del conjunto Ω) . Es decir se trata de una aplicación de A en R, lo que garantiza que la

imagen inversa de cualquier elemento del conjunto imagen pertenezca a A y por tanto podamos posteriormente asignarle su probabilidad, que estaba definida previamente sobre A.
A veces las variables aleatorias están ya implícitas en los puntos muestrales, cuando el resultado del experimento aleatorio es numérico, por ejemplo, si el experimento consiste en observar el tiempo de espera a una micro. Pero en otros casos, en un mismo experimento aleatorio podemos definir diferentes variables aleatorias. Por ejemplo, al lanzar tres monedas al aire podemos asignar a cada suceso la variable "número de caras", pero también el "número de sellos". Por ello no debe confundirse el experimento con la variable aleatoria ni el espacio muestral del experimento con el conjunto de valores de la variable.
El conjunto imagen de una variable aleatoria puede ser *discreto*, cuando toma un número finito o infinito numerable de elementos o *continuo*, si toma un número infinito no numerable de elementos. Las variables aleatorias definidas sobre espacios muestrales discretos se llaman discretas y las definidas sobre espacios muestrales continuos se llaman continuas.

1.2 La variable aleatoria con probabilidad

Para efectos prácticos de la investigación, usaremos la siguiente definición:

Una variable aleatoria es una función definida sobre un espacio muestral que asocia un número real a cada elemento de dicho espacio muestral.

EJEMPLO

Consideremos el siguiente experimento aleatorio: lanzar tres monedas al aire, diremos C cara y S sello, entonces el espacio muestral será:

Ω = {SSS, SCS, SSC, CSS, CCS, CSC, SCC, CCC}

Definiremos la variable aleatoria como la función que relaciona el espacio muestral con el número de caras que se obtienen; esta relación se puede representar a través del siguiente diagrama:

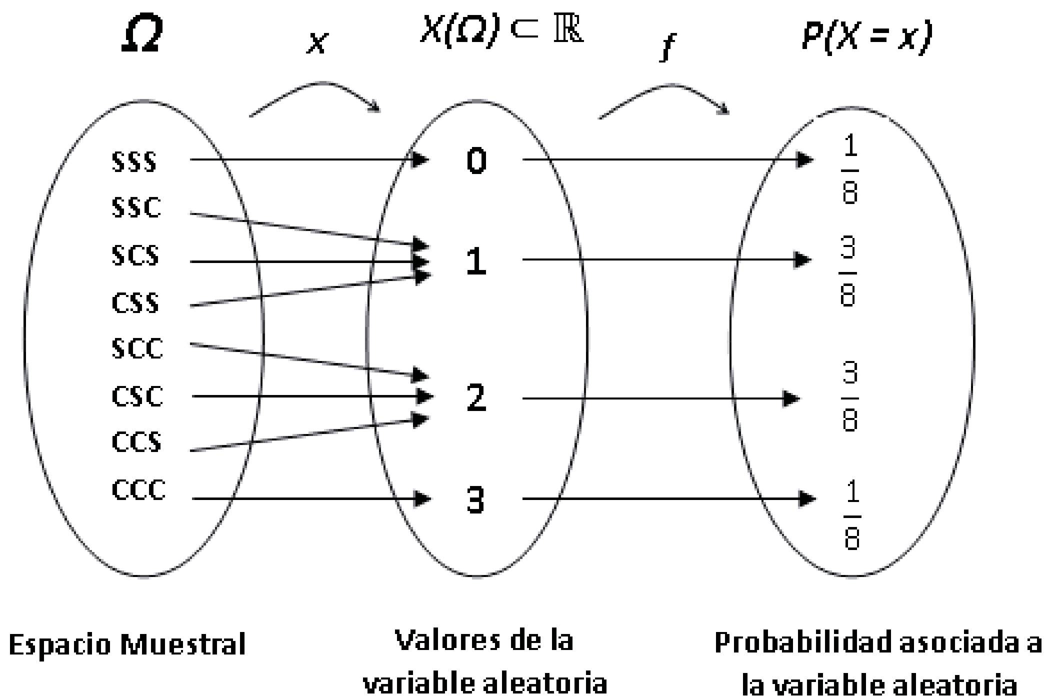


Figura 12: Diagrama que representa el ejemplo anterior

1.3 Descomposición Genética del Objeto Variable Aleatoria

El análisis teórico y los antecedentes de investigación indicaron que para llegar a una construcción objeto del concepto Variable aleatoria con probabilidad, es necesario recorrer un camino que requiere una serie de construcciones previas, las que indicamos a continuación:

En esta descomposición genética se sustentan conceptos matemáticos previos con las respectivas concepciones que debe mostrar un estudiante para la construcción objeto variable aleatoria y los mecanismos mentales asociados a estos conceptos previos.
Para alcanzar dicha construcción, por un lado el estudiante debe desencapsular el objeto Probabilidades en diferentes procesos: Regla de Laplace, axiomas de probabilidad, Probabilidad de sucesos independientes y espacio muestral.
Por otro lado la función como objeto se desencapsula en el dominio, recorrido y función inversa, como proceso. El estudiante realiza acciones sobre los procesos dominio y recorrido. Al realizar acciones el estudiante

sobre los procesos dominio y recorrido, estos se revierten y se interioriza el proceso función compuesta.
A la vez el concepto de variable como proceso se coordina con el espacio muestral como proceso y el concepto de experimento aleatorio como proceso. Dichos procesos se coordinan mediante la función, redefiniéndose esta con el espacio muestral como dominio, formándose la variable aleatoria como proceso (sin probabilidad aún).
Los procesos de probabilidades, se coordinan con los procesos de variable aleatoria y la función compuesta y a cada elemento del recorrido se le asocia una probabilidad, obteniéndose la función compuesta de la variable aleatoria.
La función inversa se desencapsuló y se coordina con la probabilidad de cada elemento del espacio muestral, el estudiante es capaz de responder P(X = x), De esta manera encapsula el objeto con probabilidad a través de la función compuesta y la función inversa y es capaz de construir la función de probabilidad de la variable aleatoria como objeto.

La descripción anterior del modelo teórico de Descomposición Genética propuesta se presenta en el siguiente esquema

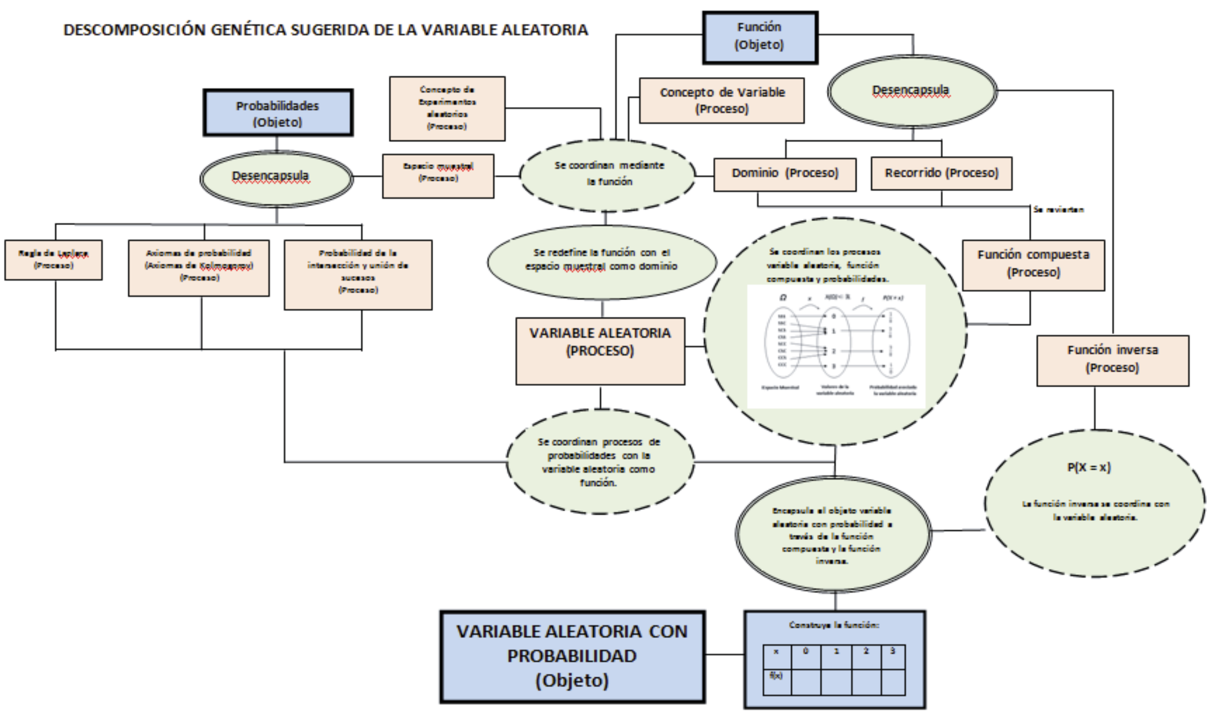


Figura 13: Modelo de construcción del Objeto Variable aleatoria con probabilidad

2. Diseño Y Aplicación De Los Instrumentos

2.1 Especificaciones del cuestionario.

En base a la Descomposición Genética, DG, hipotética del Objeto Variable aleatoria con probabilidad se genera el cuestionario expuesto a continuación. Este instrumento permitirá documentar la DG con evidencia empíricas que den cuenta de las construcciones mentales que posee un estudiante que ha estudiado los temas tratados.

A continuación se presentan las tareas del cuestionario, su descripción en base a la DG y se explicitan las concepciones de las que da cuenta un estudiante con su explicación.

Cuestionario para documentar las construcciones mentales del Objeto Variable aleatoria con probabilidad

Actividad 1: Se realiza el experimento de lanzar una moneda y un dado. Cuál es la probabilidad de:

A) Que salga un múltiplo de 3 en el dado y una cara en la moneda

B) Que salga una cara o un sello en la moneda y un número primo en el dado

C) Qué salga un 1 en el dado o que salga una cara en la moneda?

D) Qué no salga un 4 en el dado o que salga un sello en la moneda?

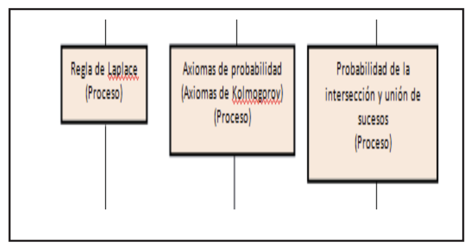


Figura 14: El estudiante dará cuenta de estas construcciones mentales, expuestas en la DG:

Actividad 2: Responde las siguientes preguntas:
¿Qué es una variable?

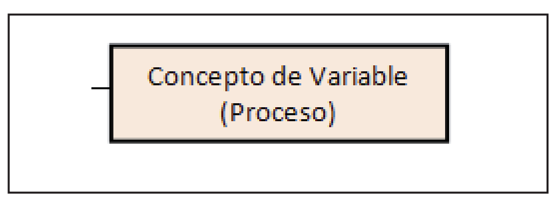


Figura 15: En esta actividad se pretende que el informante muestre esta construcción de la DG.

¿Qué es una variable aleatoria?

____
____
____
____
____

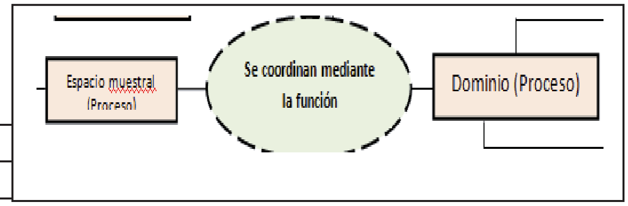
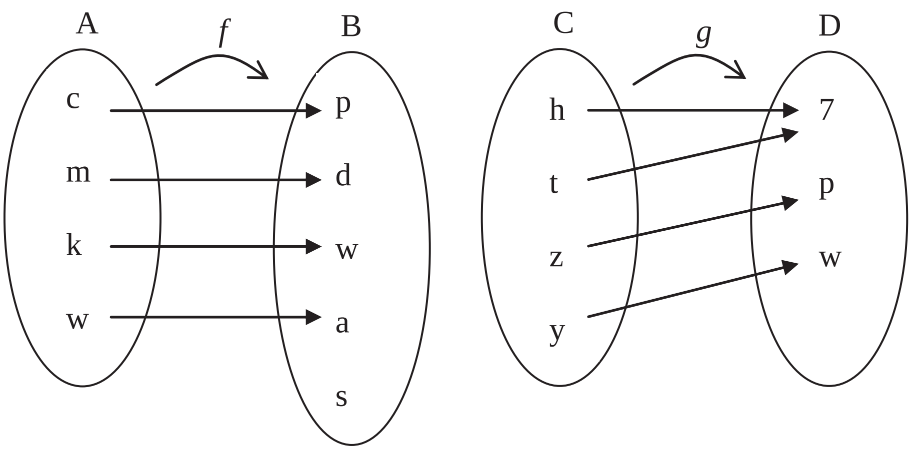


Figura 16: En esta actividad se pretende que el informante muestre estas construcciones mentales.

Actividad 3: Observa las siguientes representaciones de funciones:



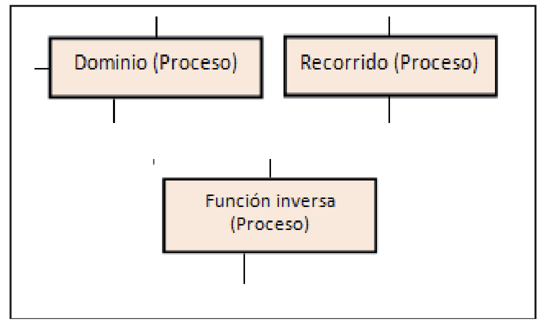


Figura 17: Construcciones mentales que esta pregunta tiene por objetivo evidenciar en los informantes.

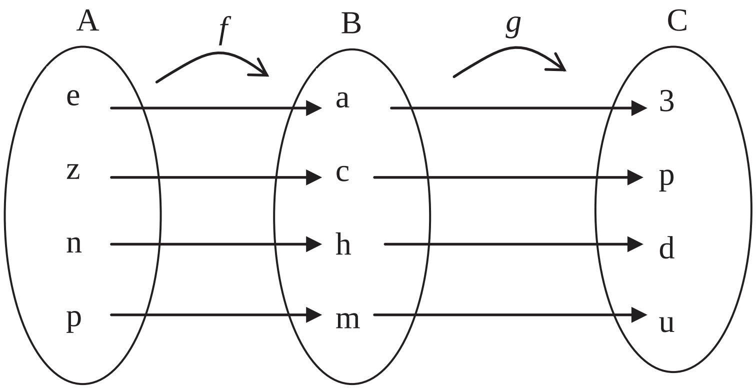
A) Calcula:

1) f(k) =	2) f(w) =	3) $g^{-1}(w)$ =
4) g(y) =	5) g(t) =	6) $f^{-1}(s)$ =

B) Calcula:

1) Dom f =	2) Rec f =
3) Dom g =	4) Rec g =

Actividad 4: Observa las siguientes representaciones de funciones:



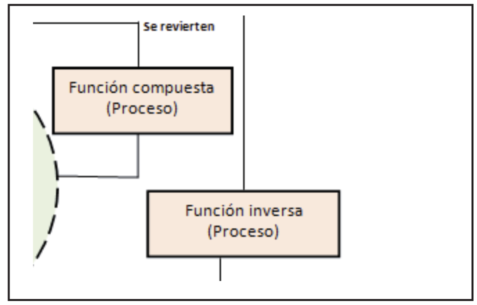


Figura 18: Esta actividad tiene por finalidad mostrar estas construcciones mentales.

Calcula:

1) (f o g)(p) =	2) (g o f) (p) =
3) f^{-1}(m) =	4) g^{-1}(d) =

Actividad 5: Considera el experimento de lanzar dos dados de 6 caras, no cargados.

A) Escribe el espacio muestral del experimento

Figura 19: Estas actividades tienen por objetivo mostrar estas construcciones mentales de la DG.

B) Define una variable aleatoria para el experimento anterior.

C) Diseña un diagrama que relacione el espacio muestral del experimento con la variable aleatoria que definiste.

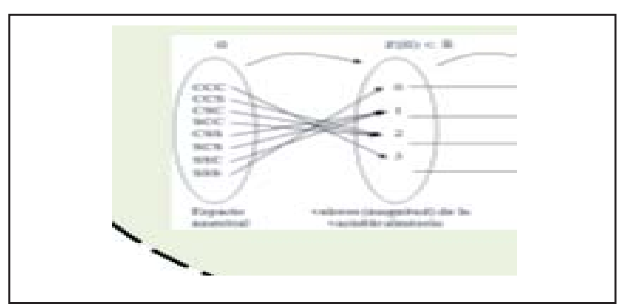
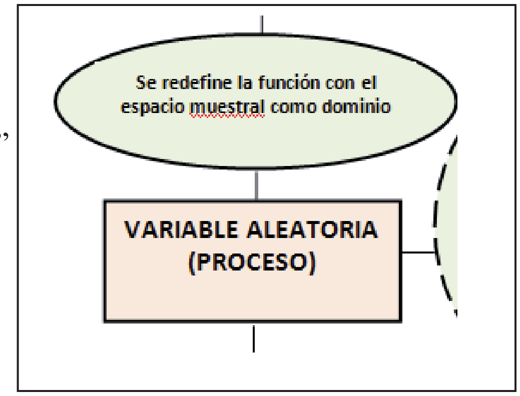


Figura 20: Esta actividad tiene como objetivo determinar si relaciona los procesos descritos anteriormente explícitamente.

Actividad 6: Sea el experimento aleatorio: “Lanzamiento de 4 monedas”
A) Determina el espacio muestral

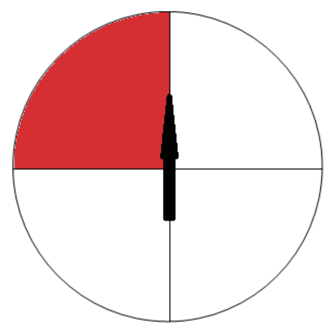


B) Determina la variable aleatoria: “Número de caras que se obtienen”

Figura 21: Esta actividad nos muestra si existe dicha construcción mental.

Actividad 7: En un programa de televisión los concursantes hacen girar una flecha en una ruleta como en la figura y cada vez que la flecha se detiene en la zona de color rojo, se gana un premio y el concurso se trata de hacer girar la flecha 3 veces.
En base a esta situación responde las siguientes preguntas:

A) ¿Cuál es la probabilidad de que un participante gane dos premios?



B) ¿Cuál es la probabilidad de que un concursante no gane ningún premio?

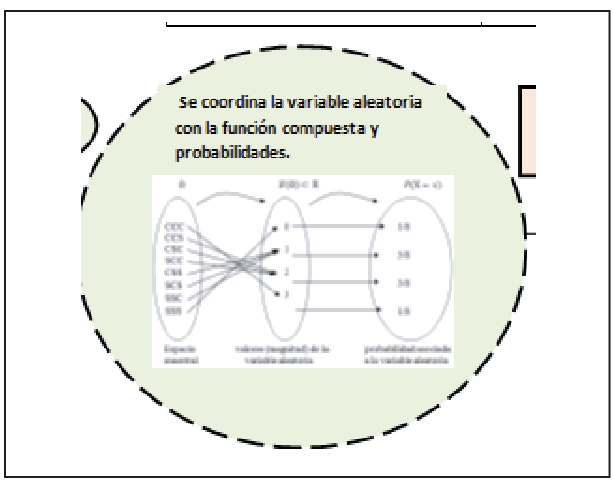


Figura 22: Las dos primeras preguntas de esta actividad tienen por objetivo, evidenciar estas construcciones mentales.

C) Escribe en la tabla siguiente la función de probabilidad de la variable aleatoria que relaciona el espacio muestral con el número de premios que gana un concursante:

x	0	1	2	3
f(x)				

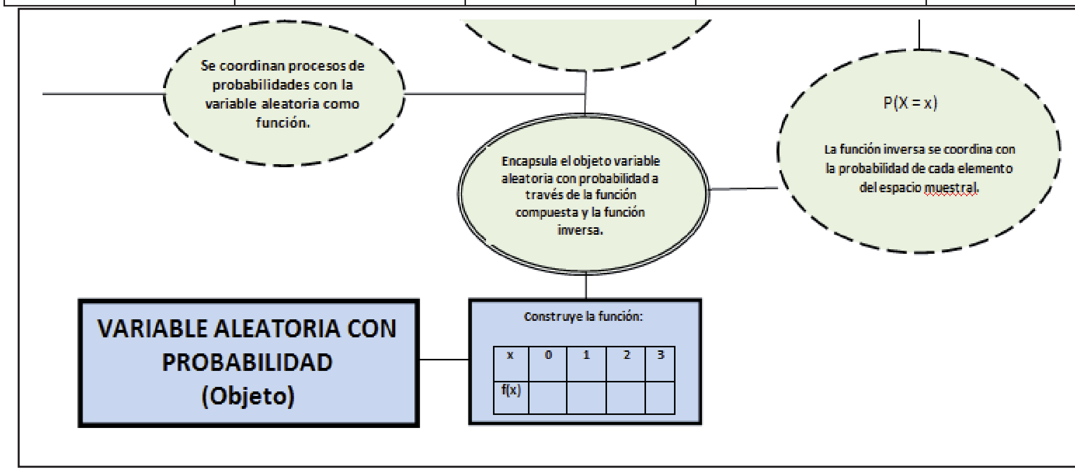


Figura 23: Esta pregunta tiene por finalidad evidenciar si el informante muestra en sus respuestas estas construcciones mentales, con sus respectivos mecanismos de abstracción.

Actividad 8: En una tornería se clasifican los tornillos en defectuosos y en no defectuosos y generalmente se encuentran un 10% de los tornillos defectuosos. Si un experimento consiste en sacar 3 tornillos al azar y se define la variable aleatoria X: "Número de tornillos defectuosos". Determina:
A) $P(X = 2)$

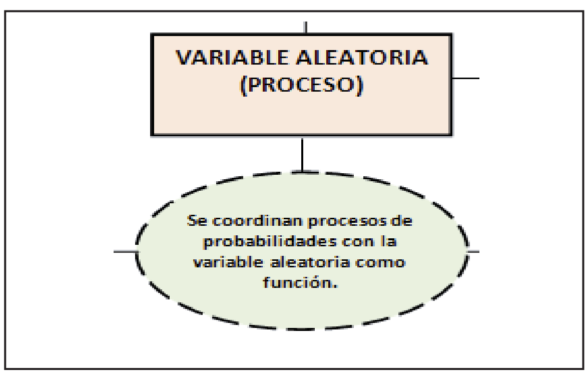


Figura 24: Esta pregunta tiene por objetivo mostrar esta construcción mental, con su respectiva coordinación de procesos.

B) Si P(X = n) = 0,243, ¿cuál es el valor de n?

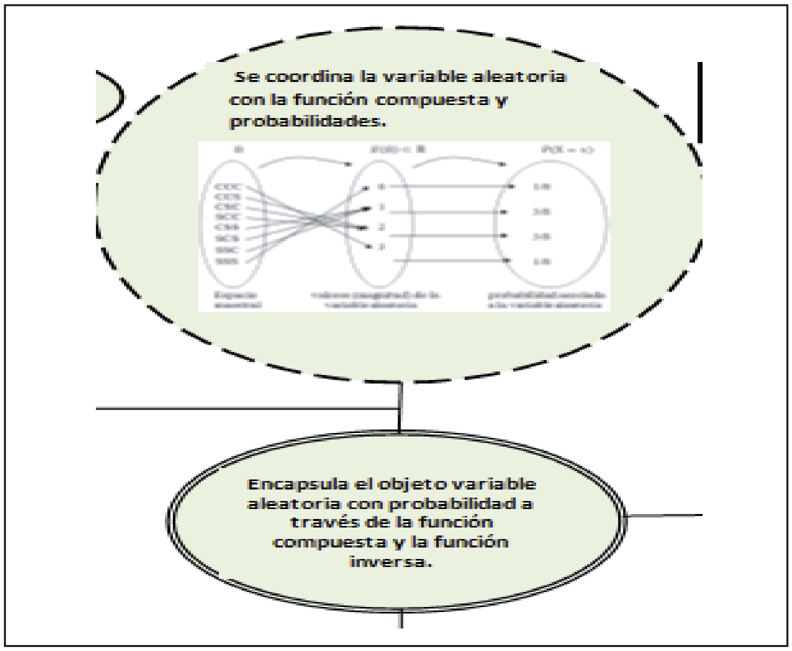


Figura 25: Esta pregunta tiene por objetivo evidenciar si el informante encapsula el objeto variable aleatoria con la función compuesta y en especial con la función inversa.

2.2 Análisis a priori del cuestionario para validar la DG

En cualquier estudio de caso es relevante establecer un análisis a priori y un análisis a posteriori del instrumento que se va a aplicar. En este se reflejarán las respuestas esperadas y posibles de nuestros informantes, desde el punto de vista de las construcciones mentales que den cuenta o que puedan evidenciar.

<u>Actividad 1</u>: Se realiza el experimento de lanzar una moneda y un dado. Cuál es la probabilidad de:

A) Que salga un múltiplo de 3 en el dado y una cara en la moneda.

Opción 1: Responde que la probabilidad de que salga un múltiplo de 3 en el dado es $\frac{1}{3}$ y que salga una cara es $\frac{1}{2}$, entonces como son sucesos independientes, multiplica ambos números, determinando que la probabilidad es $\frac{1}{6}$. Ha interiorizado acciones de probabilidades de sucesos independientes, en un proceso de probabilidad de intersección de sucesos.

Opción 2: Responde que como son sucesos independientes, se suman las probabilidades y obtiene $\frac{5}{6}$. No ha interiorizado acciones de probabilidades de sucesos independientes, en un proceso de probabilidad de intersección de sucesos.

Opción 3: No contesta.

B) Que salga una cara o un sello en la moneda y un número primo en el dado.

Opción 1: Responde que la probabilidad de que salga una cara o un sello es 1 y que la probabilidad de que salga un número primo en el dado es $\frac{1}{2}$, como son sucesos independientes se multiplican las probabilidades, por lo tanto determina que la probabilidad pedida es igual a $\frac{1}{2}$.

Opción 2: Responde que como son sucesos independientes, se suman las probabilidades y no repara en que la probabilidad debe ser menor que 1 y determina que la probabilidad es igual a $\frac{3}{2}$. Confunde la unión con la intersección de probabilidades.

Opción 3: No contesta.

C) Qué salga un 1 en el dado o que salga una cara en la moneda?

Opción 1: Responde que la probabilidad de que salga un 1 en el dado es $\frac{1}{6}$, además la probabilidad de que salga una cara en la moneda es $\frac{1}{2}$. Suma las probabilidades por la propiedad de la unión de probabilidades, obteniendo $\frac{2}{3}$ y resta la intersección de probabilidades, ya que son sucesos que no son disjuntos (o mutuamente excluyentes, como se conocen), y multiplica las probabilidades para calcular su intersección, obteniendo $\frac{1}{12}$, por lo que resta $\frac{2}{3}$ con $\frac{1}{12}$, obteniendo $\frac{7}{12}$.

Opción 2: Suma las probabilidades de ambos sucesos, por lo que responde que se suma $\frac{1}{6}+\frac{1}{2}$, obteniendo como resultado $\frac{2}{3}$, aplicando la propiedad de la unión de conjuntos, pero considerando que son sucesos disjuntos, confundiendo esta noción con la de sucesos independientes, por lo que no resta la probabilidad de la intersección, porque considera que no

hay intersección. Este informante no ha interiorizado los sucesos independientes y la unión e intersección de probabilidades.
Quizás en este caso el hallazgo que se pueda encontrar obedezca a un obstáculo epistemológico dado que en el diagrama de Venn se pueden apreciar las intersecciones de conjuntos como visibles en una parte del dibujo que es un "espacio común" a dos o más conjuntos. Esto puede hacer creer que los sucesos que tienen espacios muestrales distintos, son disjuntos, es decir su intersección es vacía, por lo que su probabilidad es cero.
Por otro lado, tal vez el hecho de sumar las probabilidades solo sea intuitivo, dado que tiene una probabilidad y tiene otra, entonces como a una le agrega la otra, determina que debe sumarlas.

D) Qué no salga un 4 en el dado o que salga un sello en la moneda?

Opción 1: Responde que la probabilidad de que no salga un 4 en el dado es $\frac{5}{6}$ y que la probabilidad de que salga un sello en la moneda es $\frac{1}{2}$; suma ambas probabilidades, obteniendo $\frac{4}{3}$. Además calcula que la probabilidad de la intersección de sucesos es $\frac{5}{12}$, entonces resta esta probabilidad a la suma recién calculada, obteniendo $\frac{11}{12}$ como respuesta.

Opción 2: Responde que la probabilidad de que ocurran estos sucesos simultáneamente es la suma de las probabilidades. Se evidencian los mismos problemas expuestos en el análisis de la pregunta anterior, aunque acrecentados por el hecho de que la suma de las probabilidades da como resultado un número mayor que 1, entonces, además de tener los mismos problemas de la pregunta anterior, se evidencia que el informante no ha interiorizado los procesos axiomas de Kolmogorov.

Opción 3: No contesta.

<u>Actividad 2</u>: Responde las siguientes preguntas:

¿Qué es una variable?

Opción 1: Responde que es una magnitud que varía o algo que varía o que es una magnitud que cambia o que se contrapone a la noción de constante.
*Para comprender este concepto es necesario analizarlo desde el punto de vista matemático, dada la gran cantidad de acepciones de esta palabra. Se usa, por ejemplo para enumerar factores o variables que influyen para que ocurra una determinada situación.

Además, el término variable se utiliza para nombrar alguna cosa o elemento que puede tomar distintos valores en diferentes momentos o circunstancias; cuando se enseña proporcionalidad y se analiza la relación entre magnitudes o variables.
También es usado cuando relacionamos funcionalmente las variables y le asignamos rótulos de variable dependiente y variable independiente.

Opción 2: Responde que es una incógnita o algo similar.

Opción 3: No contesta.

¿Qué es una variable aleatoria?

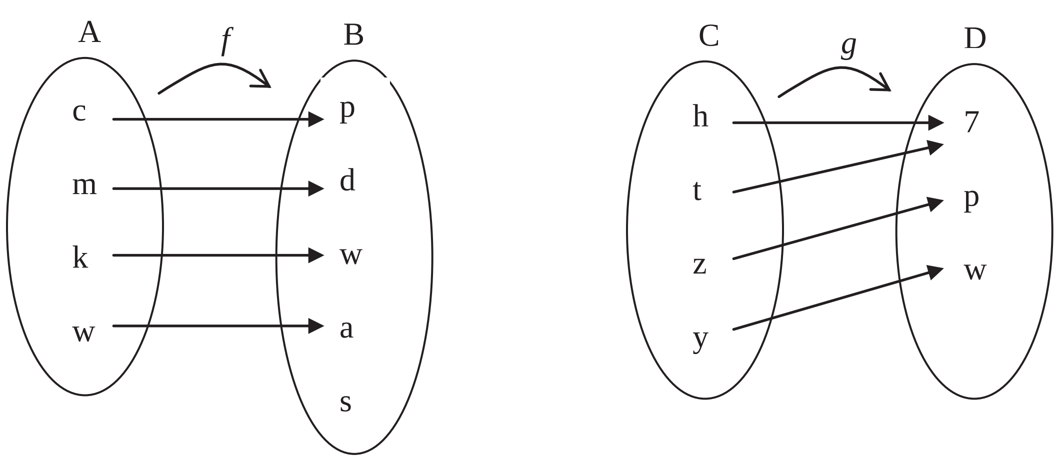
Esta pregunta tiene por objetivo recabar información de cómo son las respuestas de los informantes y además sus construcciones mentales con respecto a este concepto.

Opción 1: Responde que es una función en la que se relacionan los elementos de un espacio muestral de un experimento aleatorio con números reales. Responde que es una cantidad numérica asociada al resultado de un experimento aleatorio.

Opción 2: Da respuestas que tienen que ver con cantidades o magnitudes aleatorias o situaciones que dependen del azar.

Opción 3: No contesta.

<u>Actividad 3</u>: Observa las siguientes representaciones de funciones:



A) Determina:

1) $f(k)$ =	2) $f(w)$ =	3) $g^{-1}(w)$ =
4) $g(y)$ =	5) $g(t)$ =	6) $f^{-1}(s)$ =

Opción 1: Responde que: $f(k) = w$, $f(w) = a$, $g^{-1}(w)$ no existe ya que la función g no es biyectiva, por lo tanto no existe inversa; $g(y) = w$, $g(t) = 7$ y que $f^{-1}(s)$ no existe ya que la función f no es biyectiva.

Opción 2: Responde que $g^{-1}(w) = y$; o que $f^{-1}(s)$ no existe porque no tiene imagen.

Opción 3: Responde algún elemento que no corresponde a la imagen pedida.

Opción 4: No contesta.

B) Determina:

1) Dom f =	2) Rec f =
3) Dom g =	4) Rec g =

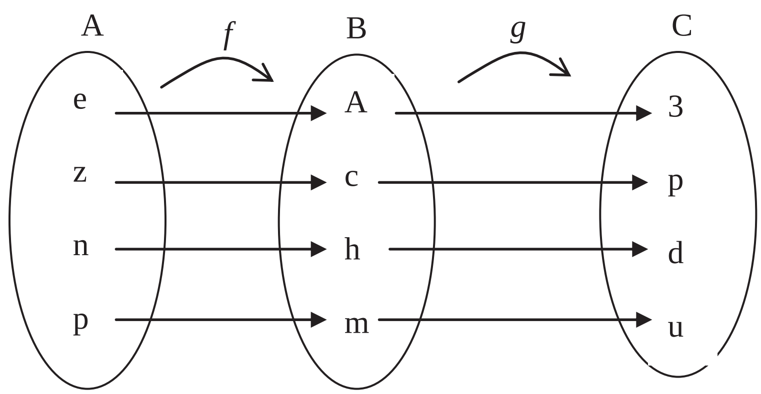
Opción 1: Responde que Dom f = {c, m, k, w}, Rec f = {p, d, w, a}, Dom g = {h, t, z, y} y Rec g = {7, p, w}.

Opción 2: Responde que Rec f = {p, d, w, a, s}.

Opción 3: Responde algún elemento que no corresponde dentro de los conjuntos solicitados.

Opción 4: No contesta.

<u>Actividad 4</u>: Observa las siguientes representaciones de funciones:



Determina:

1) (f o g)(p) =	2) (g o f) (p) =
3) $f^{-1}(m)$ =	4) $g^{-1}(d)$ =

Opción 1: Responde que: (f o g)(p) no existe o no está definido, (g o f)(p) = u, $f^{-1}(m) = p$, $g^{-1}(d) = h$

Opción 2: Contesta que (f o g)(p) = u.

Opción 3: Determina que (g o f)(p) no está definido.

Opción 4: No contesta.

<u>Actividad 5</u>: Considera el experimento de lanzar dos dados de 6 caras, no cargados.

A) Escribe el espacio muestral del experimento.

Opción 1: Determina que el espacio muestral es el formado por los pares: (1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (1, 6); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (2, 5); (2, 6); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (3, 5); (3, 6); (4, 1); (4, 2); (4, 3); (4, 4); (4, 5); (4, 6); (5, 1); (5, 2); (5, 3); (5, 4); (5, 5); (5, 6); (6, 1); (6, 2); (6, 3); (6, 4); (6, 5); (6, 6), obteniendo los 36 pares. Esto lo puede representar de diferentes maneras, por ejemplo con un plano cartesiano, en el cual se gradúan los ejes x e y de una unidad y se representan los puntos dados en dicho plano. O también puede ser a través de una tabla de doble entrada en la cual hay columnas y filas con los números del 1 al 6 y se representan a través de marcas o de puntos los resultados posibles de este espacio muestral.

Opción 2: Determina que son los pares (1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (1, 6); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (2, 5); (2, 6); (3, 3); (3, 4); (3, 5); (3, 6); (4, 4); (4, 5); (4, 6); (5, 5); (5, 6); (6, 6), es decir considera que el orden en el que están los resultados posibles de los dados no es relevante, por lo que considera que, por ejemplo la combinación de resultados (1, 2) y (2, 1) son lo mismo.

Opción 3: No contesta.

B) Define una variable aleatoria para el experimento anterior.

Opción 1: Determina una variable aleatoria posible del espacio muestral, es decir que cumple con relacionar los elementos del espacio muestral con números reales, por ejemplo "X: Función que relaciona los elementos del espacio muestral con la suma de los números que salieron al lanzar los dados". Aunque sabemos que esta es la definición correcta de variable aleatoria, también se aceptará la sola definición de "Suma de los valores obtenidos en los dados", ya que esto indica que se comprende o que se relaciona el espacio muestral con un suceso que puede ser expresado numéricamente, coordinando el proceso de dominio de una función con el proceso espacio muestral.

Opción 2: Esboza una respuesta que no tiene relación alguna con el concepto de variable aleatoria.

Opción 3: No responde.

C) Diseña un diagrama que relacione el espacio muestral del experimento con la variable aleatoria que definiste.

Opción 1: Realiza un diagrama que relaciona explícitamente los elementos del espacio muestral en un conjunto, con números reales en otro conjunto.

Opción 2: Realiza algún diagrama que no explicita una variable aleatoria.

Opción 3: No contesta.

Actividad 6: Sea el experimento aleatorio: "Lanzamiento de 4 monedas".

A) Determina el espacio muestral.

Opción 1: Responde que el espacio muestral es el conjunto que tiene los siguientes elementos: (c, c, c, c); (c, c, c, s); (c, c, s, c); (c, s, c, c); (s, c, c, c); (c, c, s, s); (c, s, c, s); (s, c, s, c); (s, s, c, c); (c, s, s, c); (s, c, c, s); (s, s, s, c); (s, s, c, s); (s, c, s, s); (c, s, s, s); (s, s, s, s), mostrando los 16 resultados posibles.

Opción 2: No logra determinar el espacio muestral.

Opción 3: No responde.

B) Determina la variable aleatoria: "Número de caras que se obtienen".

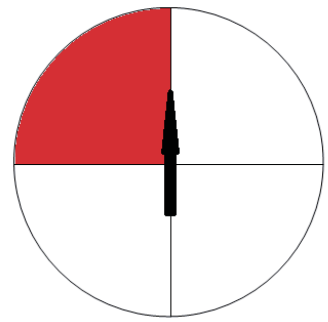
Opción 1: Realiza un esquema o una relación gráfica o a través de un diagrama que indica la relación entre loe elementos del espacio muestral y los números 0, 1, 2, 3 y 4.

Opción 2: Determina que la variable aleatoria es el conjunto formado por los números 0, 1, 2, 3 y 4, lo que indica que la relación está implícita, respondiendo que la variable aleatoria X = {0, 1, 2, 3, 4}.

Opción 3: Responde que la variable aleatoria es otro elemento u otra cosa.

Opción 4: No contesta.

<u>Actividad 7</u>: En un programa de televisión los concursantes hacen girar una flecha en una ruleta como en la figura y cada vez que la flecha se detiene en la zona de color rojo, se gana un premio y el concurso se trata de hacer girar la flecha 3 veces.
En base a esta situación responde las siguientes preguntas:



A) ¿Cuál es la probabilidad de que un participante gane dos premios?

Opción 1: Responde que se define la variable aleatoria "Número de premios que gana un concursante" o como: "La función que relaciona el espacio muestral con el número de premios obtenidos", entonces determina que debe calcular P(X = 2) = 0,25·0,25·0,75 + 0,25·0,75·0,25 + 0,75·0,25·0,25 = 0,140625. También puede responder P(X = 2) = $\frac{1}{4}\bullet\frac{1}{4}\bullet\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\bullet\frac{3}{4}\bullet\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\bullet\frac{1}{4}\bullet\frac{1}{4}=\frac{9}{64}$.

Opción 2: Responde que se debe realizar una distribución binomial, de esta forma:
P (X = x) = $\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$, entonces escribe: $\binom{3}{2}0{,}25^2\cdot 0{,}75^{3-2}$ = $\frac{3!}{1!2!}$·0,25·0,25·0,75 = 3 · 0,25 · 0,25 · 0,75 = 0,140625 = $\frac{9}{64}$.

Opción 3: Determina que es $\frac{1}{4}\bullet\frac{1}{4}\bullet\frac{3}{4}=\frac{3}{64}$, no reconociendo que se pueden combinar estas posibilidades de otras dos maneras también.

Opción 4: No contesta.

B) ¿Cuál es la probabilidad de que un concursante no gane ningún premio?

Opción 1: Responde que debe calcular P(X = 0) = 0,75 · 0,75 · 0,75 = 0,421875 = $\frac{27}{64}$

Opción 2: Responde usando la distribución binomial, llegando al mismo resultado anterior.

Opción 3: Determina que es $\frac{3}{4}$.

Opción 4: No contesta.

C) Escribe en la tabla siguiente la función de probabilidad de la variable aleatoria que relaciona el espacio muestral con el número de premios que gana un concursante:

X	**0**	**1**	**2**	**3**
f(x)				

Opción 1: Responde:

X	**0**	**1**	**2**	**3**
f(x)	**0,421875** $= \frac{27}{64}$	**0,421875** $= \frac{27}{64}$	**0,140625** $= \frac{9}{64}$	**0,015625** $= \frac{1}{64}$

Opción 2: Determina:

X	**0**	**1**	**2**	**3**
f(x)	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{64}$

Esta respuesta indica que no se han coordinado los procesos de variable aleatoria como función; en este caso no se han considerado todos los casos posibles de ganar 1 premio y de ganar 2 premios, es decir no logra determinar que hay otras posibilidades.

Opción 3: Determina que todas las probabilidades son iguales a algún valor.

Opción 4: No contesta.

<u>Actividad 8</u>: En una tornería se clasifican los tornillos en defectuosos y en no defectuosos y generalmente se encuentran un 10% de los tornillos defectuosos. Si un experimento consiste en sacar 3 tornillos al azar y se d efine la variable aleatoria X: "Número de tornillos defectuosos". Determina:

A) P(X = 2)

Opción 1: Determina que las posibilidades que tiene para que salgan 2 tornilos defectuosos son: 1) que salga No defectuoso, defectuoso, defectuoso y sus permutaciones, por lo tanto determina 0,9·0,1·0,1·3 = 0,027 $=\frac{27}{1000}$

Opción 2:Usa la función de distribución binomial, por lo que responde: $P(X=2)=\binom{3}{2}(0{,}1)^2(0{,}9)^1$ = 0,027.

Opción 3: Determina que la probabilidad es 0,1·0,1·0,9, es decir 0,009, obviando el caso de las permutaciones entre estos valores, no determina la probabilidad pedida ya que no coordina los procesos variable aleatoria con la función.

Opción 4:No contesta.

B) Si P(X = n) = 0,243, ¿cuál es el valor de n?

Opción 1: Determina que n =1, construyendo la función, ya que posee pocos valores, como es una variable aleatoria discreta, los valores de x pueden ser 0, 1, 2 ó 3 y el valor x = 2 ya está descartado, ya que su probabilidad ya fue calculada en la pregunta anterior, lo cual limita las opciones a 0, 1 ó 3. Entonces por ensayo error o por la construcción de la función, determina que n = 1, ya que P(X = 1) = (0,1)·(0,9)·(0,9)·3 = 0,243.

Opción 2: Usa la distribución binomial para responder correctamente que n = 1

Opción 3: Trata de resolver la situación usando alguna ecuación, pero sin determinar su resultado, en este caso no ha encapsulado el objeto variable aleatoria con probabilidad, a través de la función compuesta y de la función inversa.

Opción 4: No contesta.

2.3 Validación Del Instrumento

El cuestionario aplicado a los informantes fue sometido a la evaluación de un grupo de tres didactas que han realizado investigaciones utilizando como referente teórico a APOE y se concluyó que cumplía con los requisitos establecidos por el grupo RUMEC.

Además fue revisado y aprobado por el grupo cognitivo, conformado por profesores del ámbito escolar y universitario, candidatos a magister en didáctica de la matemática.

3. El estudio de casos, un método que forma parte de las investigaciones con el enfoque de la Teoría APOE.

La metodología propuesta por el grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community) tiene un enfoque cualitativo y para llevarla a cabo se requiere de la utilización elementos definidos en la metodología de Estudio de casos. En una investigación con APOE, es de suma importancia realizar un estudio en profundidad de las evidencias que se pueden obtener al aplicar el cuestionario a un grupo específico de individuos, llamados informantes, donde cada uno de estos informantes constituye un caso de estudio. Los informantes serán rotulados por I1, I2, I3, etc. .

Dado que nuestra finalidad es documentar la Descomposición Genética Teórica que se ha diseñado y dar indicios de que el camino de construcción propuesto en ella es viable, basta que nos concentremos en la evidencia entregada por un grupo particular de informantes, para una indagación en profundidad, ya que según Stake, "El estudio de casos es el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes" (Stake, 1998, p. 11).

La finalidad de este estudio no será generalizar resultados, sino más bien consistirá en comprender aspectos específicos de la cognición de un sujeto al reconstruir un concepto matemático, por lo que este diseño metodológico a partir de estudio de casos, tendrá un carácter instrumental.

La finalidad de un Estudio instrumental de casos, es establecer una unidad de análisis y centrarse en ella para obtener mayor claridad sobre el tema de estudio. En esta modalidad el caso es un instrumento para conseguir otros fines indagatorios.

En un estudio instrumental, algunos casos servirán mejor que otros, por lo que es importante establecer que casos nos llevarán con mayor facilidad a la comprensión de los aspectos que se pretenden analizar.
Considerando el tiempo del que se dispone para el trabajo de campo y la posibilidad de acceso al mismo son casi siempre limitados. Según Stake, 1998, de ser posible, *"se debe escoger casos que sean fáciles de abordar y donde nuestras indagaciones sean bien acogidas, quizá aquellos en los que se pueda identificar un posible informador y que cuenten con actores (las personas estudiadas) dispuestos a dar su opinión"*[4] ya sea sobre las estrategias o los mecanismos utilizados para realizar la tarea a la que serán expuestos.

Para esta investigación recurriremos a personas que están dispuestas a poner en evidencia sus conocimientos y sus habilidades, para aportar a la construcción del concepto matemático Variable aleatoria con probabilidad.

La elección de los informantes no tendrá relación con una institución en particular, sino más bien con los conocimientos que estos tengan del tema en estudio. Es así, como requeriremos de la participación de estudiantes destacados en sus estudios de matemática, profesores que realizan clases actualmente y que enseñen o debieran enseñar estos tópicos a nivel escolar, para que nos puedan mostrar a través de respuestas claras y argumentos observables, las construcciones y mecanismos mentales dispuestos en sus respuestas.

[4] Stake (1998, p17)

***Tabla 1*: Resumen del diseño metodológico implementado.**

	Caso 1	**Caso 2**	**Caso 3**
	Estudiantes de enseñanza media 3 distintos colegios de Santiago. I1, I2, I3, I4, I5	Estudiantes de pedagogia em matemática de uma universidad tradicional en Santiago. I6, I7, I8, I9, I10, I11	Profesores de aula de enseñanza media del sistema educativo chileno. I12, I13, I14, I15
Unidad de Análisis	Aplicación de Instrumentos: Cuestionario para documentar las construcciones mentales del objeto Variable aleatoria con probabilidad.	Aplicación de Instrumentos: Cuestionario para documentar las construcciones mentales del objeto Variable aleatoria con probabilidad.	Aplicación de Instrumentos: Cuestionario para documentar las construcciones mentales del objeto Variable aleatoria con probabilidad.
	Análisis y Verificación de datos	Análisis y Verificación de datos	Análisis y Verificación de datos

CAPÍTULO V:
ANÁLISIS Y VERIFICACIÓN DE DATOS

Para documentar la Descomposición Genética teórica de las construcciones y mecanismos mentales para el Objeto Variable aleatoria con probabilidad, propuesta en esta investigación, se implementa el cuestionario presentado en la sesión anterior.

Según lo establecido en el capítulo 4, para esta implementación se utiliza la metodología de investigación denominada estudio de casos. No debemos olvidar que un estudio se caso no se realiza con la finalidad de generalizar los resultados obtenidos en nuestra investigación para otros casos, sino para realizar un estudio profundo de lo resultados obtenidos en cada uno de nuestros casos.

En esta ocasión el estudio de casos tendrá un carácter instrumental, pues este tipo de estudio propicia un análisis que permite obtener mayor claridad sobre el tema "El caso es un instrumento para conseguir otros fines indagatorios" (Stake).

1. RESULTADOS DEL CUESTIONARIO

A continuación se presentan los resultados del cuestionario obtenidos con los desarrollos de los informantes.

1.1 Análisis por pregunta

Cada pregunta va acompañada de una etiqueta que corresponde a la construcción mental que se pudo evidenciar en su respuesta, con la siguiente descripción:

A: Acción P: Proceso O:Objeto

A – P: En camino a una construcción Proceso

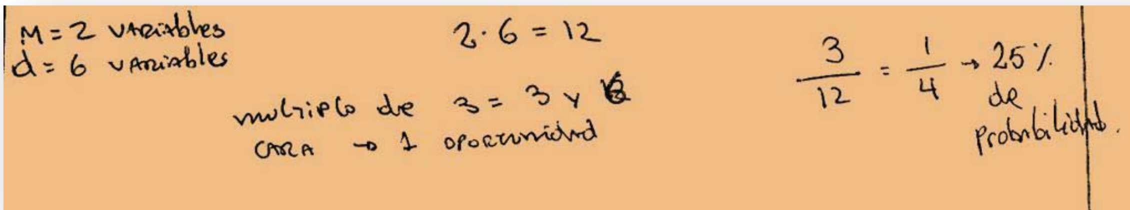
S C: Sin construcción

En este análisis no se consideró la concepción Esquema dado que esta es posible lograr con otros esquemas y con la tematización de otros objetos, que no son objetivos de esta investigación.

1.1.1 ANÁLISIS POR PREGUNTA CASO 1

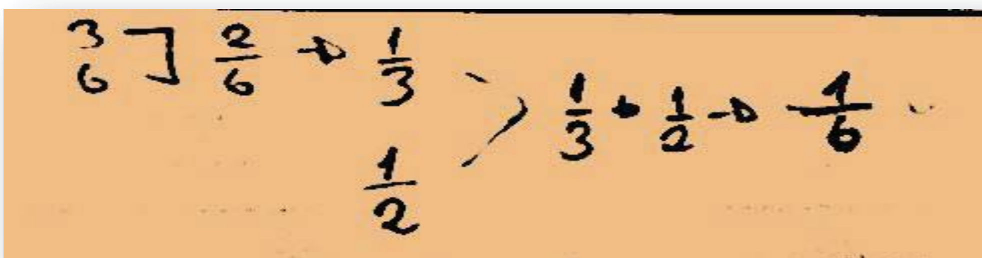
Actividad 1: Se realiza el experimento de lanzar una moneda y un dado. Cuál es la probabilidad de:

A) Que salga un múltiplo de 3 en el dado y una cara en la moneda.



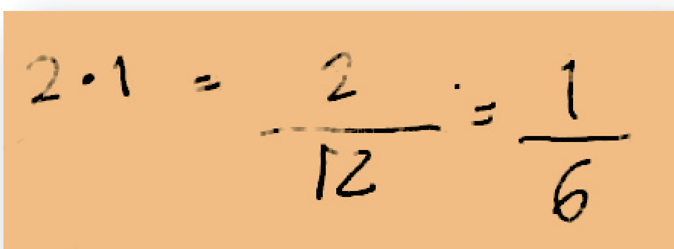
P

Figura 26: **Respuesta informante 1, actividad 1. A)**



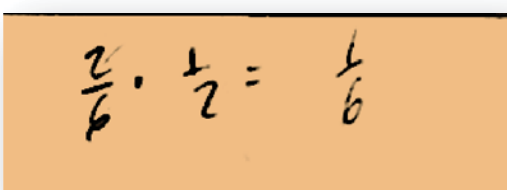
P

Figura 27: **Respuesta informante 2, actividad 1. A)**



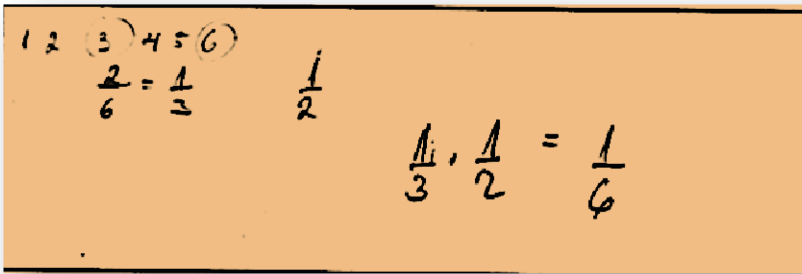
P

Figura 28: **Respuesta informante 3, actividad 1. A)**



P

Figura 29: **Respuesta informante 4, actividad 1. A)**

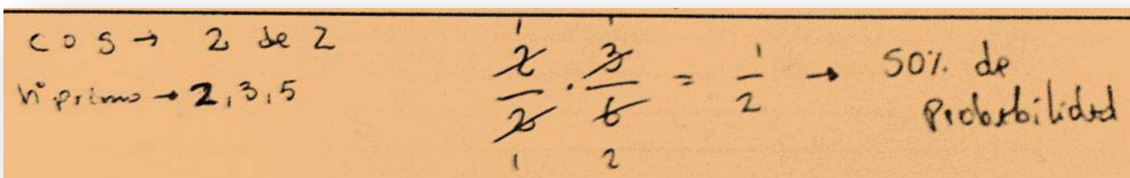


P

Figura 30: **Respuesta informante 5, actividad 1. A)**

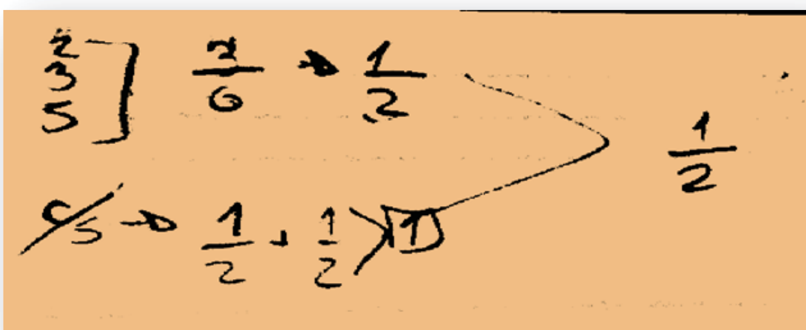
Como se puede apreciar todos los informantes salvo I1, responden correctamente, mostrando una concepción proceso de probabilidades

B) Que salga una cara o un sello en la moneda y un número primo en el dado.



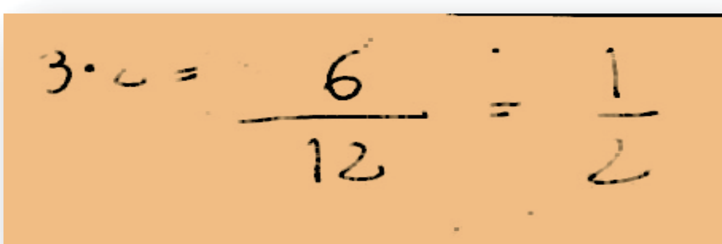
P

Figura 31: **Respuesta informante 1, actividad 1. B)**



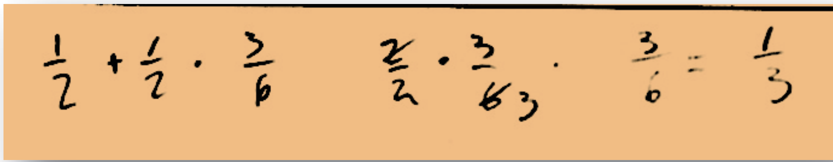
P

Figura 32: **Respuesta informante 2, actividad 1. B)**



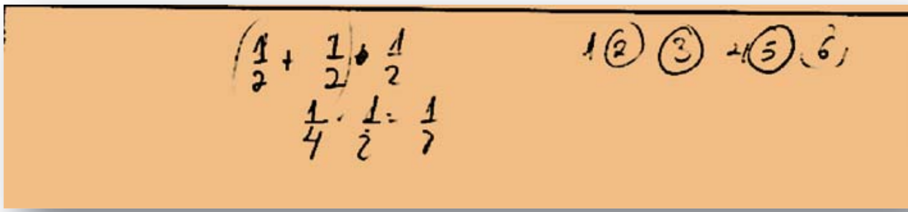
P

Figura 33: **Respuesta informante 3, actividad 1. B)**



P

Figura 34: **Respuesta informante 4, actividad 1. B)**

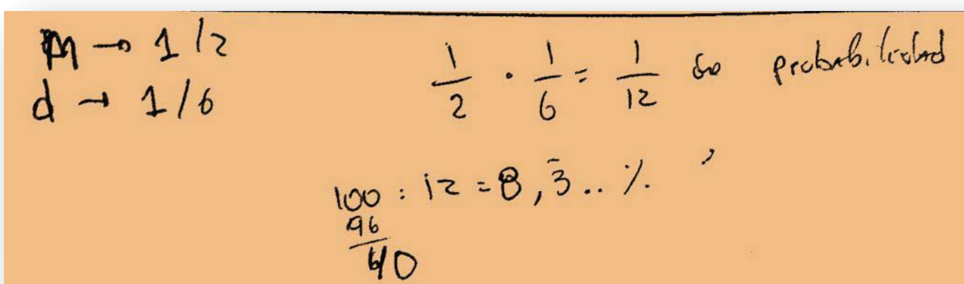


P

Figura 35: **Respuesta informante 5, actividad 1. B)**

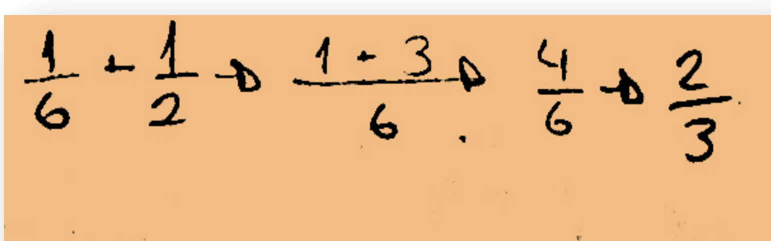
Como se puede evidenciar, todos los informantes responden correctamente, salvo I4, que se equivoca al simplificar la fracción, aunque desarrolla correctamente el problema, mostrando una construcción proceso de probabilidades.

C) Qué salga un 1 en el dado o que salga una cara en la moneda?



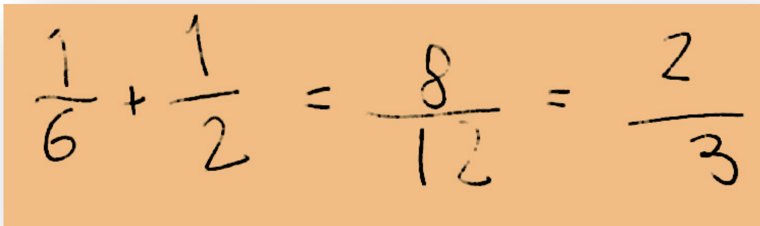
S C

Figura 36: **Respuesta informante 1, actividad 1. C)**



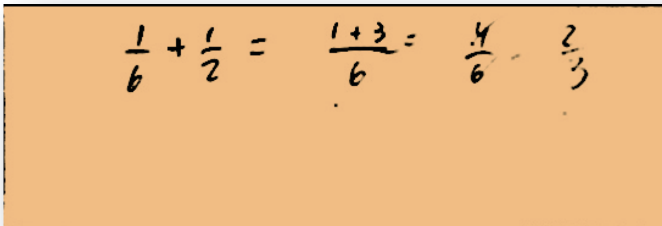
A – P
propiedades
de la unión
de prob.

Figura 37: **Respuesta informante 2, actividad 1. C)**



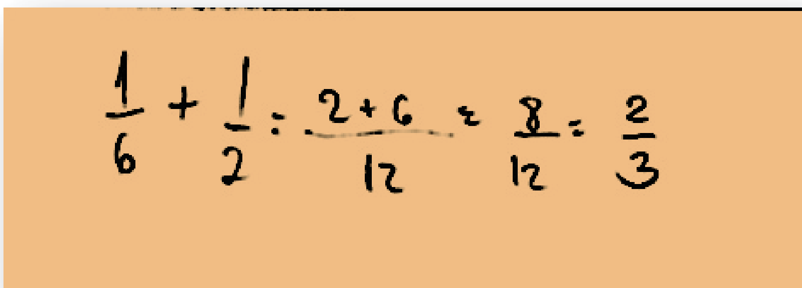
A – P propiedades de la unión de prob.

***Figura 38*: Respuesta informante 3, actividad 1. C)**



A – P propiedades de la unión de prob.

***Figura 39*: Respuesta informante 4, actividad 1. C)**

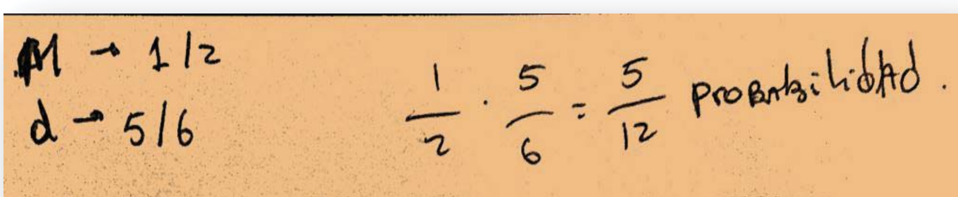


A – P propiedades de la unión de prob.

***Figura 40*: Respuesta informante 5, actividad 1. C)**

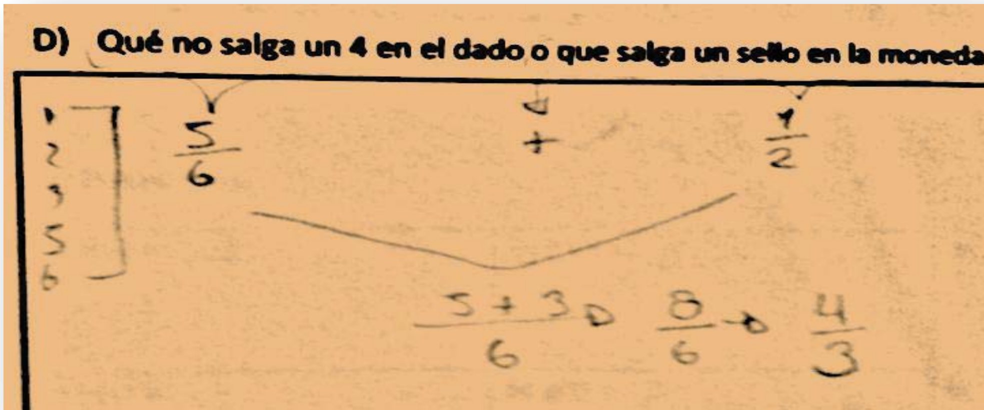
Ninguno de los informantes aplica el concepto correctamente, ya que ninguno de ellos resta la probabilidad de la intersección de sucesos, incluso I1 confunde las propiedades y multiplica las probabilidades en vez de sumarlas.

D) Qué no salga un 4 en el dado o que salga un sello en la moneda?



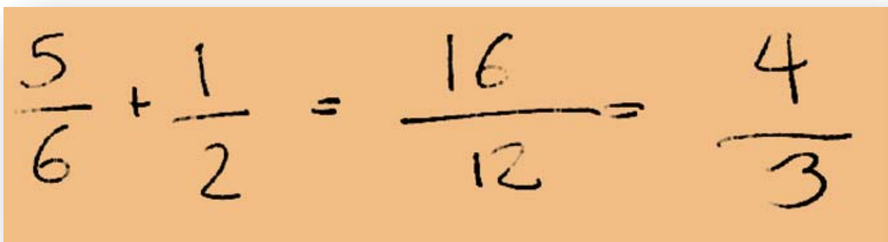
S C

***Figura 41*: Respuesta informante 1, actividad 1. D)**



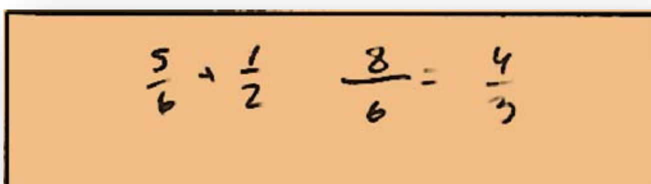
S C Axiomas
A – P propiedades de la unión de prob.

***Figura 42*: Respuesta informante 2, actividad 1. D)**



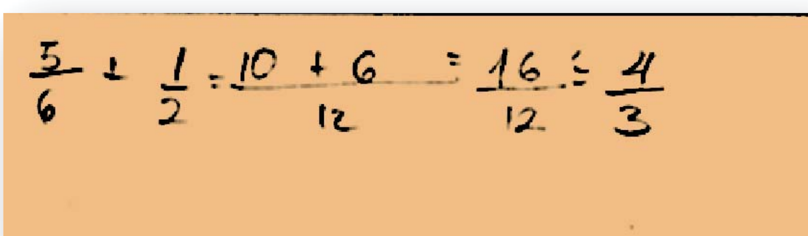
S C Axiomas
A – P propiedades de la unión de prob.

***Figura 43*: Respuesta informante 3, actividad 1. D)**



S C Axiomas
A – P propiedades de la unión de prob.

***Figura 44*: Respuesta informante 4, actividad 1. D)**



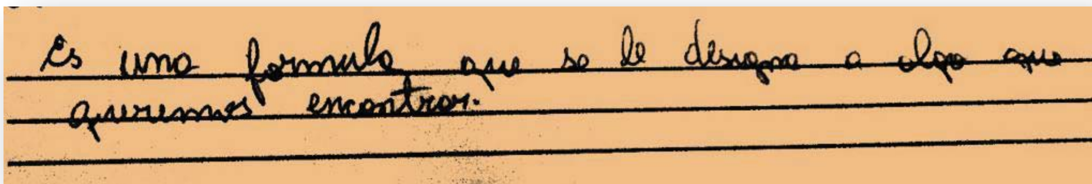
S C Axiomas
A – P propiedades de la unión de prob.

***Figura 45*: Respuesta informante 5, actividad 1. D)**

Aquí se muestra el mismo problema anterior, ya que ninguno de los informantes contesta correctamente, I1 tiene una confusión, ya que nuevamente multiplica en vez de sumar las probabilidades. Este fenómeno nos reafirma que los alumnos reconocen parcialmente las propiedades de las probabilidades, ya que las suman, es decir muestran una construcción mental entre acción y proceso de las propiedades de probabilidades. Sin embargo, en cuanto a sus axiomas básicos fundamentales, no muestran una concepción acción, siquiera debido a que no reparan en que el resultado de una probabilidad les está dando como resultado un número mayor que 1, por lo que no muestran construcción mental de los axiomas de kolmogorov.

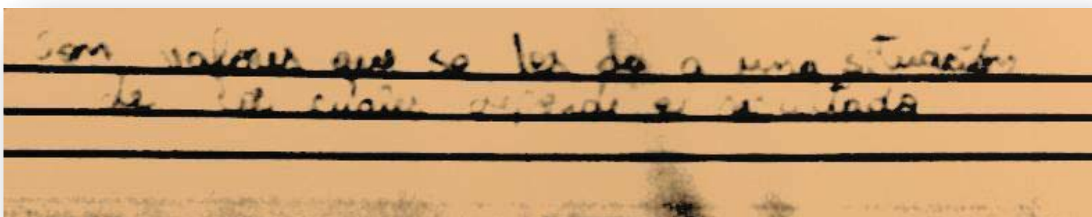
Actividad 2: Responde las siguientes preguntas:

¿Qué es una variable?



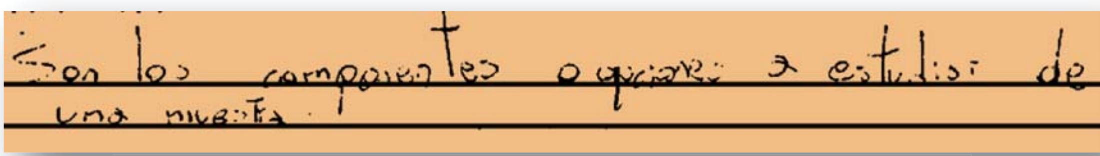
A - P

***Figura 46*: Respuesta informante 1, actividad 2. A)**



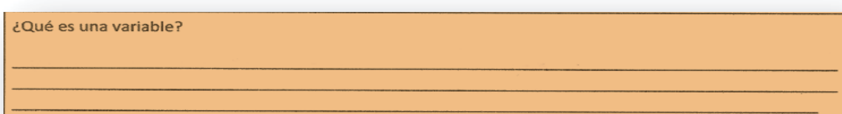
A - P

***Figura 47*: Respuesta informante 2, actividad 2. A)**



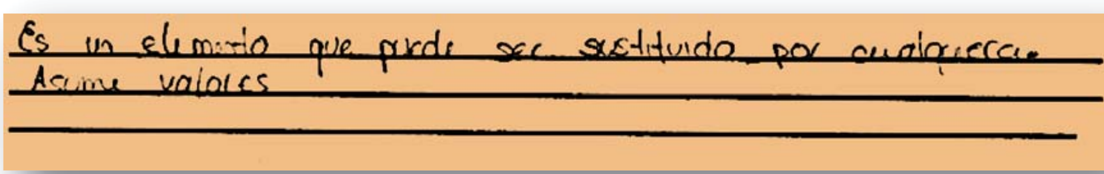
A – P

***Figura 48*: Respuesta informante 3, actividad 2. A)**



S C

***Figura 49*: Respuesta informante 4, actividad 2. A)**

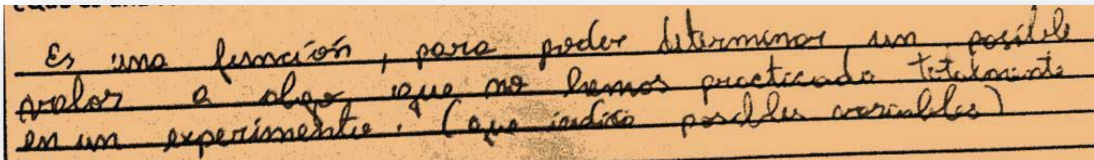


A–P

***Figura 50*: Respuesta informante 5, actividad 2. A)**

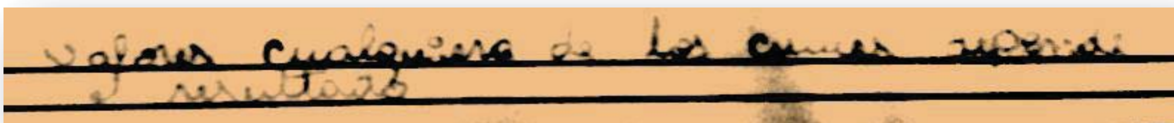
En estas respuestas hay diversidad de enfoques o énfasis, ya que se le llama: "fórmula", "valor", "componentes" o "elementos", se aproximan todos a una respuesta satisfactoria, pero ninguno logra plasmar una, podemos afirmar que están en una etapa entre acción y proceso del concepto de variable. I4 no contesta.

¿Qué es una variable aleatoria?


Es una función, para poder determinar un posible valor a algo que no hemos practicado totalmente en un experimento. (que indica posibles variables)

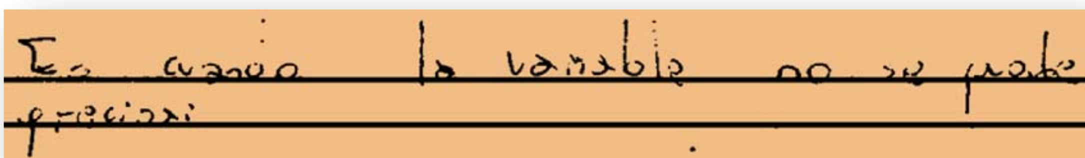
A–P

Figura 51: **Respuesta informante 1, actividad 2. B)**


valores cualquiera de los cuales [illegible] resultados

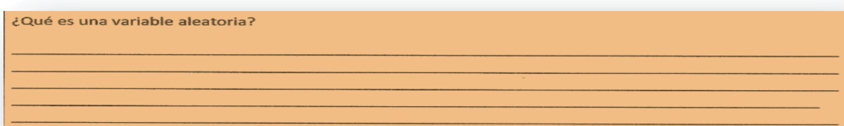
S C

Figura 52: **Respuesta informante 2, actividad 2. B)**


Es cuando la variable no se puede precisar

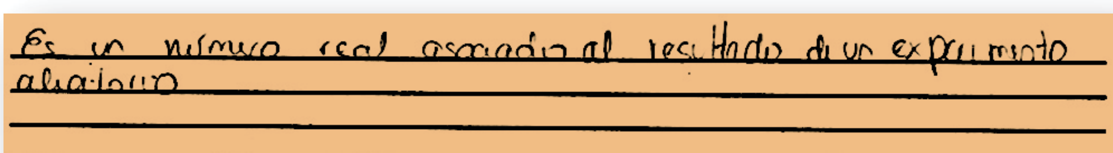
S C

Figura 53: **Respuesta informante 3, actividad 2. B)**


¿Qué es una variable aleatoria?

S C

Figura 54: **Respuesta informante 4, actividad 2. B)**

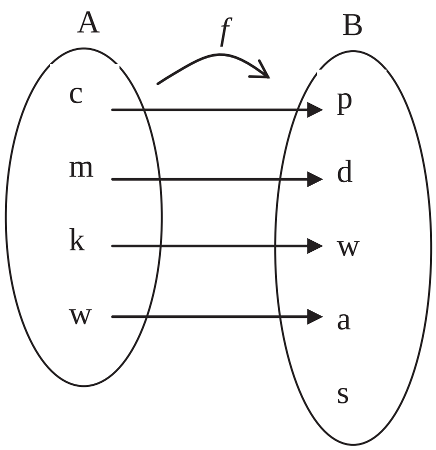

Es un número real asociado al resultado de un experimento aleatorio

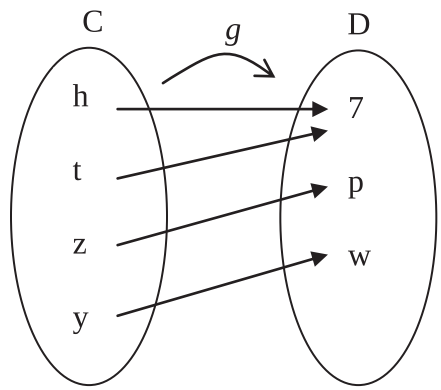
A–P

Figura 55: **Respuesta informante 5, actividad 2. B)**

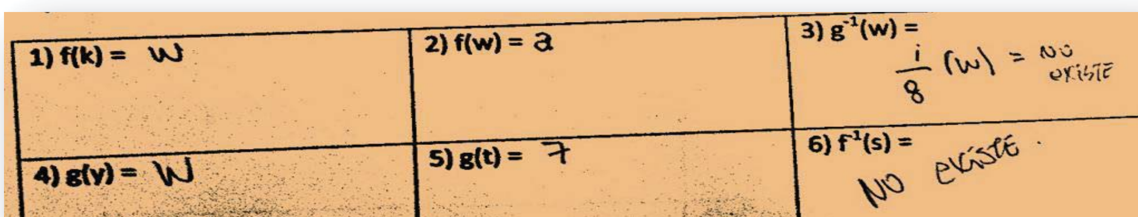
Salvo I4, todos los informantes tienen una idea de lo que es una variable aleatoria, incluso I1 afirma que es una función, aunque su respuesta después se diluye o se torna confusa, por lo que muestra que está en camino a una construcción proceso. I5 afirma que "es un número real asociado al resultado de un experimento aleatorio", lo que nos muestra una construcción entre acción y proceso, ya que no afirma que es una función, aunque habla de la relación que está presente. I2 al parecer la define como variable, no mostrando construcción. I3 se refiere al ámbito de aleatoriedad presente en toda variable aleatoria, aunque no la define completamente, también está en camino a una construcción proceso.

Actividad 3: Observa las siguientes representaciones de funciones:



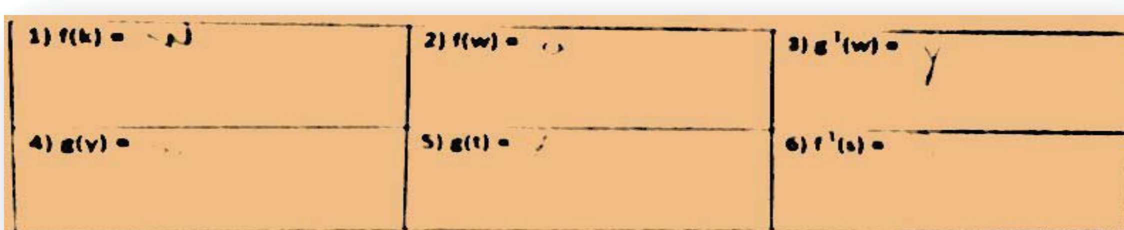


A) Determina:



A–P

Figura 56: **Respuesta informante 1, actividad 3. A)**



A–P

Figura 57: **Respuesta informante 2, actividad 3. A)**

1) $f(k) =$ w	2) $f(w) =$ a	3) $g^{-1}(w) =$ y
4) $g(y) =$ w	5) $g(t) =$ 7	6) $f^{-1}(s) =$

A – P

***Figura 58*: Respuesta informante 3, actividad 3. A)**

1) $f(k) =$	2) $f(w) =$	3) $g^{-1}(w) =$
4) $g(y) =$	5) $g(t) =$	6) $f^{-1}(s) =$

S C

***Figura 59*: Respuesta informante 4, actividad 3. A)**

1) $f(k) =$ w	2) $f(w) =$ a	3) $g^{-1}(w) =$
4) $g(y) =$ w	5) $g(t) =$ 7	6) $f^{-1}(s) =$

A–P

***Figura 60*: Respuesta informante 5, actividad 3. A)**

Como se puede apreciar, la mayoría de los informantes no tiene problemas para determinar una imagen de alguna de las funciones dado un valor de su dominio, se muestra una construcción proceso en todos ellos, salvo I4 que no contesta. Sin embargo al determinar la función inversa, no se muestra construcción mental, ya que I2 e I4 responden que $g^{-1}(w) = y$, además I1 manifiesta que no existe, pero justificando como que g^{-1} es una especie de "fracción recíproca de g", como si g fuera un término algebraico y no una función. Nótese además que I5 tacha el espacio para responder, pero no indica que no existe tal imagen.

B) Determina:

1) Dom f = c, m, k, w	2) Rec f = p, d, w, a.
3) Dom g = h, t, z, y	4) Rec g = 7, p, w.

P

***Figura 61*: Respuesta informante 1, actividad 3. B)**

1) Dom f =	2) Rec f =
3) Dom g =	4) Rec g =

S C

Figura 62: **Respuesta informante 2, actividad 3. B)**

1) Dom f =	2) Rec f =
3) Dom g =	4) Rec g =

S C

Figura 63: **Respuesta informante 3, actividad 3. B)**

1) Dom f =	2) Rec f =
3) Dom g =	4) Rec g =

S C

Figura 64: **Respuesta informante 4, actividad 3. B)**

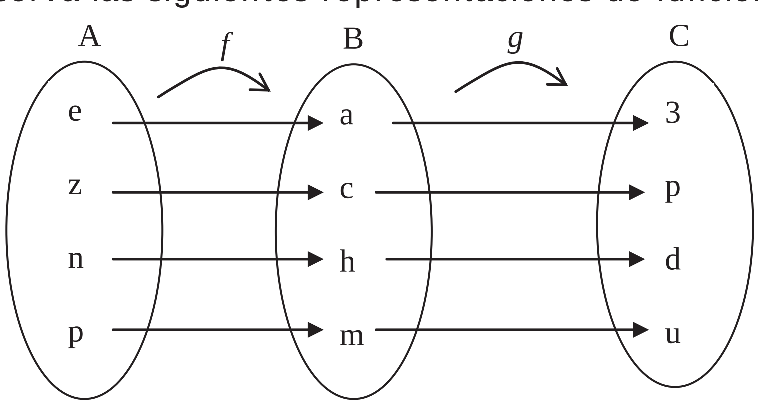
1) Dom f = C m k w	2) Rec f = p d w a
3) Dom g = h t z y	4) Rec g = 7 p w

P

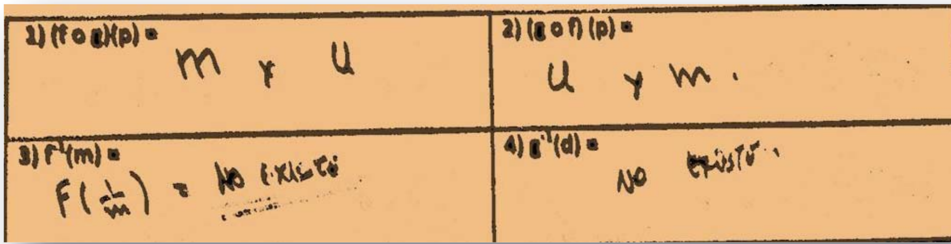
Figura 65: **Respuesta informante 5, actividad 3. B)**

Como se aprecia solo I1 e I5 tienen una concepción proceso del dominio y recorrido de una función; los demás informantes no contestan.

Actividad 4: Observa las siguientes representaciones de funciones:



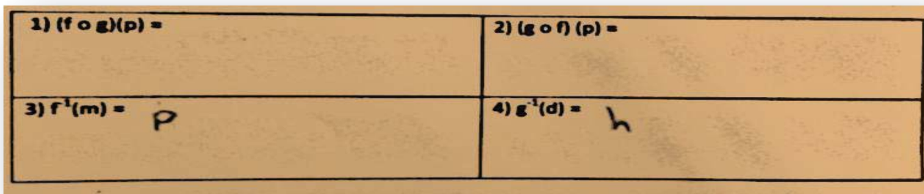
Determina:



1) (f o g)(p) = m y u	2) (g o f) (p) = u y m.
3) f^{-1}(m) = $f(\frac{1}{m})$ = No existe	4) g^{-1}(d) = No existe

S C

Figura 66: **Respuesta informante 1, actividad 4**



1) (f o g)(p) =	2) (g o f) (p) =
3) f^{-1}(m) = p	4) g^{-1}(d) = h

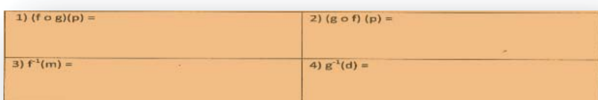
A–P

Figura 67: **Respuesta informante 2, actividad 4**

1) (f o g)(p) =	2) (g o f) (p) =
3) f^{-1}(m) =	4) g^{-1}(d) =

S C

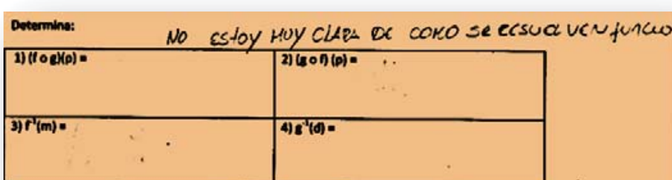
Figura 68: **Respuesta informante 3, actividad 4**



1) (f o g)(p) =	2) (g o f) (p) =
3) f^{-1}(m) =	4) g^{-1}(d) =

S C

Figura 69: **Respuesta informante 4, actividad 4**



Determina: No estoy muy clara de como se escribe una función

1) (f o g)(p) =	2) (g o f) (p) =
3) f^{-1}(m) =	4) g^{-1}(d) =

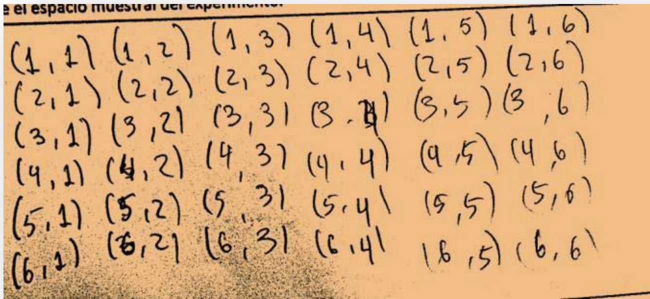
S C

Figura 70: **Respuesta informante 5, actividad 4**

Ninguno de los informantes muestra construcción mental en sus respuestas.

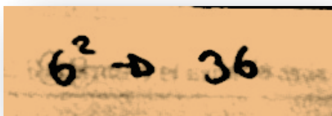
<u>Actividad 5</u>: Considera el experimento de lanzar dos dados de 6 caras, no cargados.

A) Escribe el espacio muestral del experimento.



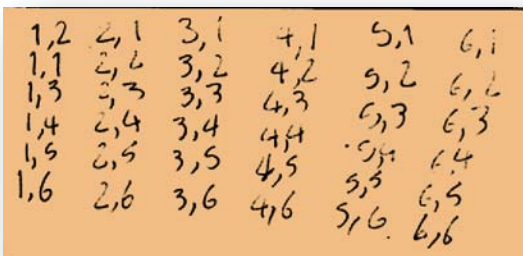
P

Figura 71: **Respuesta informante 1, actividad 5. A)**



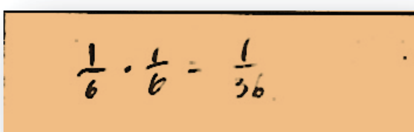
A – P

Figura 72: **Respuesta informante 2, actividad 5. A)**



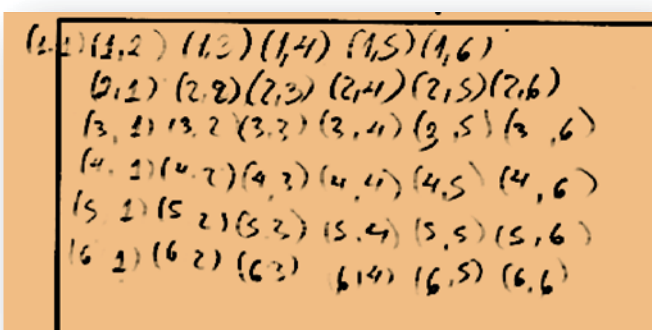
P

Figura 73: **Respuesta informante 3, actividad 5. A)**



A – P

Figura 74: **Respuesta informante 4, actividad 5. A)**

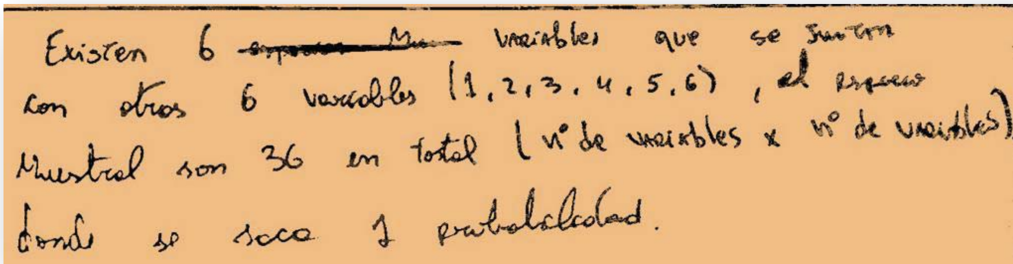


P

Figura 75: **Respuesta informante 5, actividad 5. A)**

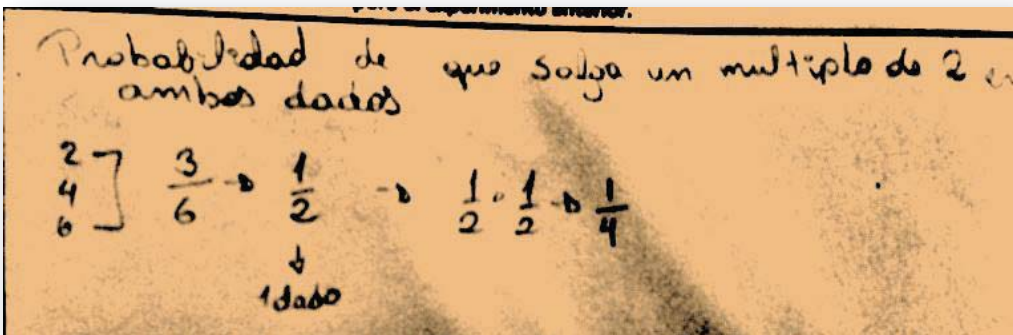
En estas respuestas los informantes evidencian una construcción proceso del espacio muestral de un experimento aleatorio, sin embargo I2 se refiere a la cardinalidad del espacio muestral, mientras que I4 calcula la probabilidad de uno de los elementos del espacio muestral. Estos dos últimos están en camino a una construcción proceso.

B) Define una variable aleatoria para el experimento anterior.


Existen 6 ~~espacios mu~~ variables que se juntan con otros 6 variables (1, 2, 3, 4, 5, 6), el espacio muestral son 36 en total (nº de variables x nº de variables) donde se saca 1 probabilidad.

S C

Figura 76: **Respuesta informante 1, actividad 5. B)**

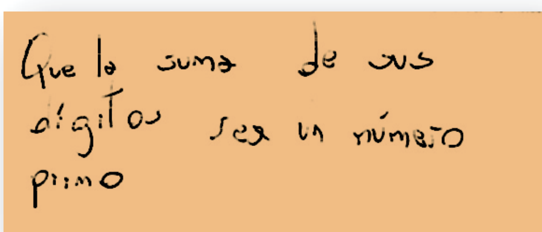

Probabilidad de que salga un multiplo de 2 en ambos dados

2, 4, 6] $\frac{3}{6} \to \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \to \frac{1}{4}$

1 dado

A – P

Figura 77: **Respuesta informante 2, actividad 5. B)**

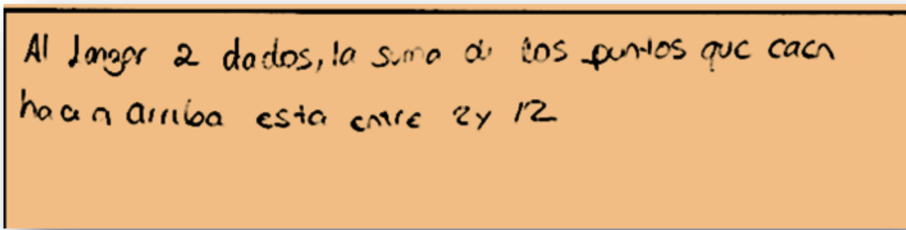

Que la suma de sus digitos sea un número primo

A – P

Figura 78: **Respuesta informante 3, actividad 5. B)**

A – P

Figura 79: **Respuesta informante 4, actividad 5. B)**

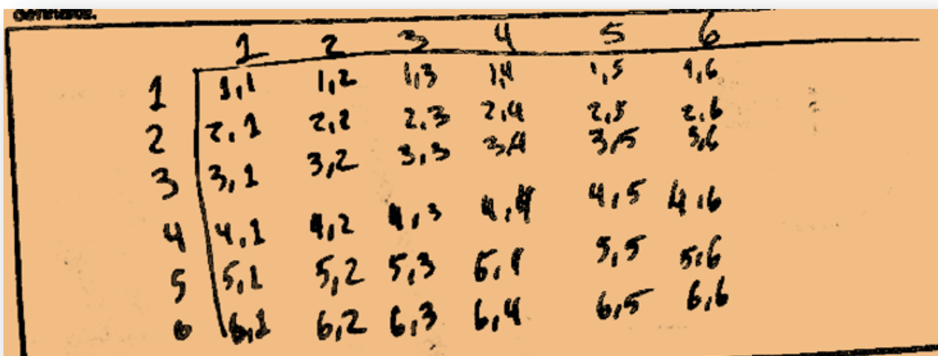


A – P

Figura 80: **Respuesta informante 5, actividad 5. B)**

Como podemos observar los informantes confunden el concepto de suceso con el de variable aleatoria; si bien la variable aleatoria puede ser un suceso en particular, debe quedar clara la relación que hay entre espacio muestral y números reales. Hay problemas con la redacción en la definición de la variable aleatoria en la mayoría de ellos.

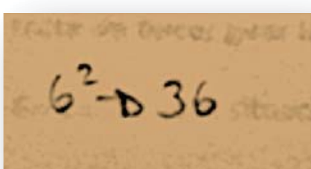
C) Diseña un diagrama que relacione el espacio muestral del experimento con la variable aleatoria que definiste.



	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

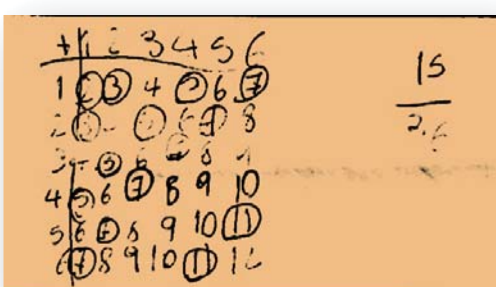
S C

Figura 81: **Respuesta informante 1, actividad 5. C)**



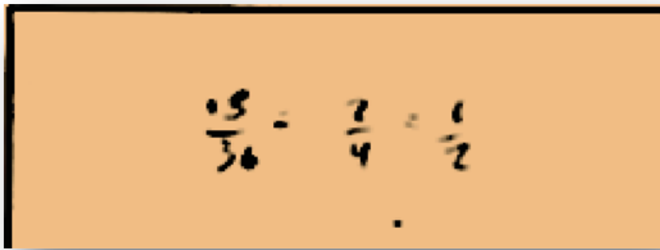
S C

Figura 82: **Respuesta informante 2, actividad 5. C)**



S C

Figura 83: **Respuesta informante 3, actividad 5. C)**



S C

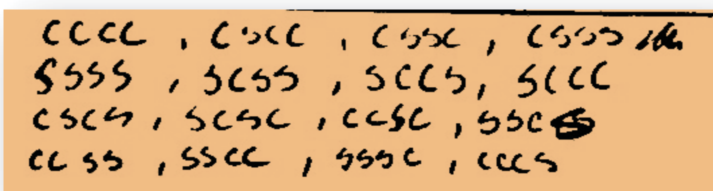
Figura 84: **Respuesta informante 4, actividad 5. C)**

El informante 5 no contesta. ⟶ S C

Ninguno de los informantes establece una relación entre los elementos del espacio muestral y números reales. I5 no contesta.

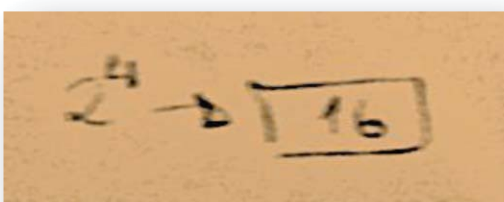
<u>Actividad 6</u>: Sea el experimento aleatorio: "Lanzamiento de 4 monedas".

A) Determina el espacio muestral.



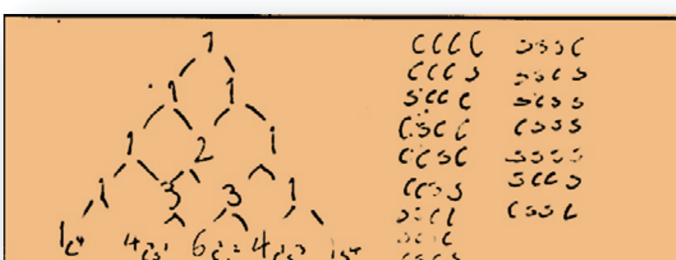
P

Figura 85: **Respuesta informante 1, actividad 6. A)**



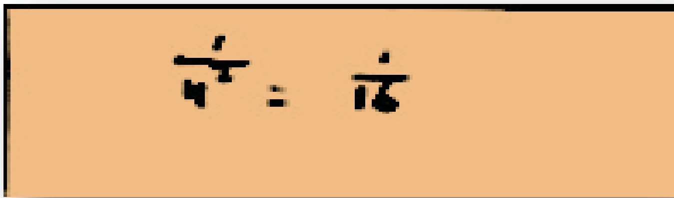
A – P

Figura 86: **Respuesta informante 2, actividad 6. A)**



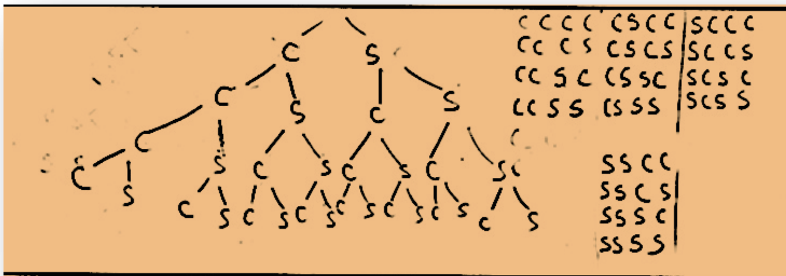
P

Figura 87: **Respuesta informante 3, actividad 6. A)**



A – P

Figura 88: **Respuesta informante 4, actividad 6. A)**

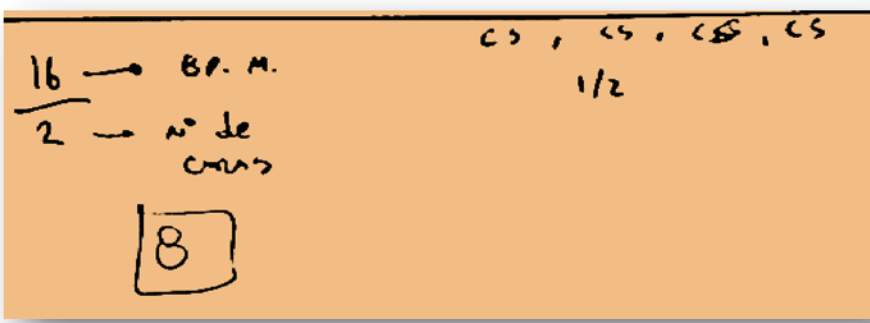


P

Figura 89: **Respuesta informante 5, actividad 6. A)**

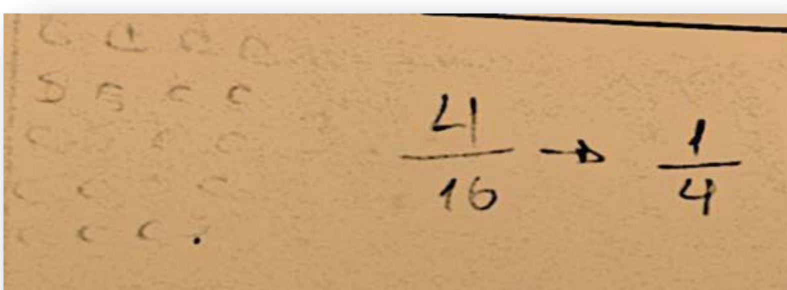
I1, I3 e I5 tienen la construcción proceso ya que muestran en diversos esquemas el espacio muestral pedido, mientras que I2 e I4 muestran estar en camino a una construcción proceso ya que relacionan la pregunta con el cálculo de la cardinalidad del espacio muestral.

B) Determina la variable aleatoria: "Número de caras que se obtienen".



S C

Figura 90: **Respuesta informante 1, actividad 6. B)**



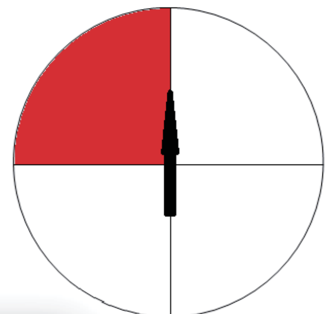
S C

Figura 91: **Respuesta informante 2, actividad 6. B)**

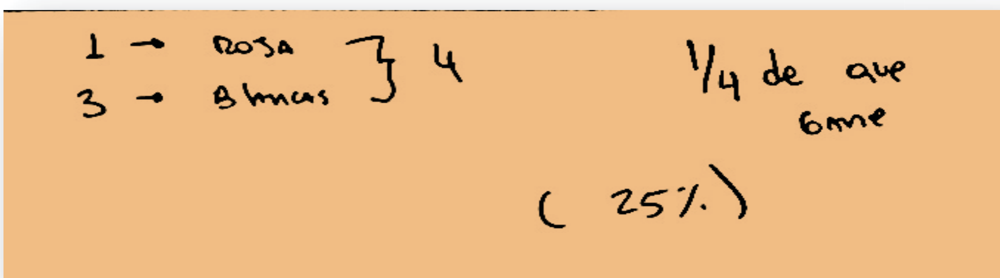
Los informantes 3, 4 y 5 no contestan. → **S C**

Esta pregunta produjo confusión en los informantes, ya que I3, I4 e I5 ellos no contestaron, I1 e I5 realizan cálculos y tampoco establecen una relación.

<u>Actividad 7</u>: En un programa de televisión los concursantes hacen girar una flecha en una ruleta como en la figura y cada vez que la flecha se detiene en la zona de color rojo, se gana un premio y el concurso se trata de hacer girar la flecha 3 veces.
En base a esta situación responde las siguientes preguntas:

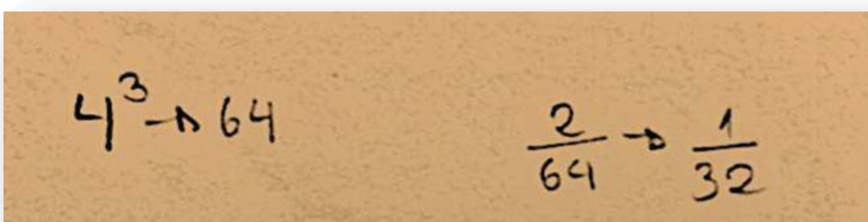


A) ¿Cuál es la probabilidad de que un participante gane dos premios?



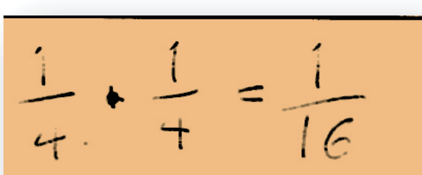
S C

***Figura 92*: Respuesta informante 1, actividad 7. A)**



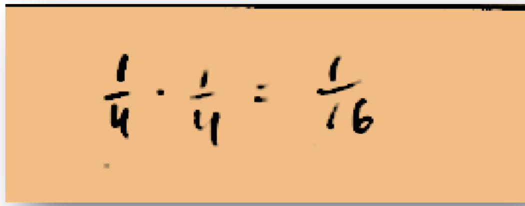
S C

***Figura 93*: Respuesta informante 2, actividad 7. A)**



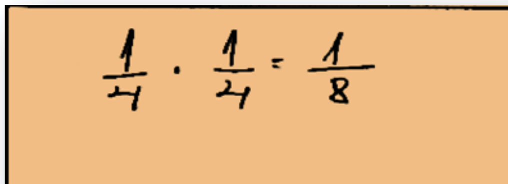
S C

***Figura 94*: Respuesta informante 3, actividad 7. A)**



S C

Figura 95: **Respuesta informante 4, actividad 7. A)**

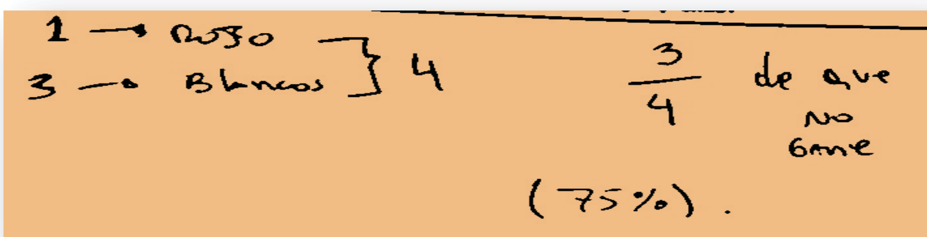


S C

Figura 96: **Respuesta informante 5, actividad 7. A)**

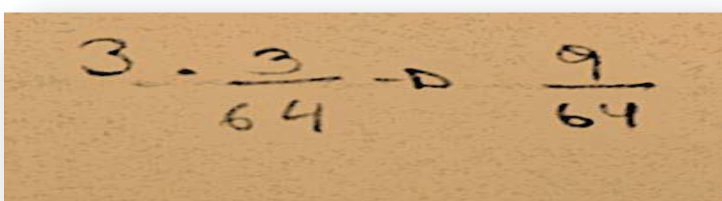
Ninguno de los informantes muestra una construcción proceso de la variable aleatoria como función, ni la coordinación de la variable aleatoria con la función compuesta y las probabilidades.

B) ¿Cuál es la probabilidad de que un concursante no gane ningún premio?



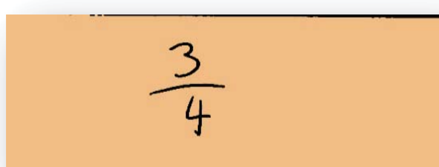
No coordina S C

Figura 97: **Respuesta informante 1, actividad 7. B)**



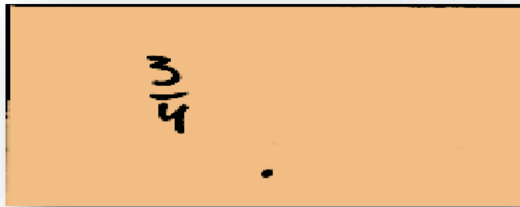
No coordina S C

Figura 98: **Respuesta informante 2, actividad 7. B)**



S C

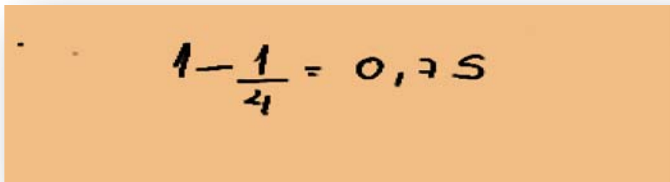
Figura 99: **Respuesta informante 3, actividad 7. B)**



$\frac{3}{4}$

S C

***Figura 100*: Respuesta informante 4, actividad 7. B)**



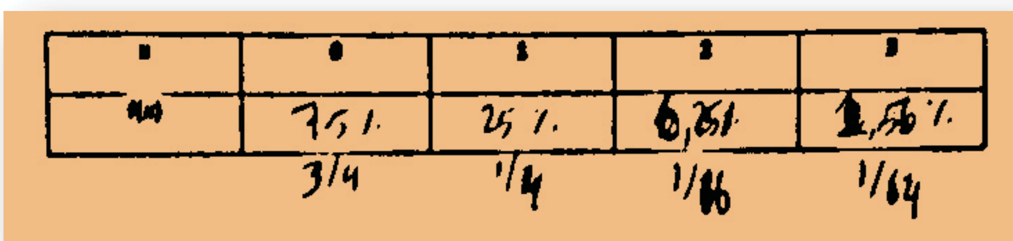
$1-\frac{1}{4}=0{,}75$

S C

***Figura 101*: Respuesta informante 5, actividad 7. B)**

Ninguno de los informantes muestra una construcción mental, I1 e I2 hacen algunos cálculos, pero de todas maneras no coordinan, por lo cual no muestran construcción mental.

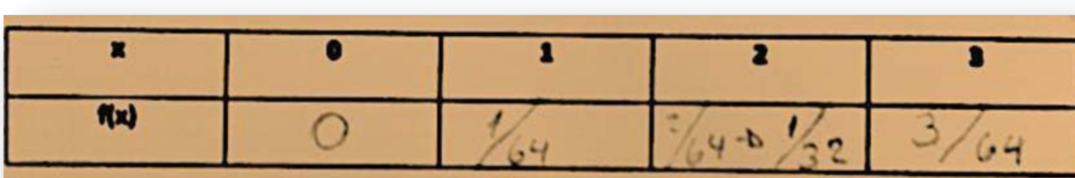
C) Escribe en la tabla siguiente la función de probabilidad de la variable aleatoria que relaciona el espacio muestral con el número de premios que gana un concursante:



x	0	1	2	3
f(x)	75%	25%	6,25%	1,56%
	3/4	1/4	1/16	1/64

S C

***Figura 102*: Respuesta informante 1, actividad 7. C)**



x	0	1	2	3
f(x)	0	1/64	2/64 → 1/32	3/64

S C

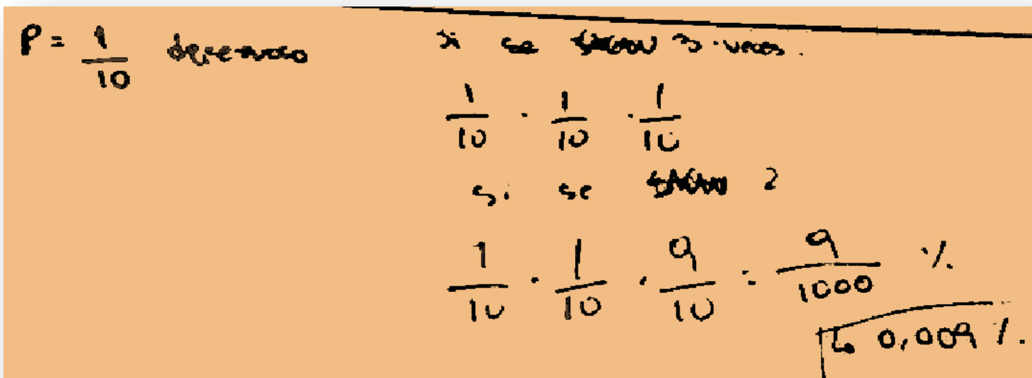
***Figura 103*: Respuesta informante 2, actividad 7. C)**

Los informantes 3, 4 y 5 no contestan → **S C**

Como se aprecia, I3, I4, e I5 no contestan, I1 e I2 contestan haciendo algunos cálculos, donde se evidencia la ausencia de la coordinación de los procesos de probabilidades con la variable aleatoria como una función.

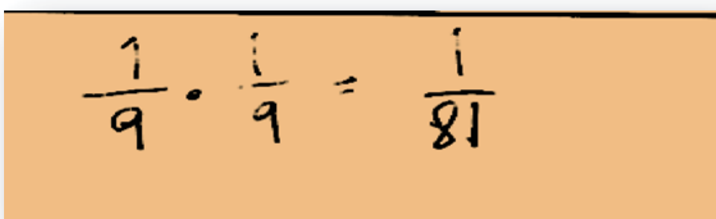
<u>Actividad 8</u>: En una tornería se clasifican los tornillos en defectuosos y en no defectuosos y generalmente se encuentran un 10% de los tornillos defectuosos. Si un experimento consiste en sacar 3 tornillos al azar y se define la variable aleatoria X: "Número de tornillos defectuosos". Determina:

A) P(X = 2)



A – P

***Figura 104*: Respuesta informante 1, actividad 8. A)**



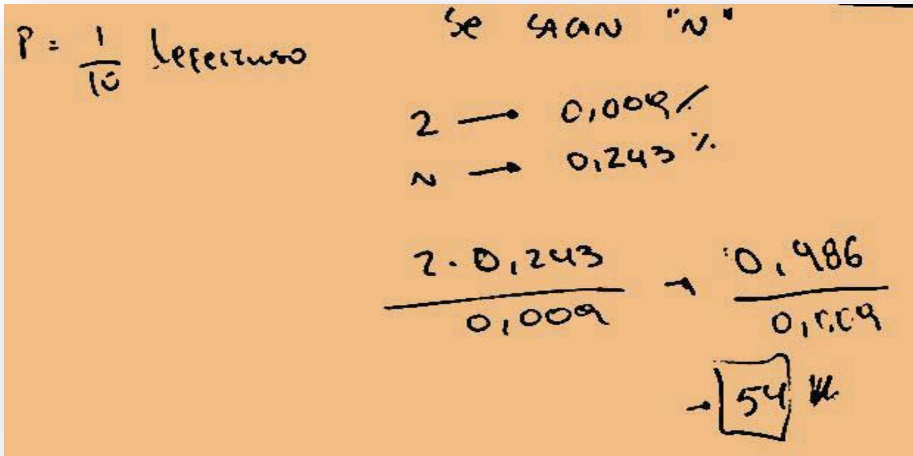
S C

***Figura 104*: Respuesta informante 3, actividad 8. A)**

Los informantes 2, 4 y 5 no contestan → **S C**

Como podemos observar casi no hay construcción mental en los informantes en esta respuesta, ya que 3 de ellos no responden e I3 intenta responder haciendo un cálculo. I1 contesta parcialmente la respuesta correcta, pero no toma en cuenta las permutaciones. Este último está en camino a una concepción proceso.

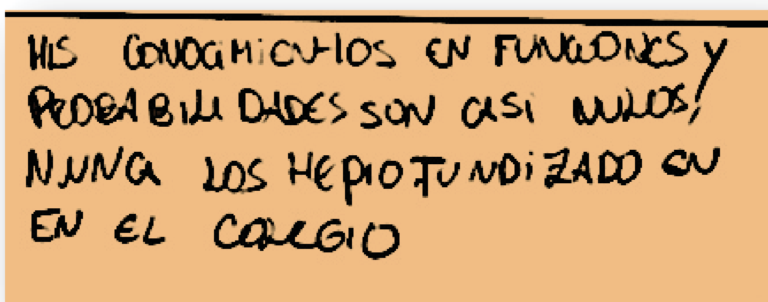
B) Si P(X = n) = 0,243, ¿cuál es el valor de n? Justifica tu respuesta.



S C

Figura 105: **Respuesta informante 1, actividad 8. B)**

Los informantes 2, 3 y 4 no contestan → S C



S C

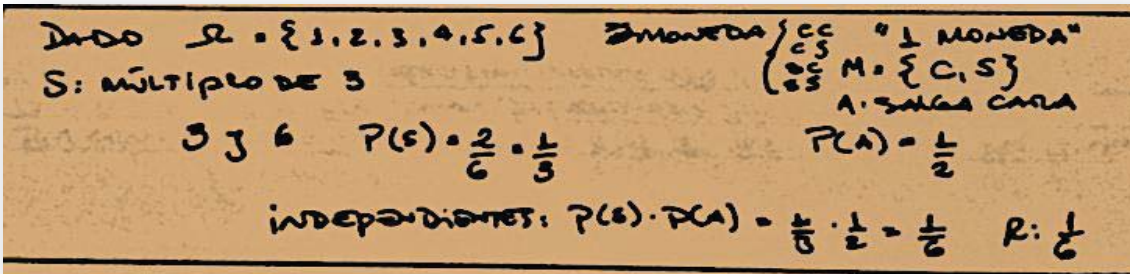
Figura 106: **Respuesta informante 5, actividad 8. B)**

Solo I1 trata de contestar algo, aunque no logra determinar la respuesta, no comprende tampoco que los valores son menores e iguales que 3, no hay evidencias de construcciones mentales en estas respuestas. La respuesta de I5 aclara un poco el panorama con respecto a lo que se plantea en esta investigación.

1.1.2 ANÁLISIS POR PREGUNTA CASO 2

Actividad 1: Se realiza el experimento de lanzar una moneda y un dado. Cuál es la probabilidad de:

A) Que salga un múltiplo de 3 en el dado y una cara en la moneda.


DADO $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ 2 MONEDA $\{CC, CS, SC, SS\}$ "1 MONEDA" $M = \{C, S\}$

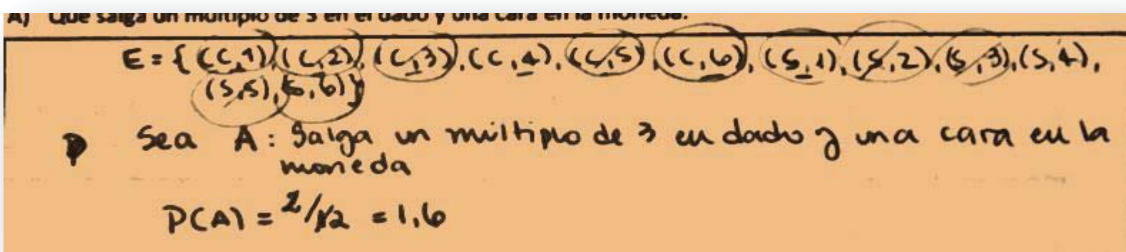
S: MÚLTIPLO DE 3 A: SALGA CARA

3 y 6 $P(S) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ $P(A) = \frac{1}{2}$

INDEPENDIENTES: $P(S) \cdot P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ R: $\frac{1}{6}$

P

Figura 107: **Respuesta informante 6, actividad 1. A)**


A) Que salga un múltiplo de 3 en el dado y una cara en la moneda.

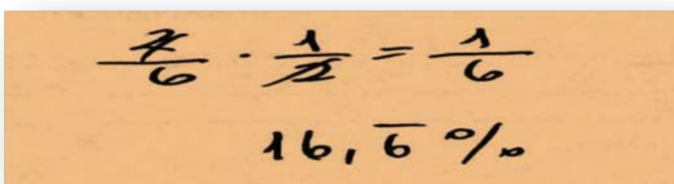
$E = \{(C,1),(C,2),(C,3),(C,4),(C,5),(C,6),(S,1),(S,2),(S,3),(S,4),(S,5),(S,6)\}$

Sea A: Salga un múltiplo de 3 en dado y una cara en la moneda

$P(A) = 2/12 = 1{,}6$

P

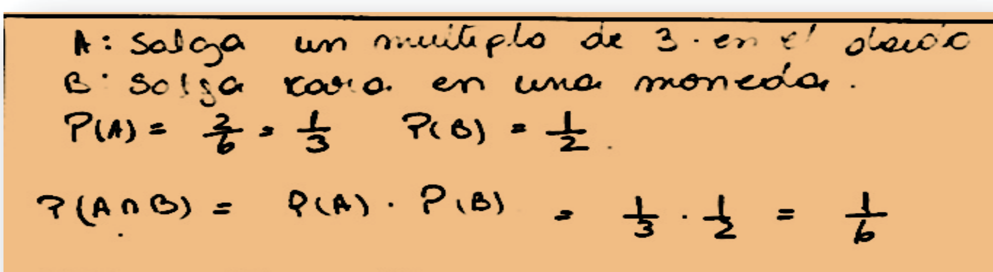
Figura 108: **Respuesta informante 7, actividad 1. A)**


$\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

16,6 %

P

Figura 109: **Respuesta informante 8, actividad 1. A)**


A: Salga un múltiplo de 3 en el dado

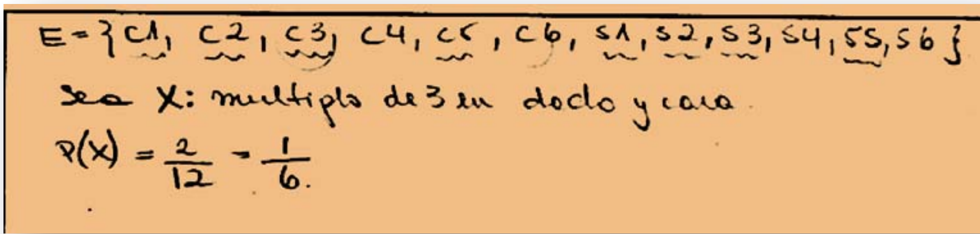
B: Salga cara en una moneda.

$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ $P(B) = \frac{1}{2}$.

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

P

Figura 110: **Respuesta informante 9, actividad 1. A)**



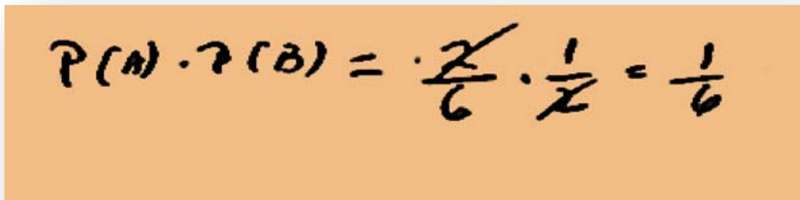
E = {C1, C2, C3, C4, C5, C6, S1, S2, S3, S4, S5, S6}

Sea X: multiplo de 3 en dado y cara

$P(X) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

P

Figura 111: **Respuesta informante 10, actividad 1. A)**



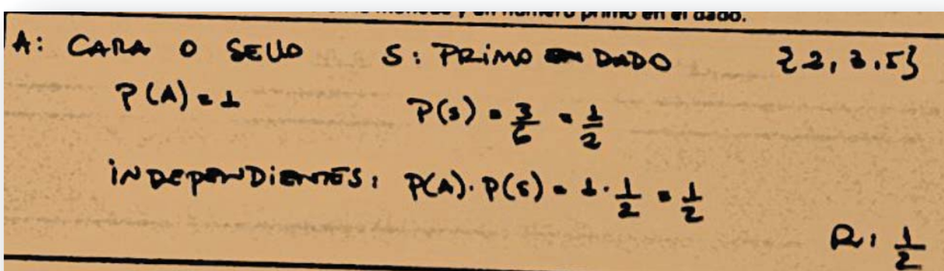
$P(A) \cdot P(B) = \frac{\cancel{2}}{6} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = \frac{1}{6}$

P

Figura 112: **Respuesta informante 11, actividad 1. A)**

En todas las respuestas de los informantes queda de manifiesto la construcción mental proceso de probabilidades. Aunque I7 comete un error de cálculo o de notación, al final al simplificar 2/12, anota 1,6 en vez de 1/6.

B) Que salga una cara o un sello en la moneda y un número primo en el dado.



A: CARA O SELLO S: PRIMO EN DADO {2, 3, 5}

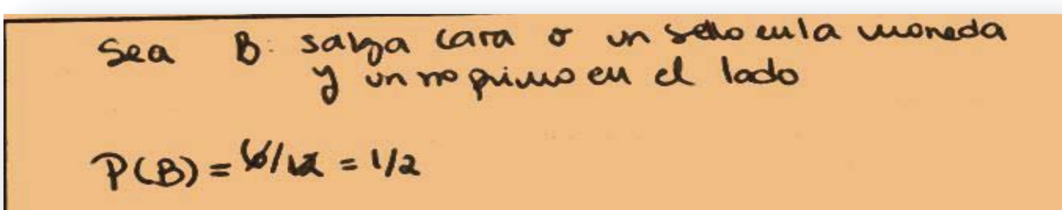
$P(A) = 1$ $P(S) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

INDEPENDIENTES: $P(A) \cdot P(S) = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

R: $\frac{1}{2}$

P

Figura 113: **Respuesta informante 6, actividad 1. B)**

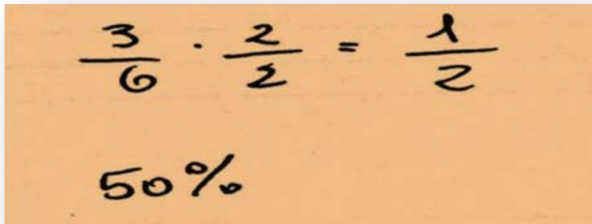


Sea B: salga cara o un sello en la moneda y un no primo en el lado

$P(B) = 6/12 = 1/2$

P

Figura 114: **Respuesta informante 7, actividad 1. B)**

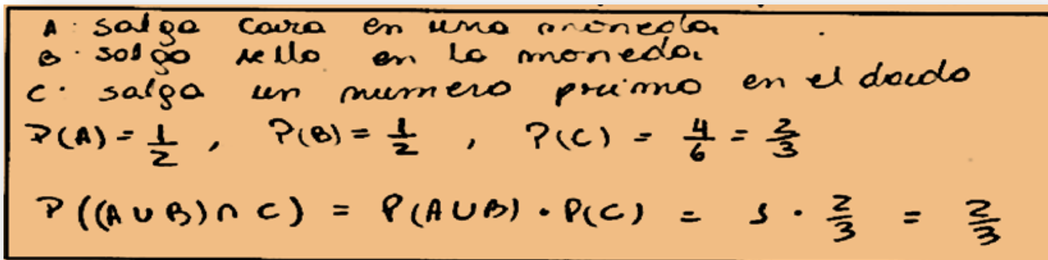


$\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{2} = \frac{1}{2}$

50%

P

Figura 115: **Respuesta informante 8, actividad 1. B)**



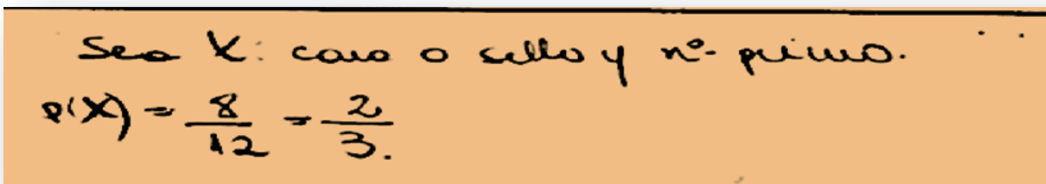
A: salga cara en una moneda
B: salga sello en la moneda
C: salga un numero primo en el dado

$P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$P((A \cup B) \cap C) = P(A \cup B) \cdot P(C) = 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

P

Figura 116: **Respuesta informante 9, actividad 1. B)**

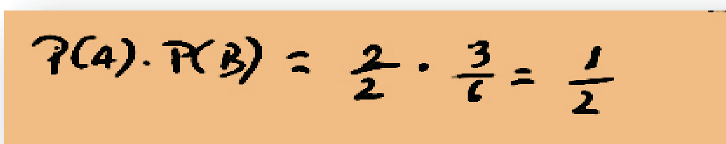


Sea X: cara o sello y nº primo.

$P(X) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$

P

Figura 117: **Respuesta informante 10, actividad 1. B)**



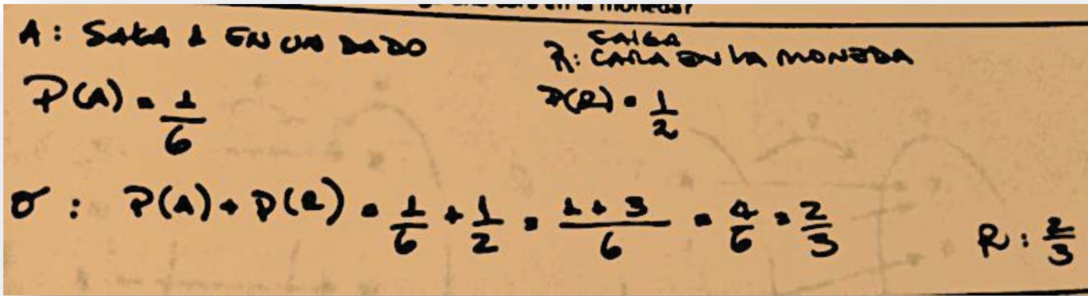
$P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{2} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

P

Figura 118: **Respuesta informante 11, actividad 1. B)**

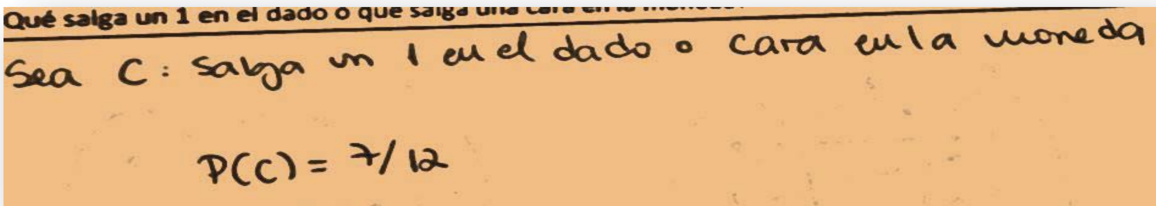
En estas respuestas se muestra la concepción proceso de los informantes ya que todos logran establecer y aplicar las propiedades de probabilidades, aunque I9 al parecer cuenta como número primo al número 1, por lo que obtiene un resultado distinto, lo que al parecer le sucede también a I10.

C) Qué salga un 1 en el dado o que salga una cara en la moneda?



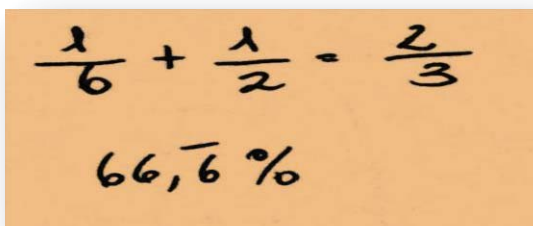
A – P

Figura 119: **Respuesta informante 6, actividad 1. C)**



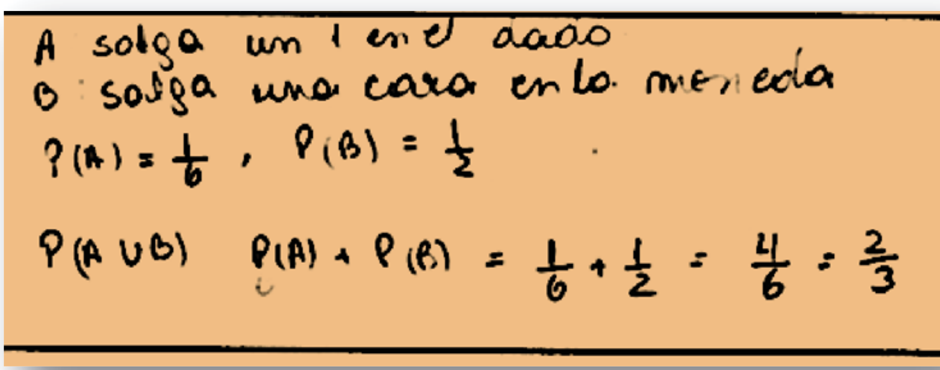
P

Figura 120: **Respuesta informante 7, actividad 1. C)**



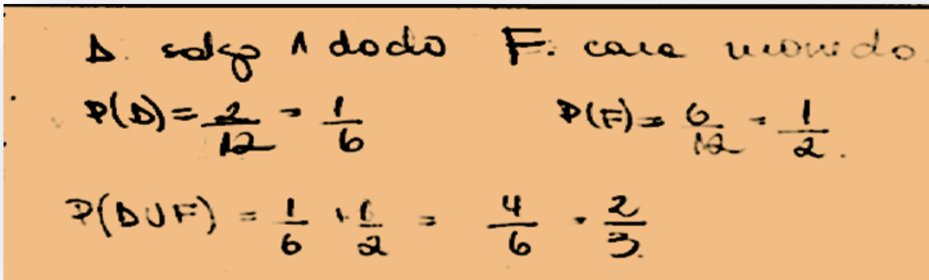
A – P

Figura 121: **Respuesta informante 8, actividad 1. C)**



A – P

Figura 122: **Respuesta informante 9, actividad 1. C)**



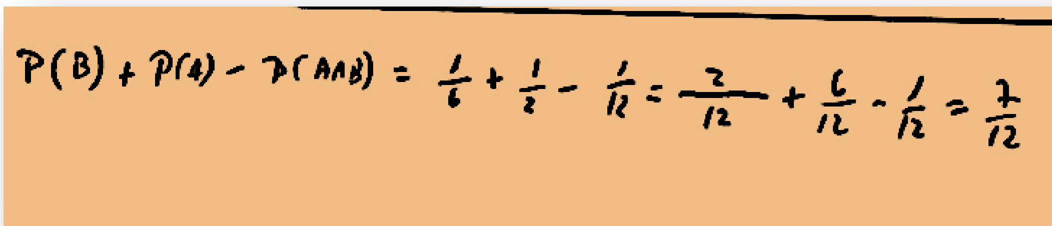
D: salga 1 dado   F: cara moneda

$P(D) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ $P(F) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

$P(D \cup F) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

A – P

Figura 123: **Respuesta informante 10, actividad 1. C)**



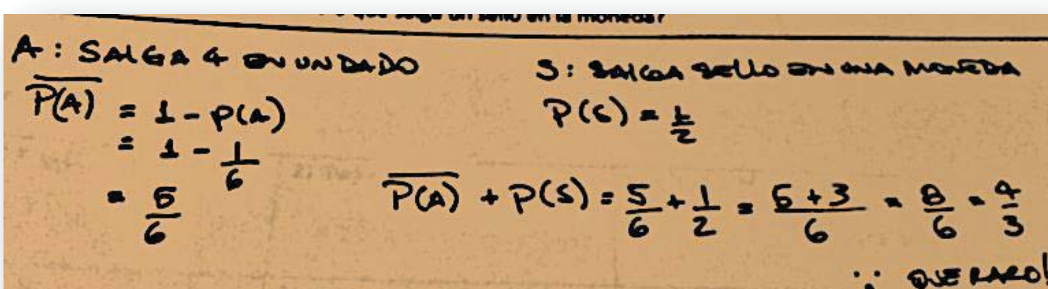
$P(B) + P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{2}{12} + \frac{6}{12} - \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$

P

Figura 124: **Respuesta informante 11, actividad 1. C)**

Se repite el fenómeno o error que se produjo en el caso 1, en 4 de los informantes de este grupo, que es que aplican bien en un principio la propiedad de la unión de probabilidades, sin embargo no restan la intersección de ambos sucesos, lo cual se puede producir debido a una ocnfusión entre sucesos independientes y mutuamente excluyentes, ya que cuando los sucesos son mutuamente excluyentes no se resta la intersección, ya que esta es vacía, sin embargo cuando son independientes sí hay intersección y es el producto de sus probabilidades. I7 e I11 muestran una construcción proceso de esta propiedad.

D) Qué no salga un 4 en el dado o que salga un sello en la moneda?



A: SALGA 4 EN UN DADO   S: SALGA SELLO EN UNA MONEDA

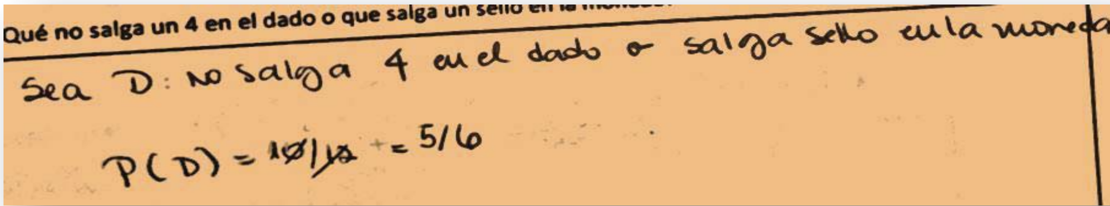
$\overline{P(A)} = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ $P(S) = \frac{1}{2}$

$\overline{P(A)} + P(S) = \frac{5}{6} + \frac{1}{2} = \frac{5+3}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

∴ QUE RARO!

A – P propiedades de la unión de prob. SC Axiomas

Figura 125: **Respuesta informante 6, actividad 1. D)**



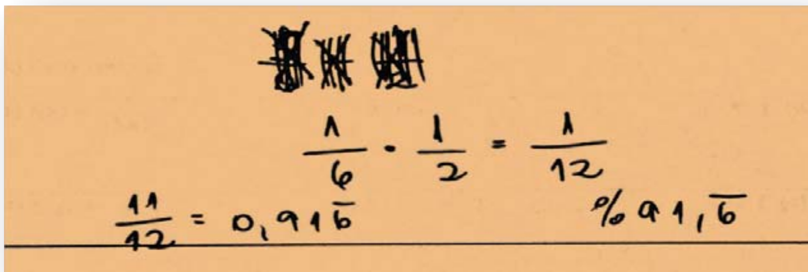
Qué no salga un 4 en el dado o que salga un sello en la moneda

Sea D: no salga 4 en el dado o salga sello en la moneda

$P(D) = \cancel{10/12} = 5/6$

A – P

Figura 126: **Respuesta informante 7, actividad 1. D)**

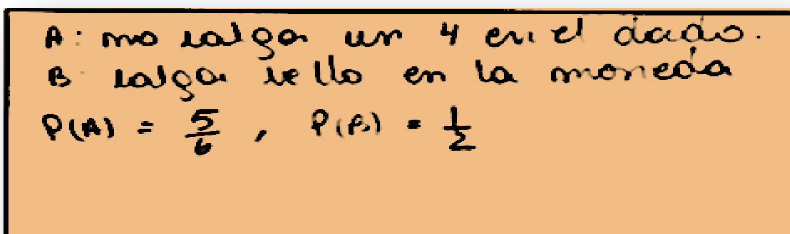


$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

$\frac{11}{12} = 0{,}91\overline{6}$ % $91{,}\overline{6}$

P

Figura 127: **Respuesta informante 8, actividad 1. D)**



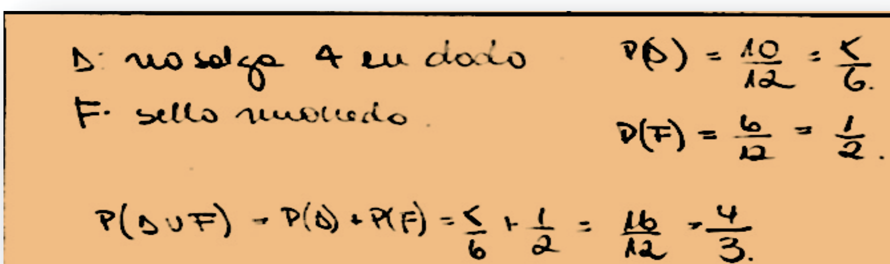
A: no salga un 4 en el dado.

B salga sello en la moneda

$P(A) = \frac{5}{6}$, $P(B) = \frac{1}{2}$

A - P

Figura 128: **Respuesta informante 9, actividad 1. D)**



D: no salga 4 en dado

F: sello moneda

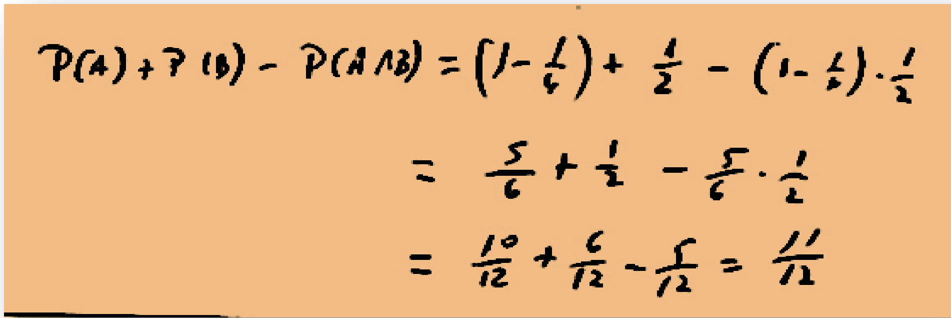
$P(D) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

$P(F) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

$P(D \cup F) = P(D) + P(F) = \frac{5}{6} + \frac{1}{2} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$

S C Axiomas
A – P
propiedades de la unión de probabilidades.

Figura 129: **Respuesta informante 10, actividad 1. D)**



$$P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\left(1-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{2}-\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{5}{6}+\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{10}{12}+\frac{6}{12}-\frac{5}{12}=\frac{11}{12}$$

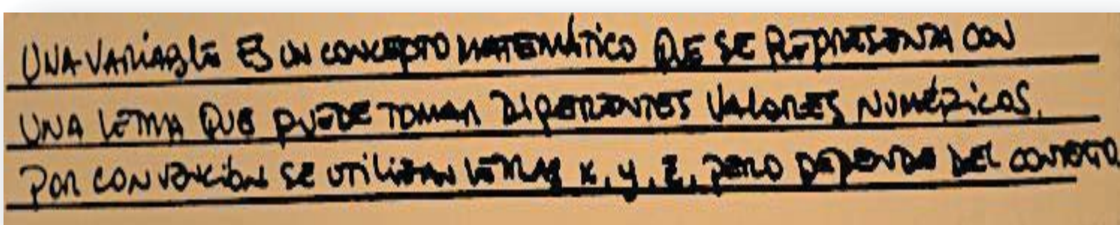
P

***Figura 130*: Respuesta informante 11, actividad 1. D)**

I8 e I11 muestran una construcción proceso de la unión de probabilidades. I6 e I10 aplican la propiedad de la unión, con el mismo fenómeno mencionado anteriormente, vuelven a contestar sin restar la intersección de las probabilidades de ambos sucesos. En esta ocasión I6 escribe en su respuesta: "Qué raro!", en alusión a que su resultado fue mayor que 1, por lo que muestra un esbozo de una construcción mental de los axiomas de kolmogorov, aunque no lo corrige ni trata de hacerlo. I7 al parecer comete un error de conteo ya que obtiene 10/12, aunque es difícil saberlo ya que no registra nada más, se considerará que está en una etapa de transición entre acción y proceso.

Actividad 2: Responde las siguientes preguntas:

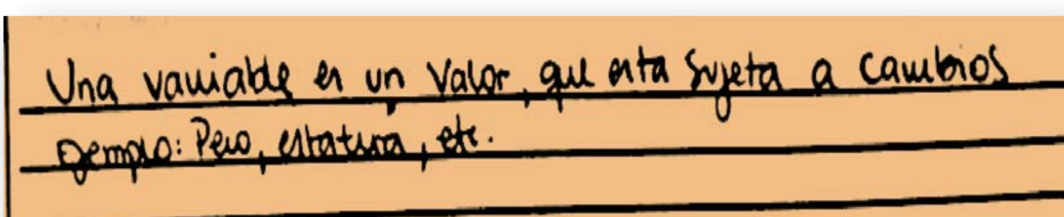
¿Qué es una variable?



UNA VARIABLE ES UN CONCEPTO MATEMÁTICO QUE SE REPRESENTA CON UNA LETRA QUE PUEDE TOMAR DIFERENTES VALORES NUMÉRICOS. POR CONVENCIÓN SE UTILIZAN LETRAS x, y, z, PERO DEPENDE DEL CONTEXTO

P

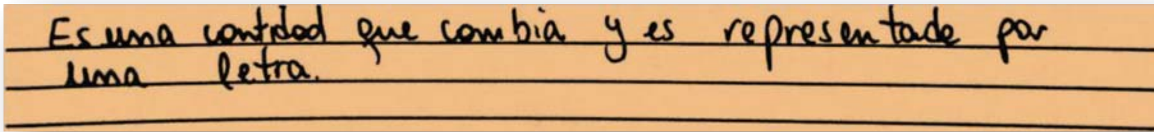
***Figura 131*: Respuesta informante 6, actividad 2. A)**



Una variable es un valor, que esta sujeta a cambios
Ejemplo: Peso, estatura, etc.

P

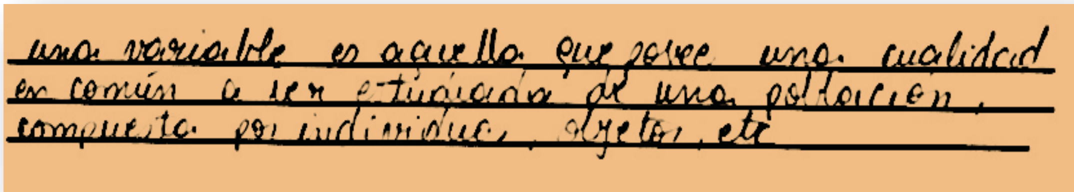
***Figura 132*: Respuesta informante 7, actividad 2. A)**



Es una cantidad que cambia y es representada por una letra.

P

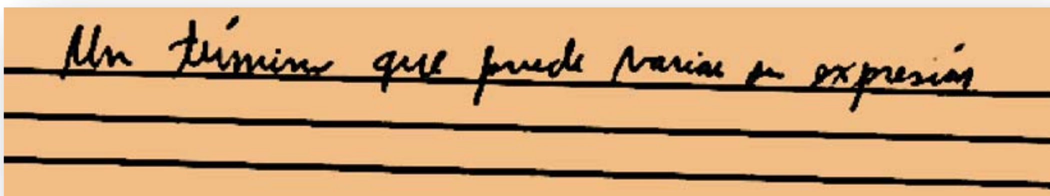
Figura 133: **Respuesta informante 8, actividad 2. A)**



una variable es aquella que posee una cualidad en común a ser estudiada de una población, compuesta por individuos, objetos, etc

P

Figura 134: **Respuesta informante 9, actividad 2. A)**



Un término que puede variar su expresión

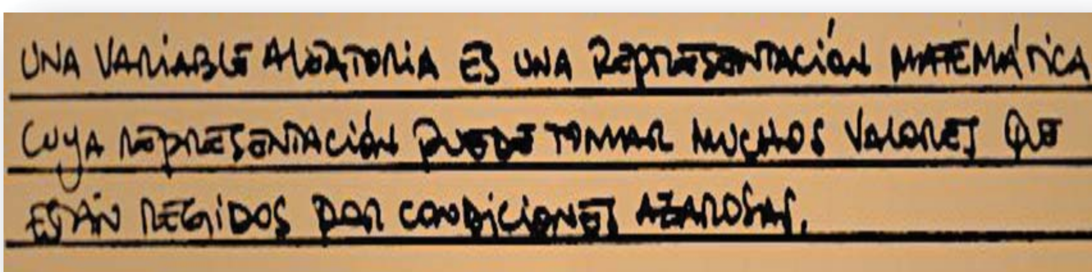
A - P

Figura 135: **Respuesta informante 11, actividad 2. A)**

El informante 10 no contesta. ⟶ **S C**

En estas respuestas se evidencia una construcción proceso de la noción de variable, expresando una noción bastante clara de lo que es una variable. Recordemos que no existe una única definición para una variable. I10 no contesta e I11 no redacta bien su definición, no se entiende.

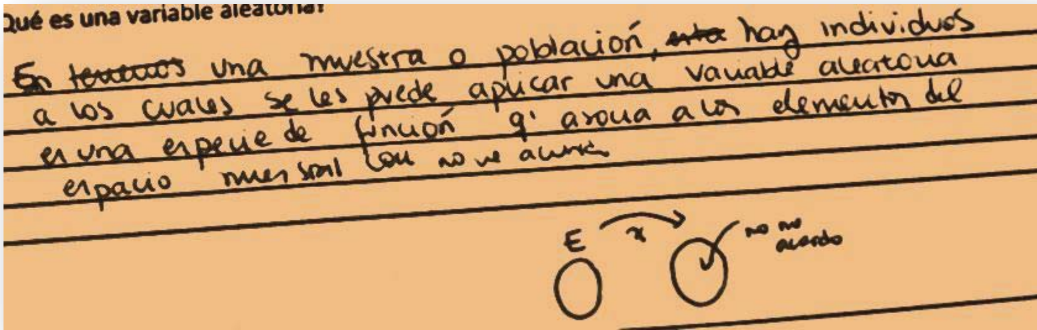
¿Qué es una variable aleatoria?



UNA VARIABLE ALEATORIA ES UNA REPRESENTACIÓN MATEMÁTICA CUYA REPRESENTACIÓN PUEDE TOMAR MUCHOS VALORES QUE ESTÁN REGIDOS POR CONDICIONES AZAROSAS.

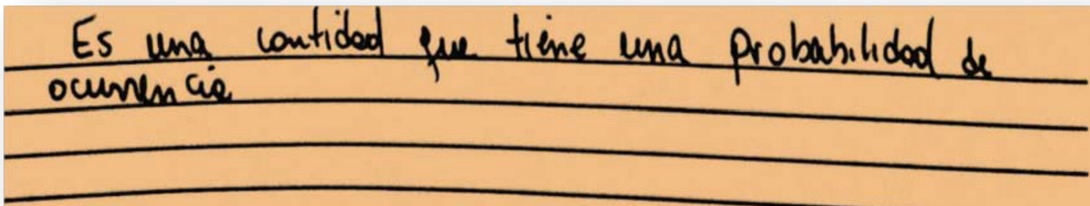
A–P

Figura 136: **Respuesta informante 6, actividad 2. B)**


¿Qué es una variable aleatoria?
En ~~terminos~~ una muestra o población, ~~esta~~ hay individuos a los cuales se les puede aplicar una variable aleatoria es una especie de función q' asocia a los elementos del espacio muestral con no me acuerdo

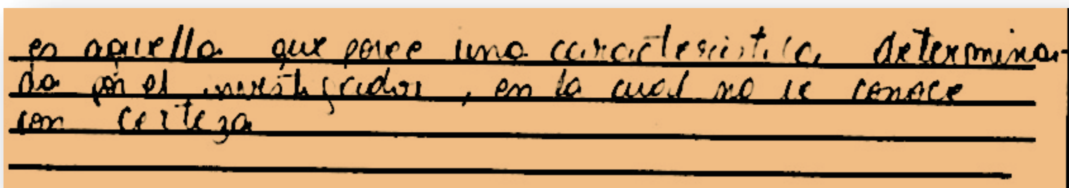
A – P

Figura 137: **Respuesta informante 7, actividad 2. B)**


Es una cantidad que tiene una probabilidad de ocurrencia

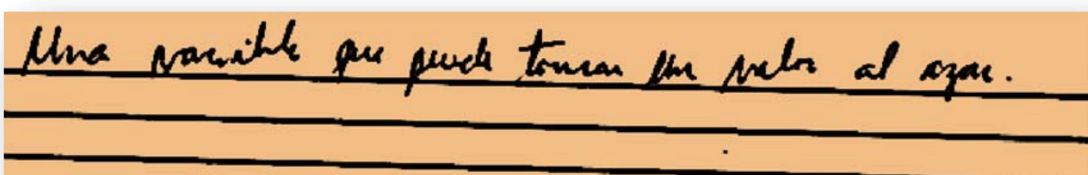
A–P

Figura 138: **Respuesta informante 8, actividad 2. B)**


es aquella que posee una característica determinada por el investigador, en la cual no se conoce con certeza

A – P

Figura 139: **Respuesta informante 9, actividad 2. B)**


Una variable que puede tomar un valor al azar.

A – P

Figura 140: **Respuesta informante 11, actividad 2. B)**

El informante 10 no contesta. ⟶ S C

Ninguno de los informantes muestra una construcción proceso de la variable aleatoria, ya que la relacionan como la variable que definieron en la pregunta anterior, pero con azar. I7 dice que es: "Una especie de función", pero al final escribe que asocia los elementos del espacio muestral con: "no me acuerdo".

Actividad 3:

Omitiremos los diagramas, ya que han sido presentados en el mismo cuestionario del caso 1

A) Determina:

1) f(k) = w	2) f(w) = a	3) g^{-1}(w) = y
4) g(y) = w	5) g(t) = 7	6) f^{-1}(s) = NO TIENE INVERSA EN ESTE VALOR, PUES NO ES BIYECTIVA. LA FUNCIÓN (NO CUMPLE EPIYECTIVIDAD)

A–P

***Figura 141*: Respuesta informante 6, actividad 3. A)**

A) Determina: f^{-1} g^{-1}

1) f(k) = w	2) f(w) = a	3) g^{-1}(w) = y
4) g(y) = w	5) g(t) = 7	6) f^{-1}(s) = No tiene imagen

A–P

***Figura 142*: Respuesta informante 7, actividad 3. A)**

1) f(k) = w	2) f(w) = a	3) g^{-1}(w) = y
4) g(y) = w	5) g(t) = 7	6) f^{-1}(s) = ϕ

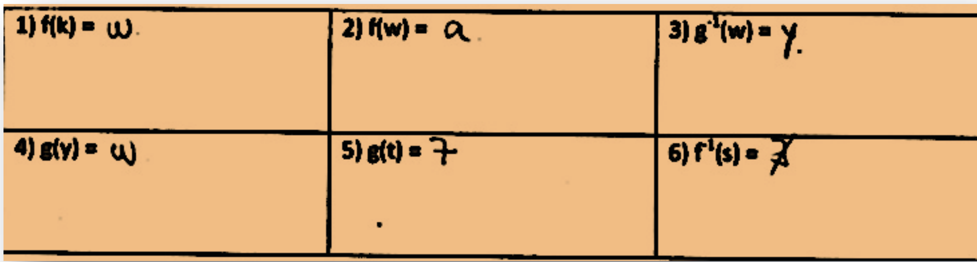
A – P

***Figura 143*: Respuesta informante 8, actividad 3. A)**

1) f(k) = w	2) f(w) = a	3) g^{-1}(w) = y
4) g(y) = w	5) g(t) = 7	6) f^{-1}(s) = ϕ

A–P

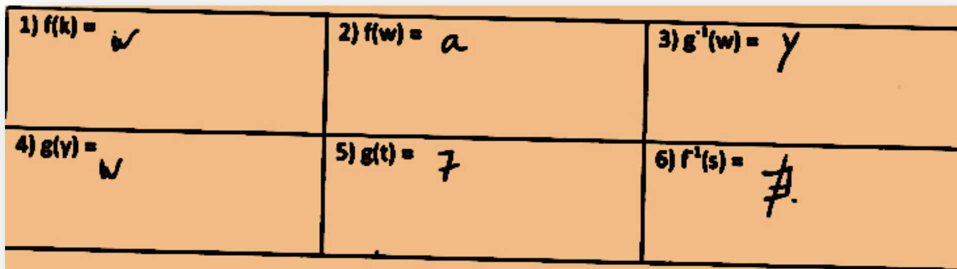
***Figura 144*: Respuesta informante 9, actividad 3. A)**



1) f(k) = w.	2) f(w) = a.	3) g^{-1}(w) = y.
4) g(y) = w	5) g(t) = 7	6) f^{-1}(s) = ∄

A – P

***Figura 145*: Respuesta informante 10, actividad 3. A)**



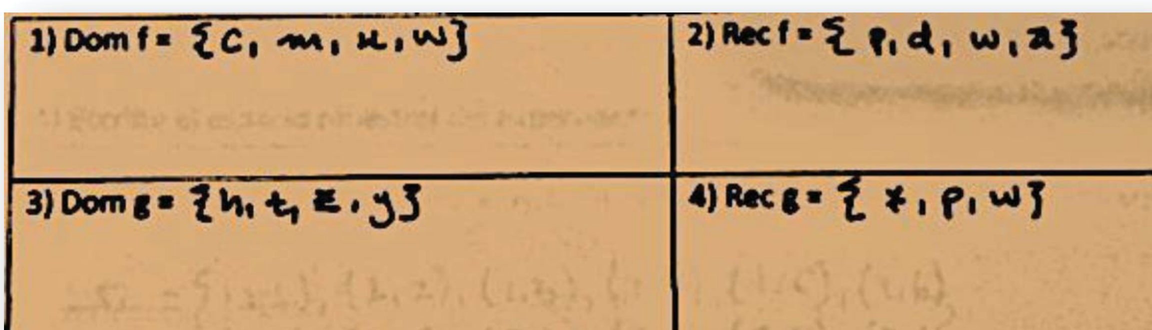
1) f(k) = w	2) f(w) = a	3) g^{-1}(w) = y
4) g(y) = w	5) g(t) = 7	6) f^{-1}(s) = ∄.

A – P

***Figura 146*: Respuesta informante 11, actividad 3. A)**

Como se aprecia, todos responden de la misma manera, lo que nos da indicios de un problema u obstáculo didáctico, ya que no poseen la noción de que una función tiene que ser epiyectiva e inyectiva para que sea biyectiva y tenga inversa, ya que los informantes de este caso en su totalidad respondieron que la función g sí tenía inversa, siendo que esta no era inyectiva o "uno a uno".

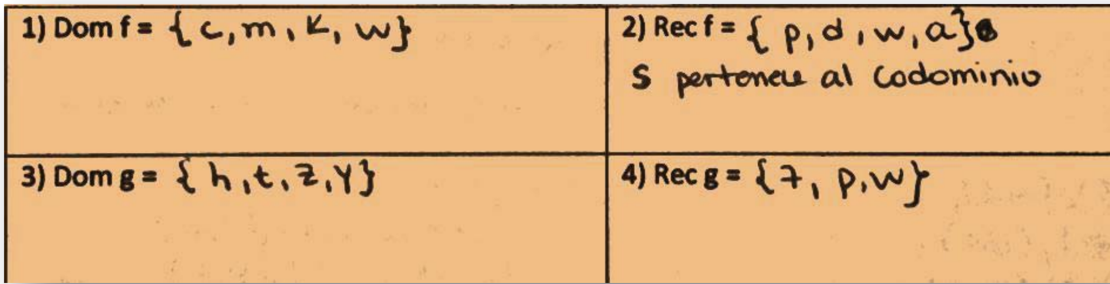
B) Determina:



1) Dom f = {c, m, u, w}	2) Rec f = {p, d, w, z}
3) Dom g = {h, t, z, y}	4) Rec g = {x, p, w}

P

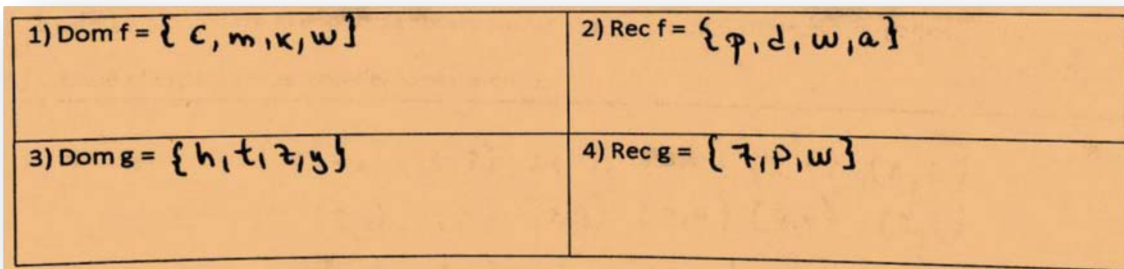
***Figura 147*: Respuesta informante 6, actividad 3. B)**



1) Dom f = {c, m, k, w}	2) Rec f = {p, d, w, a} s pertenece al codominio
3) Dom g = {h, t, z, y}	4) Rec g = {7, p, w}

P

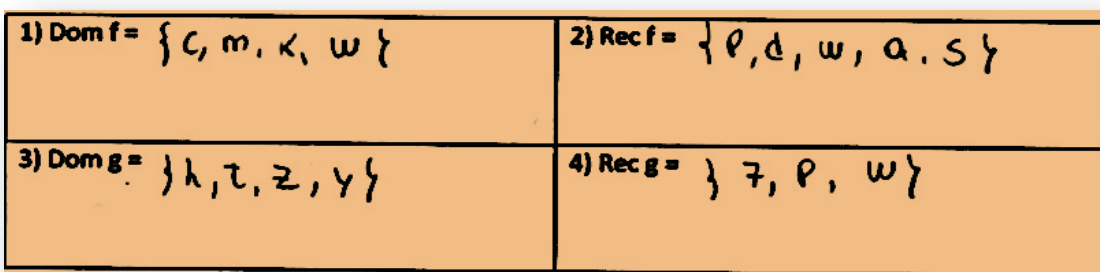
***Figura 148*: Respuesta informante 7, actividad 3. B)**



1) Dom f = {c, m, k, w}	2) Rec f = {p, d, w, a}
3) Dom g = {h, t, z, y}	4) Rec g = {7, p, w}

P

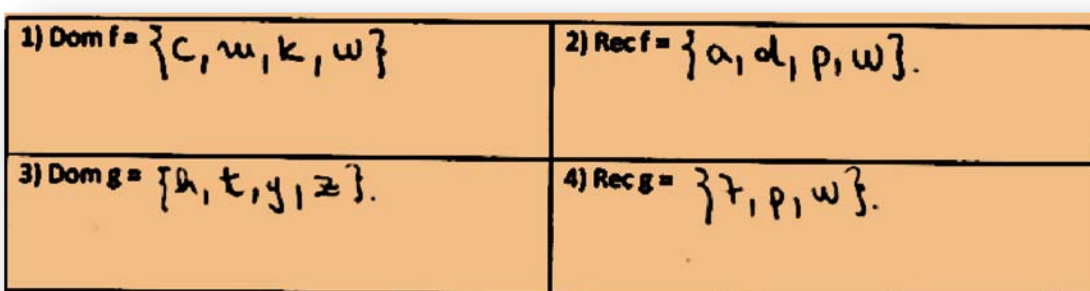
***Figura 149*: Respuesta informante 8, actividad 3. B)**



1) Dom f = {c, m, k, w}	2) Rec f = {p, d, w, a, s}
3) Dom g = {h, t, z, y}	4) Rec g = {7, p, w}

A – P

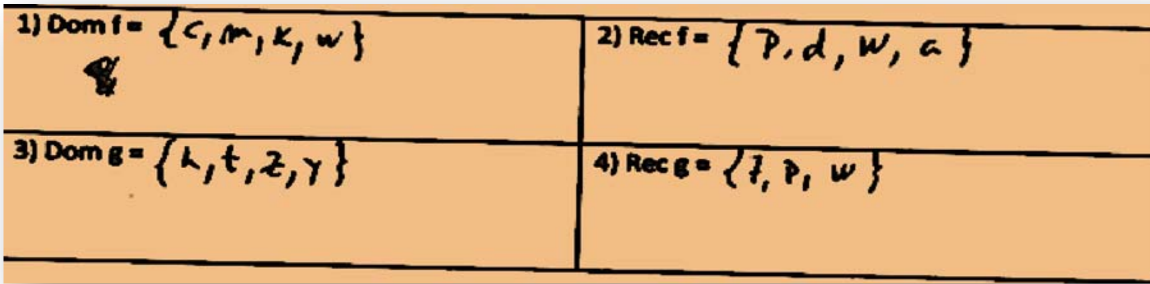
***Figura 150*: Respuesta informante 9, actividad 3. B)**



1) Dom f = {c, w, k, w}	2) Rec f = {a, d, p, w}.
3) Dom g = {h, t, y, z}.	4) Rec g = {7, p, w}.

P

***Figura 151*: Respuesta informante 10, actividad 3. B)**



1) Dom f = {c, m, k, w}	2) Rec f = {p, d, w, a}
3) Dom g = {h, t, z, y}	4) Rec g = {l, p, w}

P

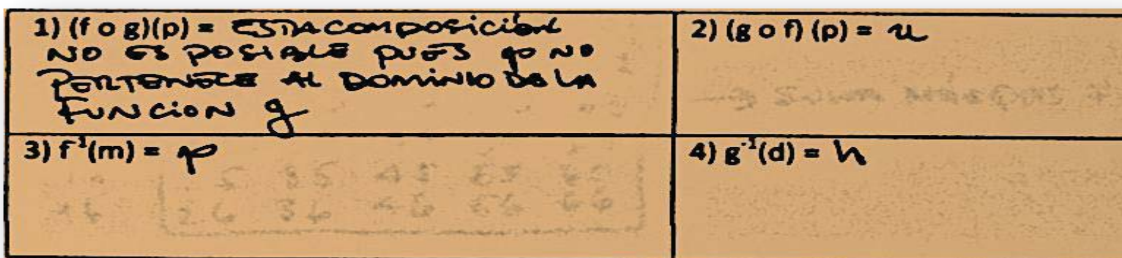
Figura 152: **Respuesta informante 11, actividad 3. B)**

Los informantes muestran una construcción proceso del dominio y recorrido de una función. I9 incluye un elemento que no es del recorrido.

Actividad 4:

Omitiremos los diagramas, ya que han sido presentados en el mismo cuestionario del caso 1

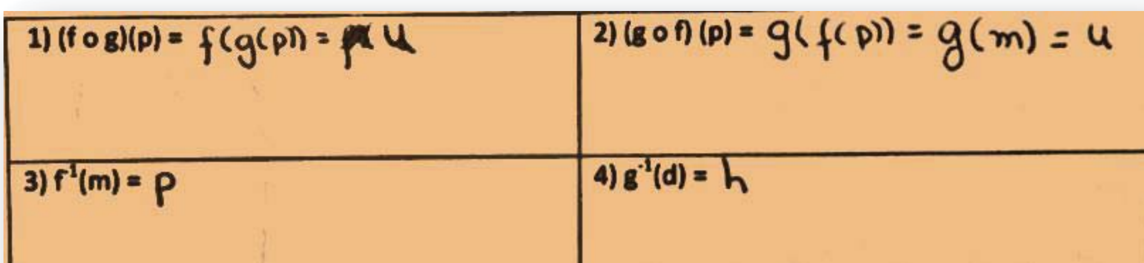
Determina:



1) (f o g)(p) = ESTA COMPOSICIÓN NO ES POSIBLE PUES p NO PERTENECE AL DOMINIO DE LA FUNCIÓN g	2) (g o f) (p) = u
3) f^{-1}(m) = p	4) g^{-1}(d) = h

P

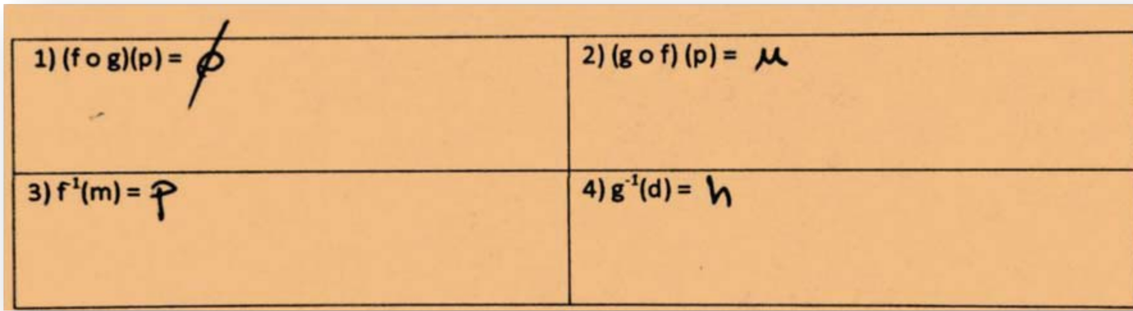
Figura 153: **Respuesta informante 6, actividad 4**



1) (f o g)(p) = f(g(p)) = u	2) (g o f) (p) = g(f(p)) = g(m) = u
3) f^{-1}(m) = p	4) g^{-1}(d) = h

A – P

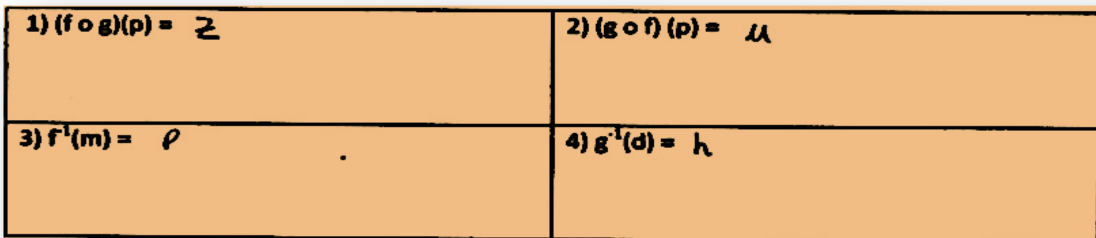
Figura 154: **Respuesta informante 7, actividad 4**



1) (f o g)(p) = ∅	2) (g o f) (p) = μ
3) f^{-1}(m) = p	4) g^{-1}(d) = h

P

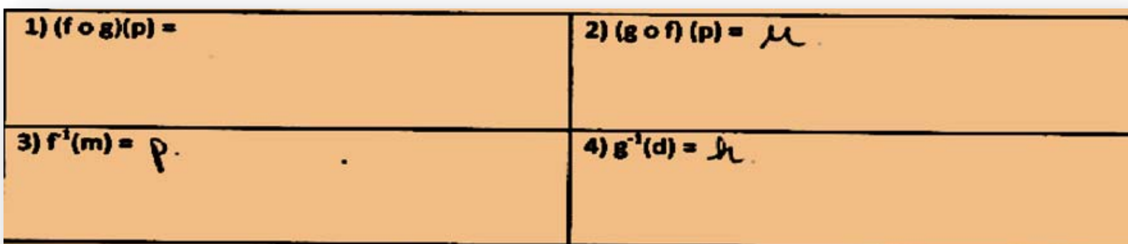
Figura 155: **Respuesta informante 8, actividad 4**



1) (f o g)(p) = z	2) (g o f) (p) = μ
3) f^{-1}(m) = p	4) g^{-1}(d) = h

A – P

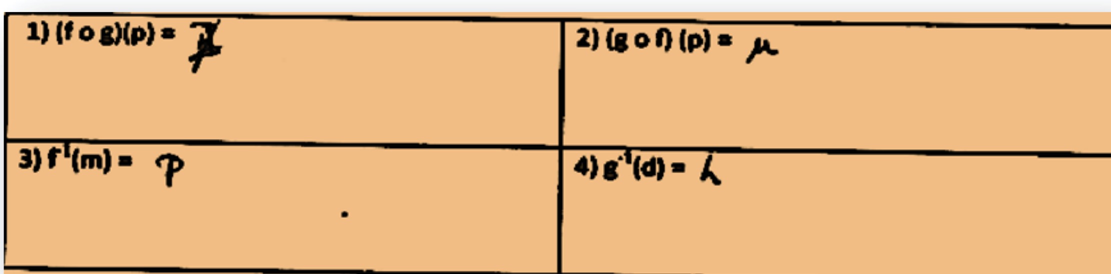
Figura 156: **Respuesta informante 9, actividad 4**



1) (f o g)(p) =	2) (g o f) (p) = μ
3) f^{-1}(m) = p.	4) g^{-1}(d) = h

A – P

Figura 157: **Respuesta informante 10, actividad 4**



1) (f o g)(p) = z	2) (g o f) (p) = μ
3) f^{-1}(m) = p	4) g^{-1}(d) = h

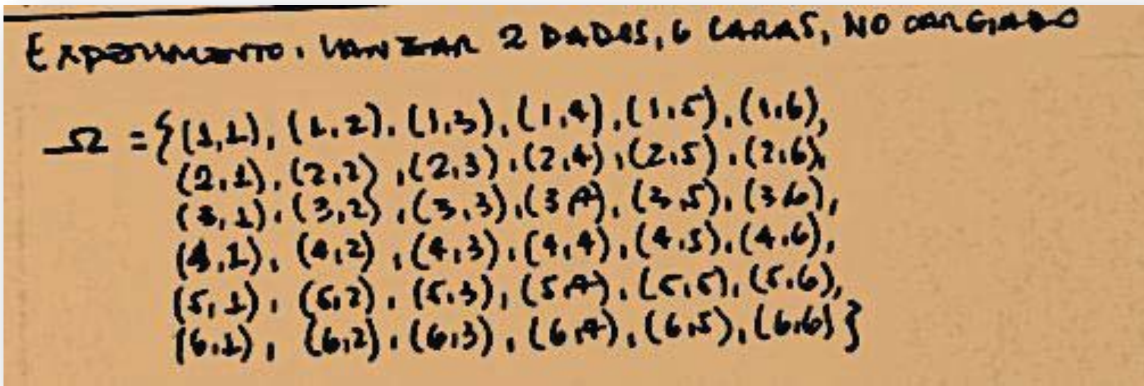
P

Figura 158: **Respuesta informante 11, actividad 4**

Se aprecia una construcción proceso en las respuestas dadas por la mitad de estos informantes. I7 considera que (f o g) es lo mismo que (g o f); I9 considera que (f o g) es lo mismo que $(g \circ f)^{-1}$; I10 deja en blanco el espacio para responder 1).

Actividad 5: Considera el experimento de lanzar dos dados de 6 caras, no cargados.

A) Escribe el espacio muestral del experimento.

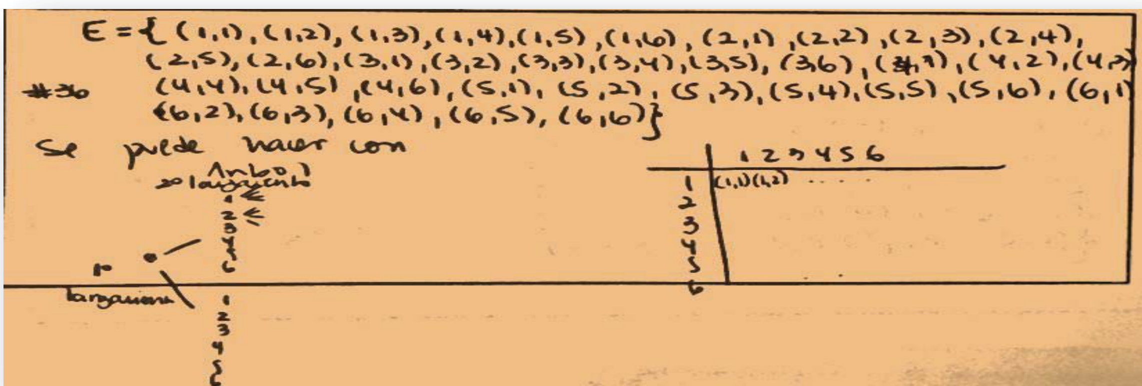


Experimento: lanzar 2 dados, 6 caras, no cargado

$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),$
$(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),$
$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),$
$(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),$
$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),$
$(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

P

Figura 159: **Respuesta informante 6, actividad 5. A)**

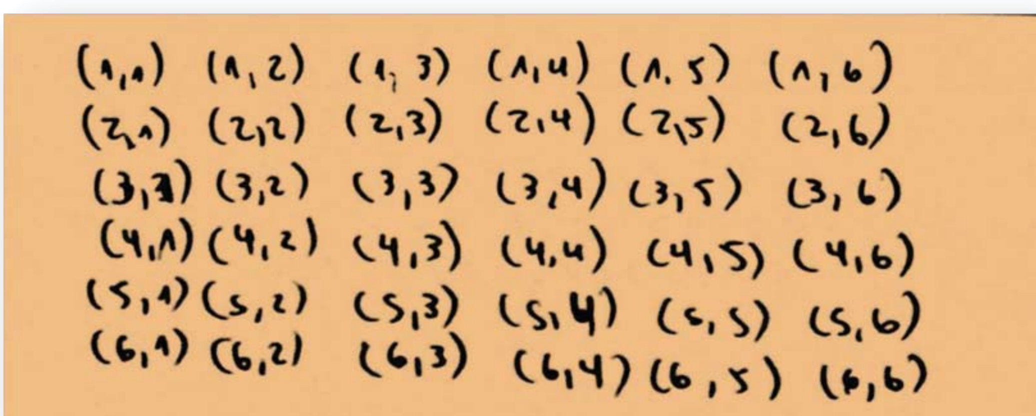


$E = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),$
$(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3)$
#36 $(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1)$
$(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

Se puede hacer con Arbol

P

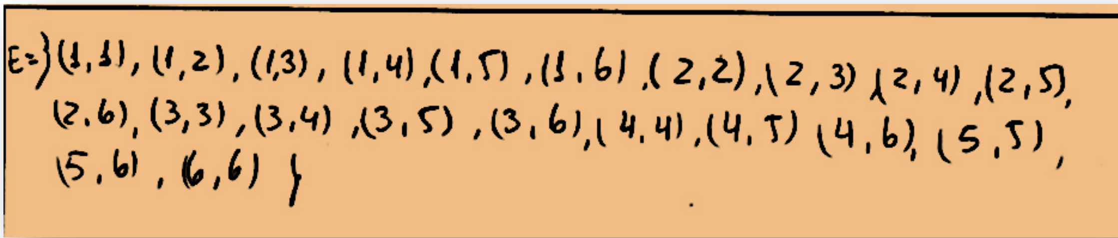
Figura 160: **Respuesta informante 7, actividad 5. A)**



(1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6)
(2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5) (2,6)
(3,1) (3,2) (3,3) (3,4) (3,5) (3,6)
(4,1) (4,2) (4,3) (4,4) (4,5) (4,6)
(5,1) (5,2) (5,3) (5,4) (5,5) (5,6)
(6,1) (6,2) (6,3) (6,4) (6,5) (6,6)

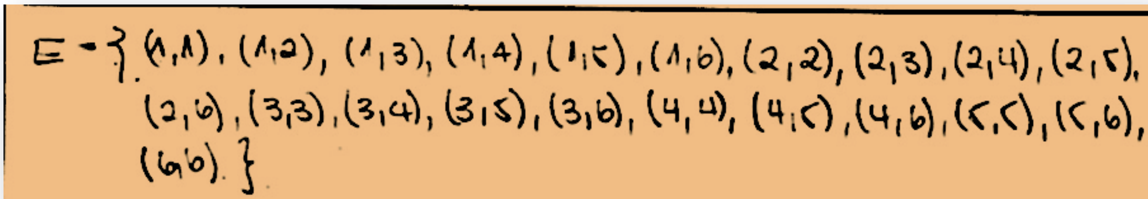
P

Figura 161: **Respuesta informante 8, actividad 5.A)**



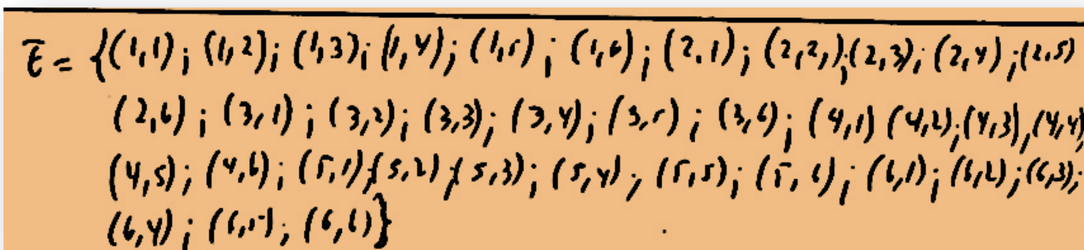
A – P

Figura 162: **Respuesta informante 9, actividad 5.A)**



A – P

Figura 163: **Respuesta informante 10, actividad 5.A)**

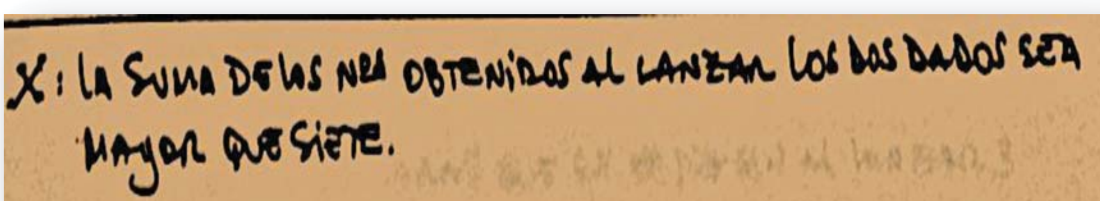


P

Figura 164: **Respuesta informante 11, actividad 5.A)**

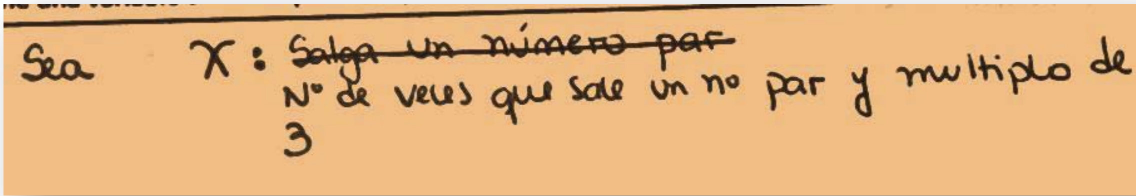
Responden correctamente 4 de ellos; sin embargo, por algún motivo I9 e I10 no consideran todos los elementos del espacio muestral, ya que al parecer consideran que, por ejemplo el que salga en el primer dado un uno y en el segundo dado un dos, lo que se abrevia con el par ordenado (1, 2), consideran que es el mismo caso que el (2, 1).

B) Define una variable aleatoria para el experimento anterior.



A – P

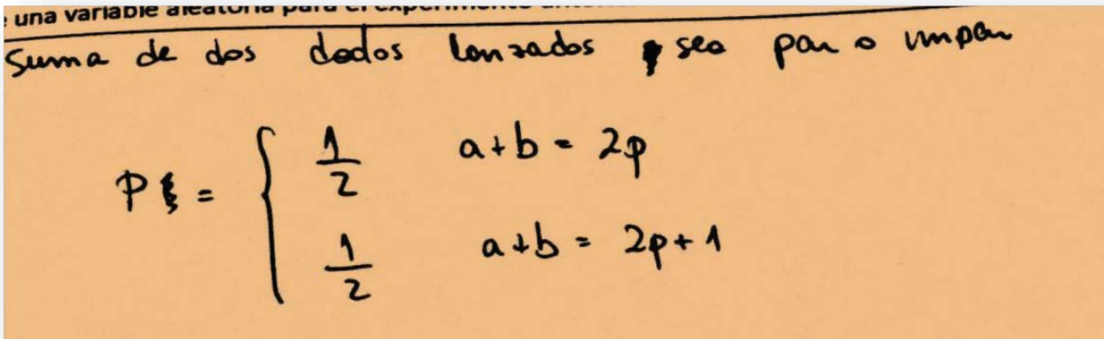
Figura 165: **Respuesta informante 6, actividad 5.B)**



Sea X: ~~Salga un número par~~ Nº de veces que sale un nº par y multiplo de 3

P

Figura 166: **Respuesta informante 7, actividad 5.B)**

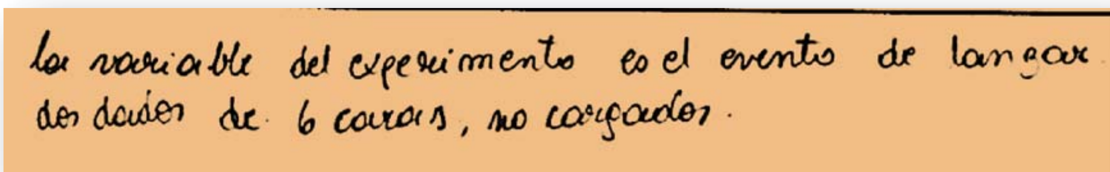


Suma de dos dados lanzados sea par o impar

$$P = \begin{cases} \frac{1}{2} & a+b = 2p \\ \frac{1}{2} & a+b = 2p+1 \end{cases}$$

A – P

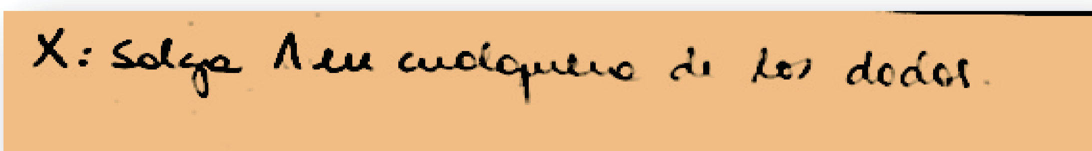
Figura 167: **Respuesta informante 8, actividad 5.B)**



la variable del experimento es el evento de lanzar dos dados de 6 caras, no cargados.

S C

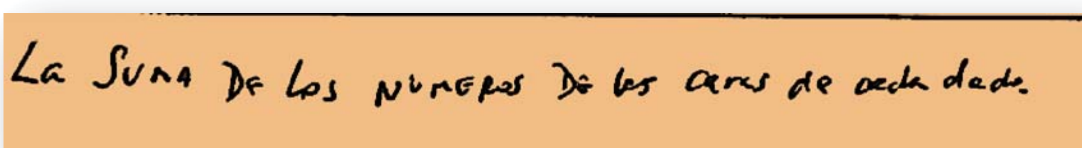
Figura 168: **Respuesta informante 9, actividad 5.B)**



X: Salga 1 en cualquiera de los dados.

S C

Figura 169: **Respuesta informante 10, actividad 5.B)**



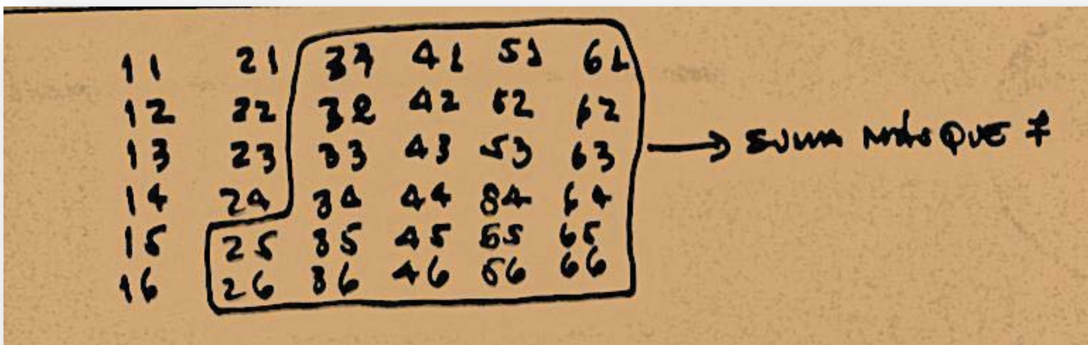
La Suma De Los numeros De las caras de cada dado.

P

Figura 170: **Respuesta informante 11, actividad 5.B)**

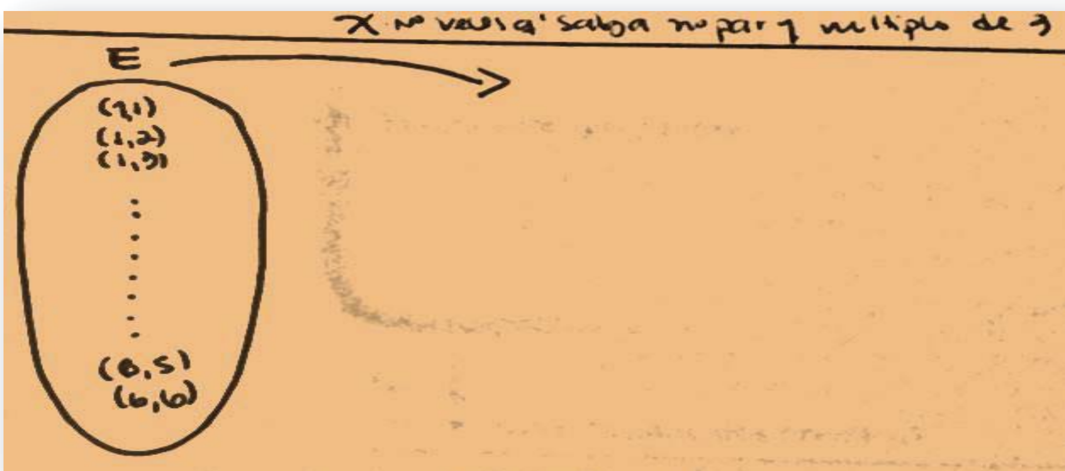
En estas respuestas se muestra que los informantes tienen una noción parcial de la variable aleatoria, seguramente recuerdan ejercicios en clase o que ellos hayan realizado, donde se usan las probabilidades y se habla de variable aleatoria, ya que hay confusión por parte de la mayoría de ellos. I6 enuncia un suceso, pero este no es posible que sea una relación que lleve a los elementos del espacio muestral como dominio a números reales. I7 muestra una construcción proceso de la variable aleatoria, definiéndola correctamente. I8 comienza escribiendo: "La suma de los dados lanzados…", pero luego dice: "sea par o impar", con lo que no se establece la relación entre dominio y recorrido de lo que debiera ser una variable aleatoria. I9 e I10 confunden variable aleatoria con evento o suceso. I11 muestra una concepción proceso de la variable aleatoria, aunque no usa la notación que debiera, es decir X: ….

C) Diseña un diagrama que relacione el espacio muestral del experimento con la variable aleatoria que definiste.



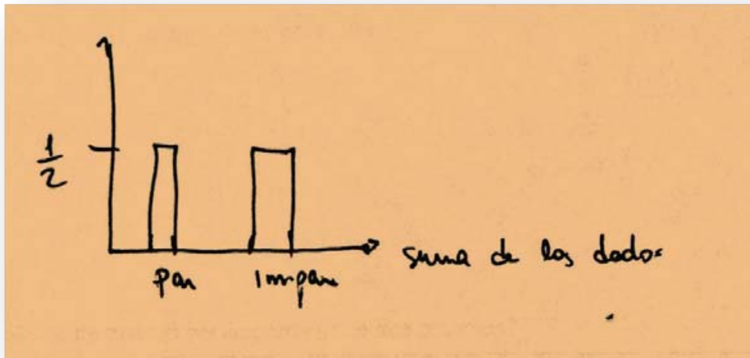
S C

***Figura 171*: Respuesta informante 6, actividad 5.C)**



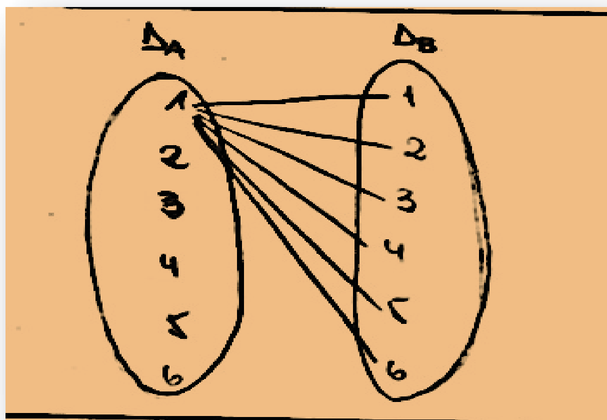
P

***Figura 172*: Respuesta informante 7, actividad 5.C)**



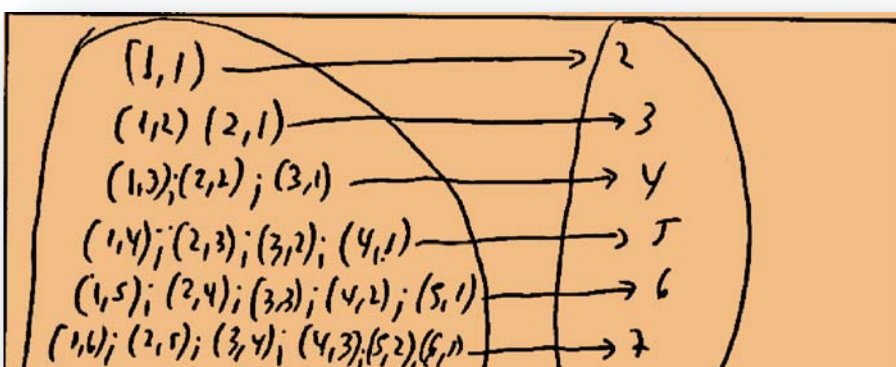
S C

Figura 173: **Respuesta informante 8, actividad 5.C)**



S C

Figura 174: **Respuesta informante 10, actividad 5.C)**



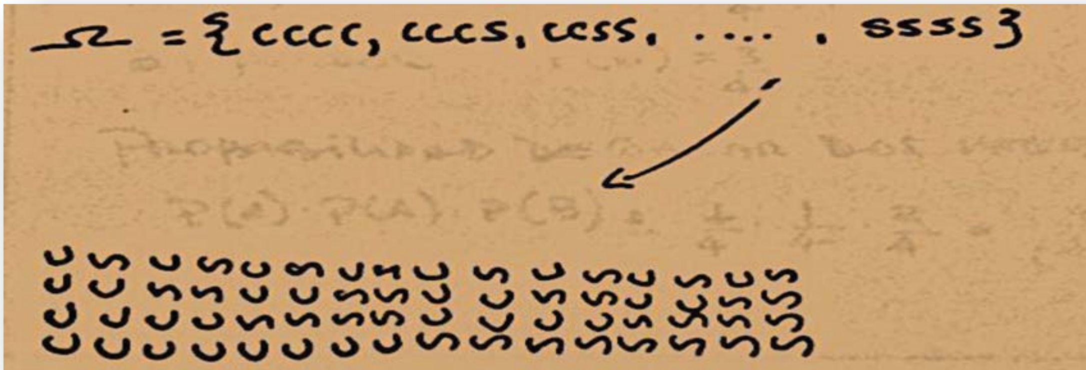
P

Figura 175: **Respuesta informante 11, actividad 5.C)**

El informante 9 no contesta. $\longrightarrow$ **S C**

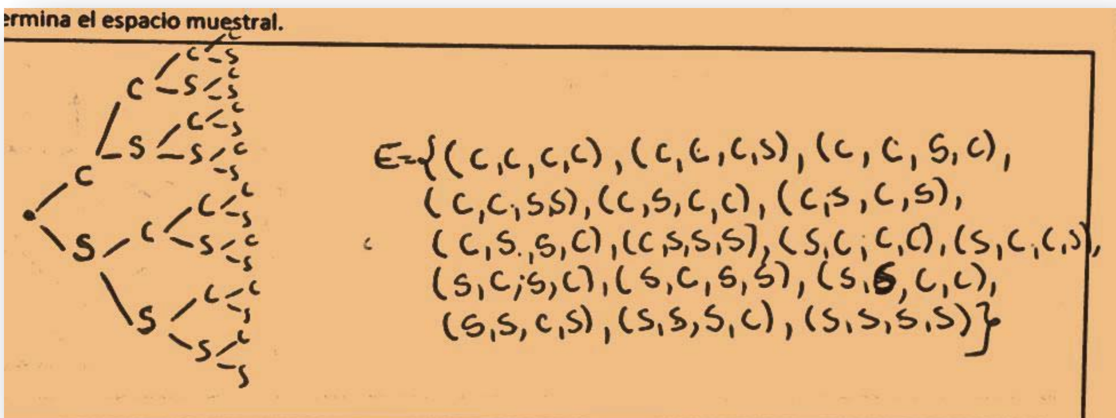
<u>Actividad 6</u>: Sea el experimento aleatorio: "Lanzamiento de 4 monedas".

A) Determina el espacio muestral.



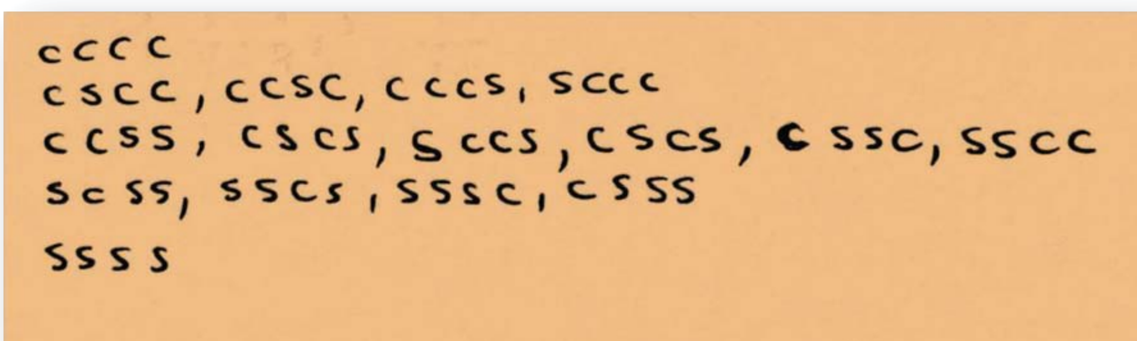
P

Figura 176: **Respuesta informante 6, actividad 6.A)**



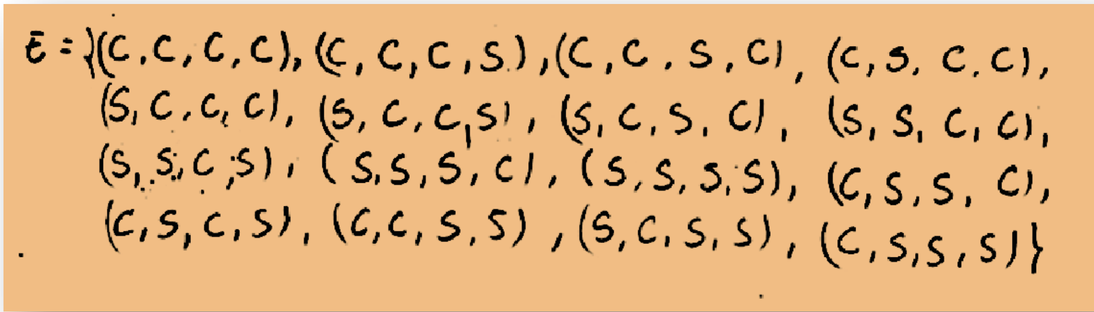
P

Figura 177: **Respuesta informante 7, actividad 6.A)**



P

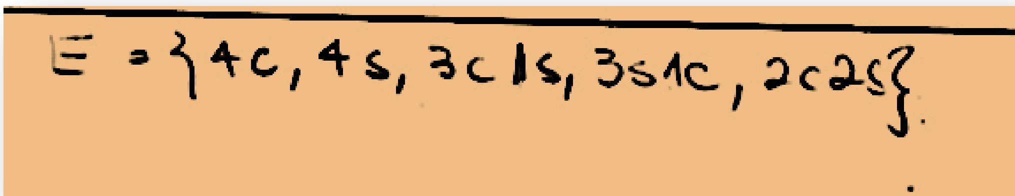
Figura 178: **Respuesta informante 8, actividad 6.A)**



E = {(C,C,C,C), (C,C,C,S), (C,C,S,C), (C,S,C,C), (S,C,C,C), (S,C,C,S), (S,C,S,C), (S,S,C,C), (S,S,C,S), (S,S,S,C), (S,S,S,S), (C,S,S,C), (C,S,C,S), (C,C,S,S), (S,C,S,S), (C,S,S,S)}

P

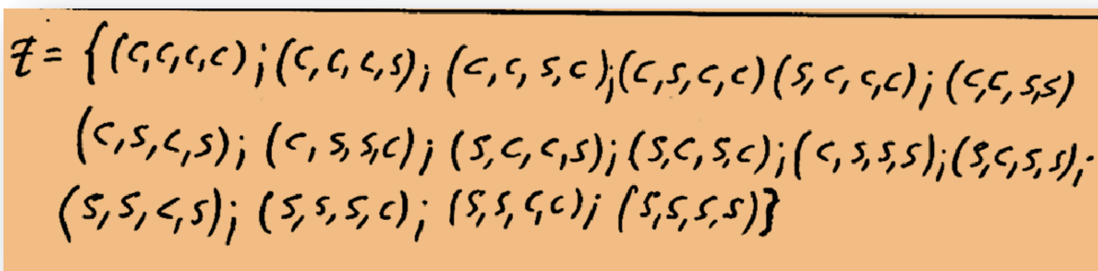
***Figura 179*: Respuesta informante 9, actividad 6.A)**



E = {4c, 4s, 3c1s, 3s1c, 2c2s}.

A – P

***Figura 180*: Respuesta informante 10, actividad 6.A)**



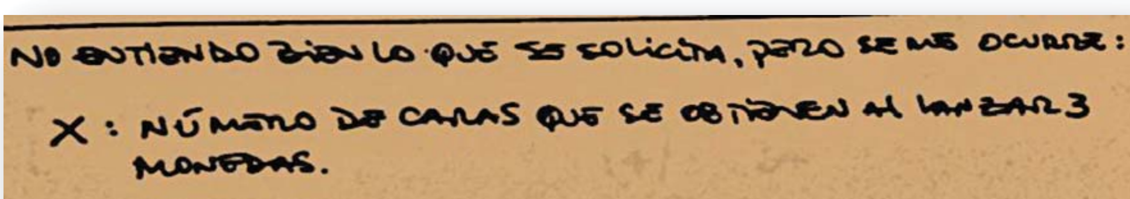
E = {(C,C,C,C); (C,C,C,S); (C,C,S,C); (C,S,C,C) (S,C,C,C); (C,C,S,S) (C,S,C,S); (C,S,S,C); (S,C,C,S); (S,C,S,C); (C,S,S,S); (S,C,S,S); (S,S,C,S); (S,S,S,C); (S,S,C,C); (S,S,S,S)}

P

***Figura 181*: Respuesta informante 11, actividad 6.A)**

Los informantes muestran una construcción proceso del espacio muestral de un experimento aleatorio. I10 nuevamente considera incorrectamente como uno solo a los elementos que están en distinto orden en el espacio muestral.

B) Determina la variable aleatoria: "Número de caras que se obtienen".



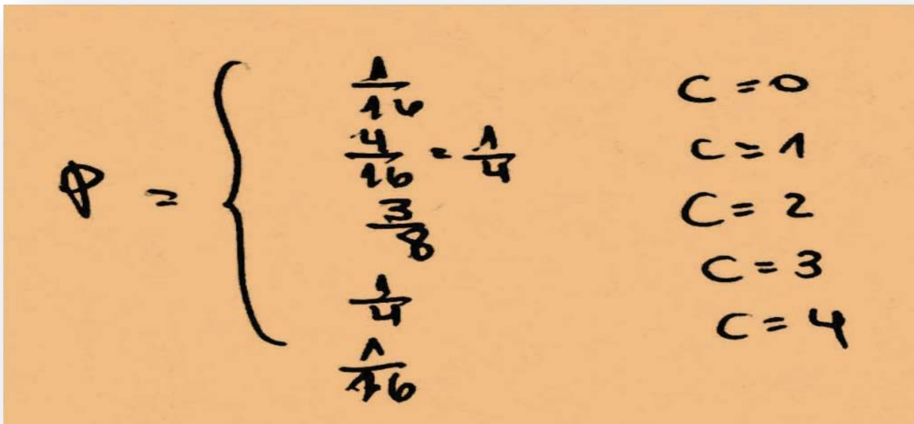
NO ENTIENDO BIEN LO QUE SE SOLICITA, PERO SE ME OCURRE:
X : NÚMERO DE CARAS QUE SE OBTIENEN AL LANZAR 3 MONEDAS.

A – P

***Figura 182*: Respuesta informante 6, actividad 6.B)**

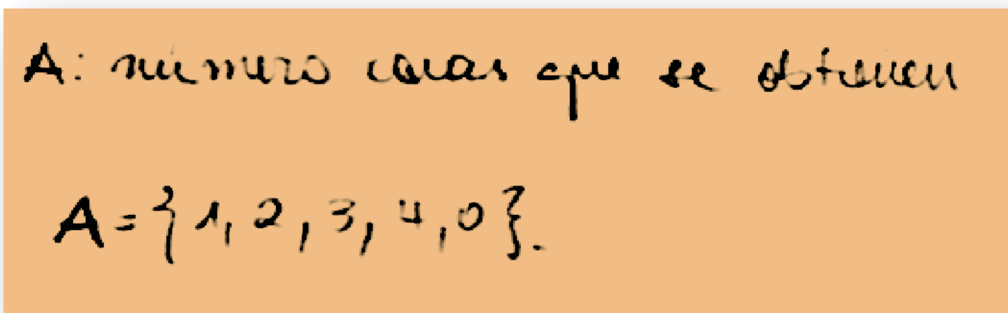
A – P

Figura 183: **Respuesta informante 7, actividad 6.B)**



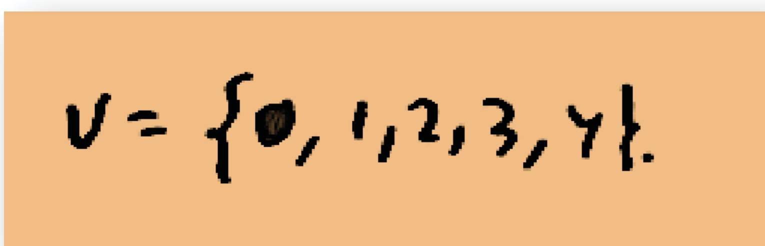
A – P

Figura 184: **Respuesta informante 8, actividad 6.B)**



A – P

Figura 185: **Respuesta informante 10, actividad 6.B)**



A – P

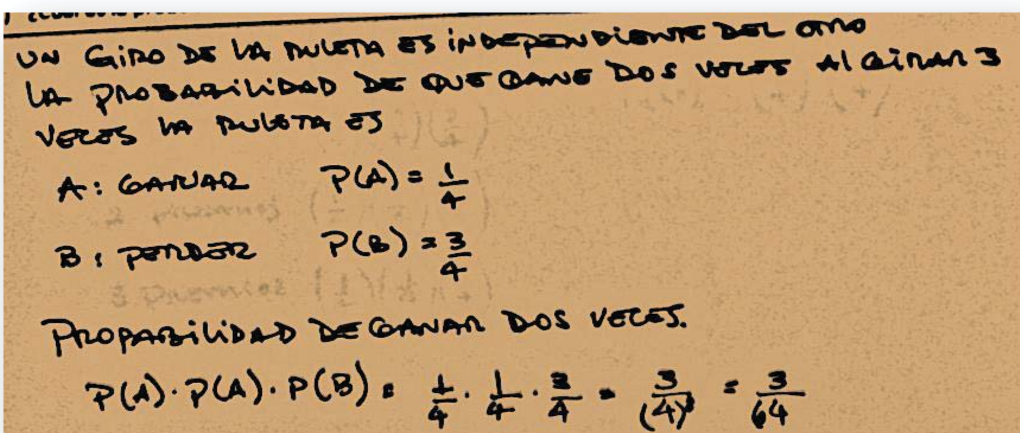
Figura 186: **Respuesta informante 11, actividad 6.B)**

El informante 9 no contesta. $\longrightarrow$ **S C**

Al analizar las respuestas de esta actividad se manifiesta una situación que tiene que ver con la enseñanza de la variable aleatoria o con la quizás apresurada generalización que se produce en el tratamiento de este concepto en el aula o en textos de estudio, ya que es común encontrar ejemplos o ejercicios en los que para definir una variable aleatoria se dice, por ejemplo: "Se define la variable aleatoria X como el número de caras…", siendo que a lo que se está refiriendo en esa oración es a los valores o al recorrido de la variable aleatoria; a todo esto hay que sumarle la dificultad de que cuando se habla de "variable" a secas o variable determinista, esta no involucra una función, sin embargo una variable aleatoria siempre es una función, razones por las que en este trabajo se ha manifestado a través del ejemplo dado de variable aleatoria como: "la función que relaciona el espacio muestral con el número de caras que se obtienen…" además está declarado así en el análisis teórico de esta investigación, es decir en la descomposición genética. Quizás en los comienzos de la enseñanza de la variable aleatoria se hace esta manifestación como función, pero en la mayoría de los textos, luego esta se pierde. Por lo tanto no podemos asegurar si un informante muestra una concepción o no en base a si escribe la variable aleatoria como los valores del recorrido de ella; diremos que está en camino a una construcción mental proceso.

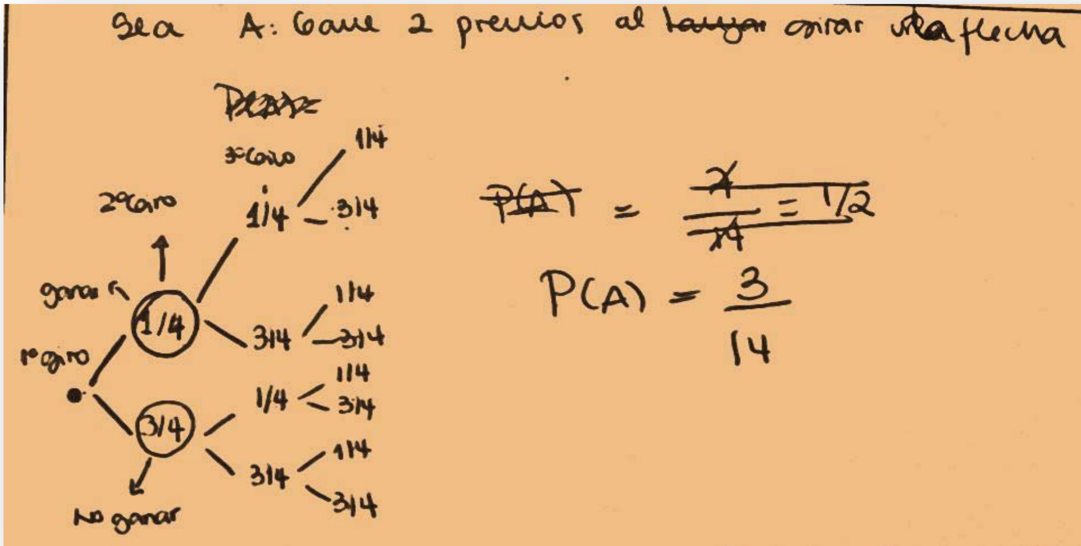
<u>Actividad 7</u>: En un programa de televisión los concursantes hacen girar una flecha en una ruleta como en la figura y cada vez que la flecha se detiene en la zona de color rojo, se gana un premio y el concurso se trata de hacer girar la flecha 3 veces.
En base a esta situación responde las siguientes preguntas:

A) ¿Cuál es la probabilidad de que un participante gane dos premios?


UN GIRO DE LA RULETA ES INDEPENDIENTE DEL OTRO
LA PROBABILIDAD DE QUE GANE DOS VECES AL GIRAR 3
VECES LA RULETA ES
A: GANAR $P(A) = \frac{1}{4}$
B: PERDER $P(B) = \frac{3}{4}$
PROPABILIDAD DE GANAR DOS VECES.
$P(A) \cdot P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{(4)^3} = \frac{3}{64}$

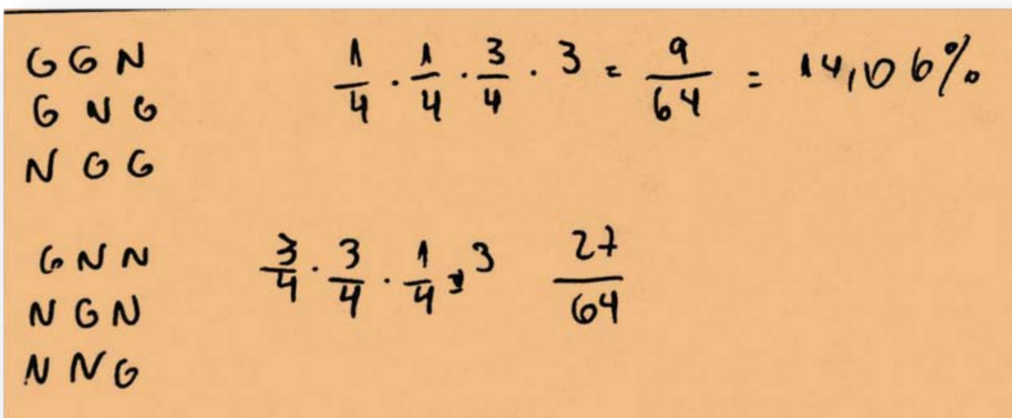
A – P

***Figura 187*: Respuesta informante 6, actividad 7.A)**



A – P

Figura 188: **Respuesta informante 7, actividad 7.A)**


GGN
GNG
NGG

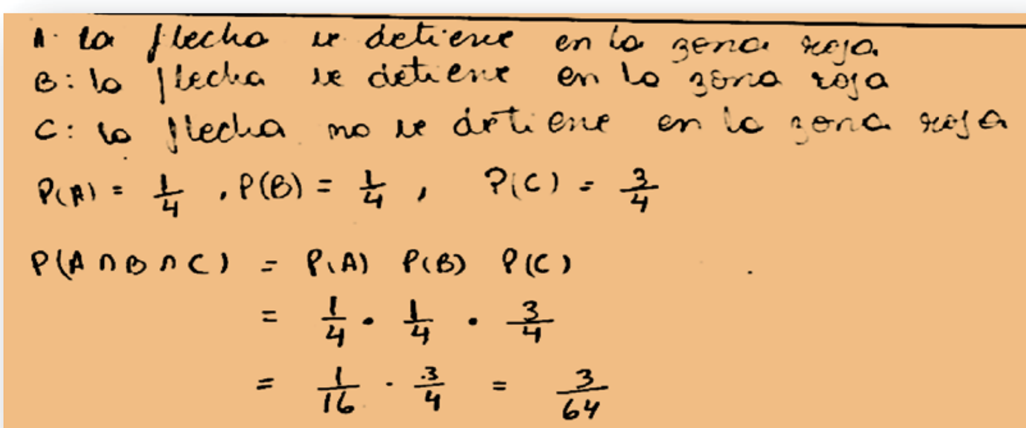
$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot 3 = \frac{9}{64} = 14{,}06\%$

GNN
NGN
NNG

$\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot 3 \quad \frac{27}{64}$

P

Figura 189: **Respuesta informante 8, actividad 7.A)**


A: la flecha se detiene en la zona roja.
B: la flecha se detiene en la zona roja
C: la flecha no se detiene en la zona roja

$P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, $P(C) = \frac{3}{4}$

$P(A \cap B \cap C) = P(A)\ P(B)\ P(C)$

$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}$

$= \frac{1}{16} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{64}$

A – P

Figura 190: **Respuesta informante 9, actividad 7.A)**

$$P(G_2) = \frac{3}{64} + \frac{3}{64} + \frac{3}{64} = \frac{12}{64} = \frac{1}{3}.$$

S C

***Figura 191*: Respuesta informante 10, actividad 7.A)**

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = 3\cdot\frac{3}{64} = \frac{9}{64}.$$

P

***Figura 192*: Respuesta informante 11, actividad 7.A)**

En esta respuesta I6 muestra una construcción acción, ya que realiza un cálculo, quizás motivado por la reiteración de algunos ejercicios que realizó cuando estudió probabilidades en su carrera universitaria, aplica la regla de Laplace y la de intersección de sucesos independientes, pero no logra determinar que el orden de ganar y/o perder puede cambiar o permutarse, mismo caso de I9. I7 realiza un diagrama de árbol que sirve para interpretar la situación; sin embargo lo malinterpreta. I10 no muestra construcción mental. I8 e I11 dan cuenta de una concepción proceso de la variable aleatoria, coordinando la función compuesta con probabilidades.

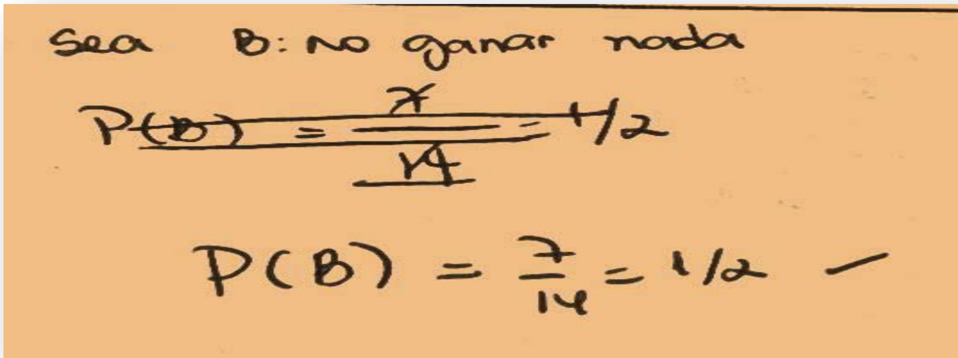
B) ¿Cuál es la probabilidad de que un concursante no gane ningún premio?

NO GANE NINGÚN PREMIO:

$$[P(B)]^3 = P(B)\cdot P(B)\cdot P(B) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$$

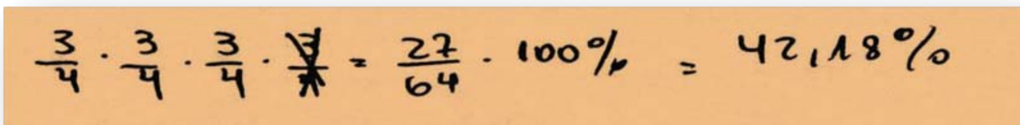
P

***Figura 193*: Respuesta informante 6, actividad 7.B)**



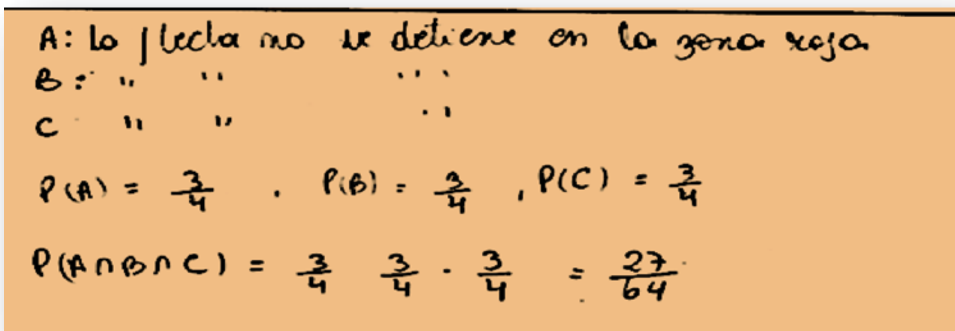
S C

Figura 194: **Respuesta informante 7, actividad 7.B)**



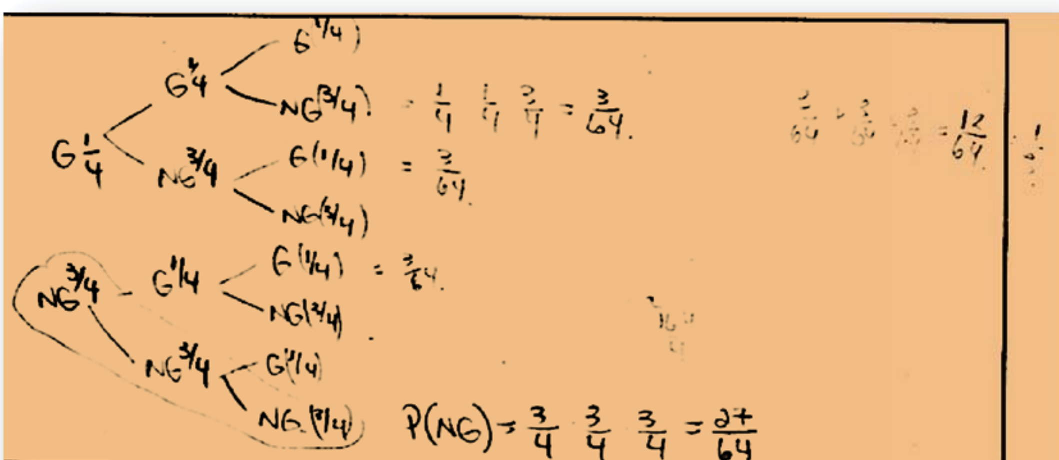
P

Figura 195: **Respuesta informante 8, actividad 7.B)**



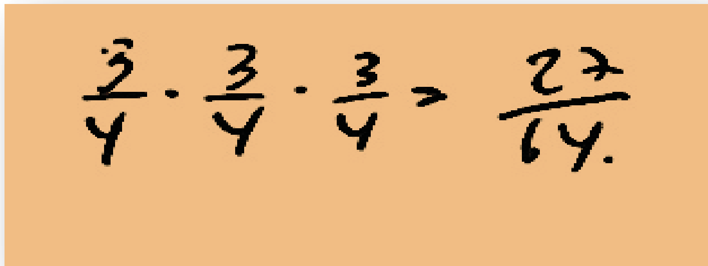
P

Figura 196: **Respuesta informante 9, actividad 7.B)**



P

Figura 197: **Respuesta informante 10, actividad 7.B)**



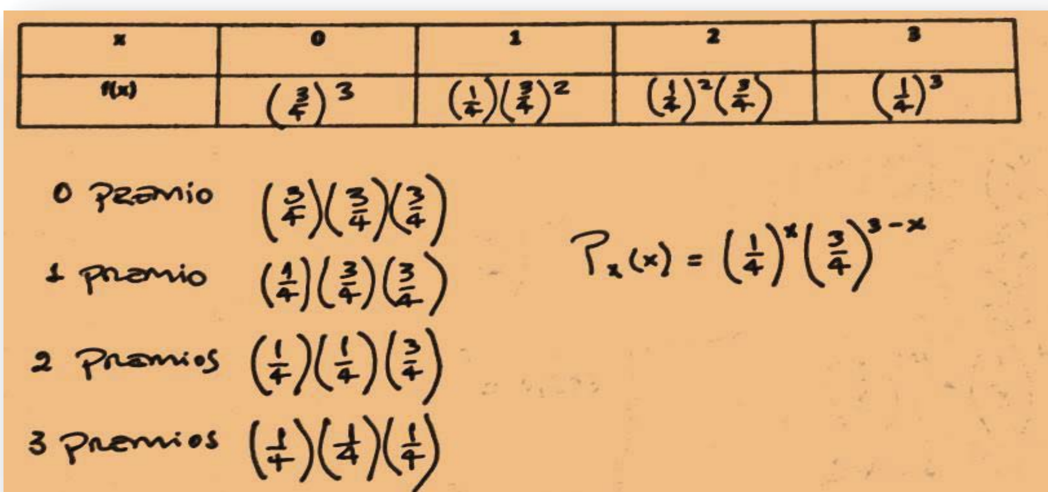
$$\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{27}{64}.$$

P

Figura 198: **Respuesta informante 11, actividad 7.B)**

En esta respuesta aparecen casi todas correctas salvo I7, que no muestra construcción mental. Hay que hacer notar que todos los informantes que contestaron correctamente no usaron la variable aleatoria para responder y el suceso de esta pregunta daba pie para que se respondiera de esa forma y poder notar las causas de cómo lo realizan, cuando son sucesos equiprobables, sencillamente los multiplican, pero en la educación en aula o en el discurso matemático escolar está lleno de situaciones equiprobables, si no sacamos a nuestros alumnos de ahí, seguirán teniendo problemas u obstáculos en la construcción del concepto.

C) Escribe en la tabla siguiente la función de probabilidad de la variable aleatoria que relaciona el espacio muestral con el número de premios que gana un concursante:



x	0	1	2	3
f(x)	$\left(\frac{3}{4}\right)^3$	$\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2$	$\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{4}\right)^3$

0 premio $\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)$

1 premio $\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)$

2 premios $\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)$

3 premios $\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)$

$$P_x(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{3-x}$$

A – P

Figura 199: **Respuesta informante 6, actividad 7.C)**

x	0	1	2	3
f(x)	1/2	2/14 = 1/7	3/14	1/14

x: no premios q' gana un concursante

~~P~~ $P(x=0) =$

S C

Figura 200: **Respuesta informante 7, actividad 7.C)**

x	0	1	2	3
f(x)	27/64	27/64	9/64	1/64

O

Figura 201: **Respuesta informante 8, actividad 7.C)**

x	0	1	2	3
f(x)	27/64	9/64	3/64	1/64

$f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{3-x}$ x: numeros de lanzamientos

A – P

Figura 202: **Respuesta informante 9, actividad 7.C)**

x	0	1	2	3
f(x)				

S C

Figura 203: **Respuesta informante 10, actividad 7.C)**

x	0	1	2	3
f(x)	27/64.	27/64.	9/64	1/64.

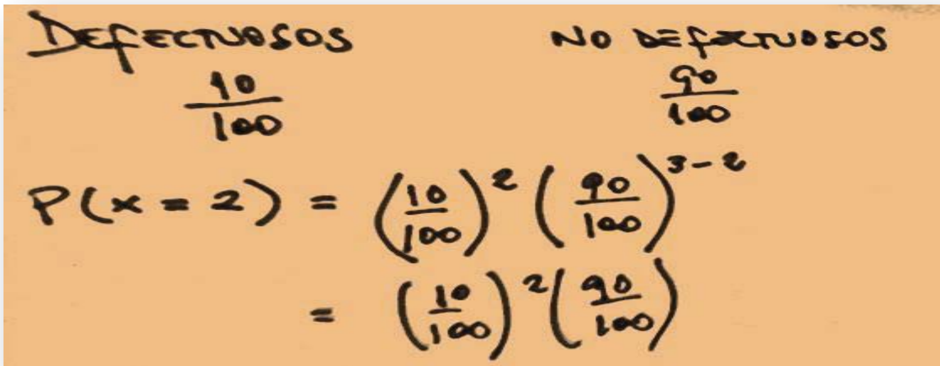
O

Figura 204: **Respuesta informante 11, actividad 7.C)**

En esta actividad los informantes 8 y 11 muestran que en su mente encapsularon la variable aleatoria con probabilidad con las funciones compuestas e inversa, en el objeto variable aleatoria con probabilidad, al construir la función.

Actividad 8: En una tornería se clasifican los tornillos en defectuosos y en no defectuosos y generalmente se encuentran un 10% de los tornillos defectuosos. Si un experimento consiste en sacar 3 tornillos al azar y se define la variable aleatoria X: "Número de tornillos defectuosos". Determina:

A) P(X = 2)



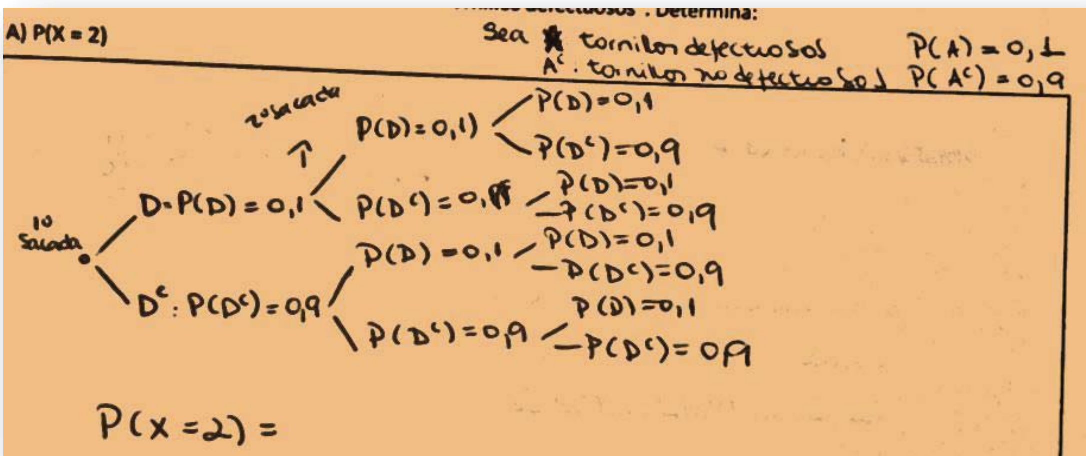
DEFECTUOSOS $\frac{10}{100}$ NO DEFECTUOSOS $\frac{90}{100}$

$$P(x=2) = \left(\frac{10}{100}\right)^2 \left(\frac{90}{100}\right)^{3-2}$$

$$= \left(\frac{10}{100}\right)^2 \left(\frac{90}{100}\right)$$

A –P

Figura 205: **Respuesta informante 6, actividad 8.A)**



A) P(X = 2)

Sea A: tornillos defectuosos $P(A) = 0{,}1$

A^c: tornillos no defectuosos $P(A^c) = 0{,}9$

1° sacada

$D: P(D) = 0{,}1$

2° sacada

$P(D) = 0{,}1$ — $P(D) = 0{,}1$, $P(D^c) = 0{,}9$

$P(D^c) = 0{,}9$ — $P(D) = 0{,}1$, $P(D^c) = 0{,}9$

$D^c: P(D^c) = 0{,}9$

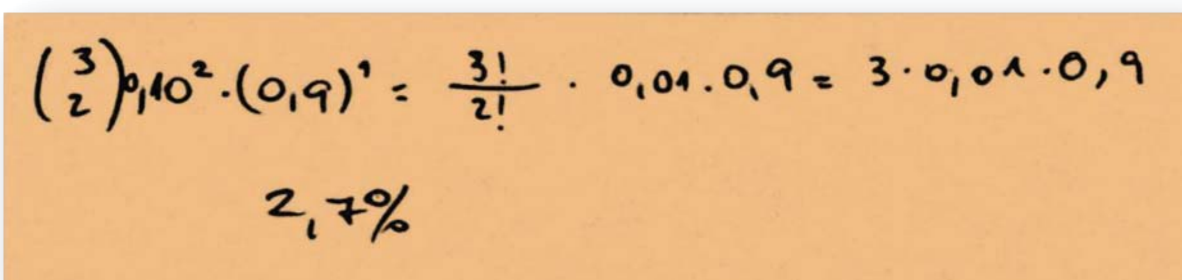
$P(D) = 0{,}1$ — $P(D) = 0{,}1$, $P(D^c) = 0{,}9$

$P(D^c) = 0{,}9$ — $P(D) = 0{,}1$, $P(D^c) = 0{,}9$

$P(x=2) =$

A – P

Figura 206: **Respuesta informante 7, actividad 8.A)**

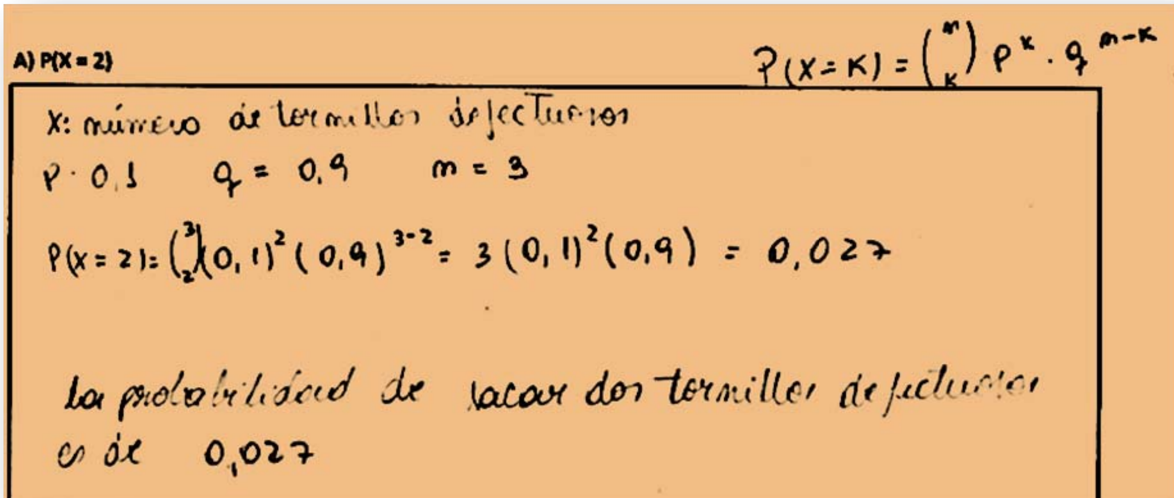


$$\binom{3}{2} 0{,}10^2 \cdot (0{,}9)^1 = \frac{3!}{2!} \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}9 = 3 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}9$$

2,7%

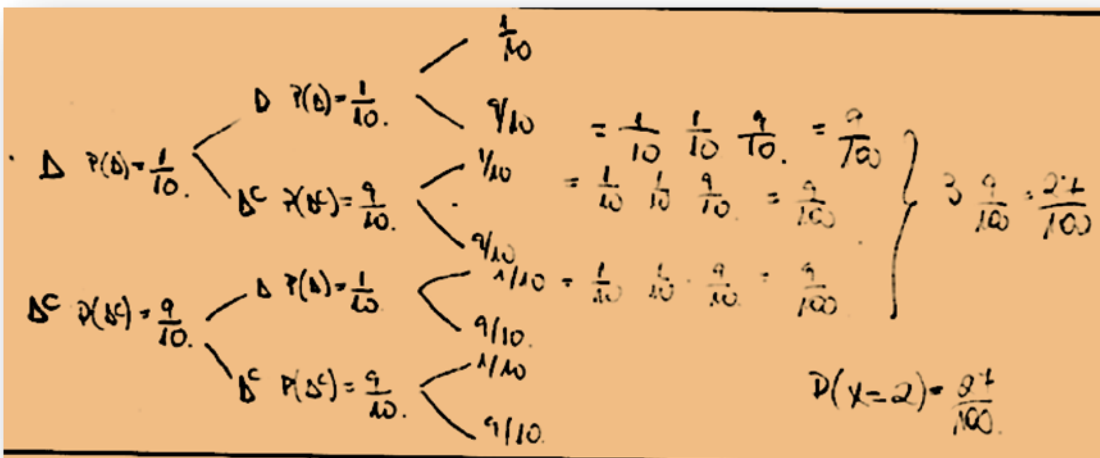
P

Figura 207: **Respuesta informante 8, actividad 8.A)**



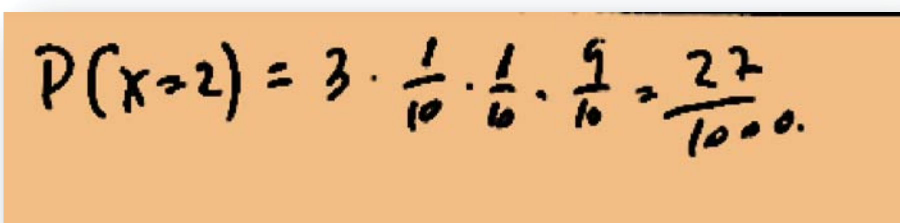
P

Figura 208: **Respuesta informante 9, actividad 8.A)**



P

Figura 209: **Respuesta informante 10, actividad 8.A)**

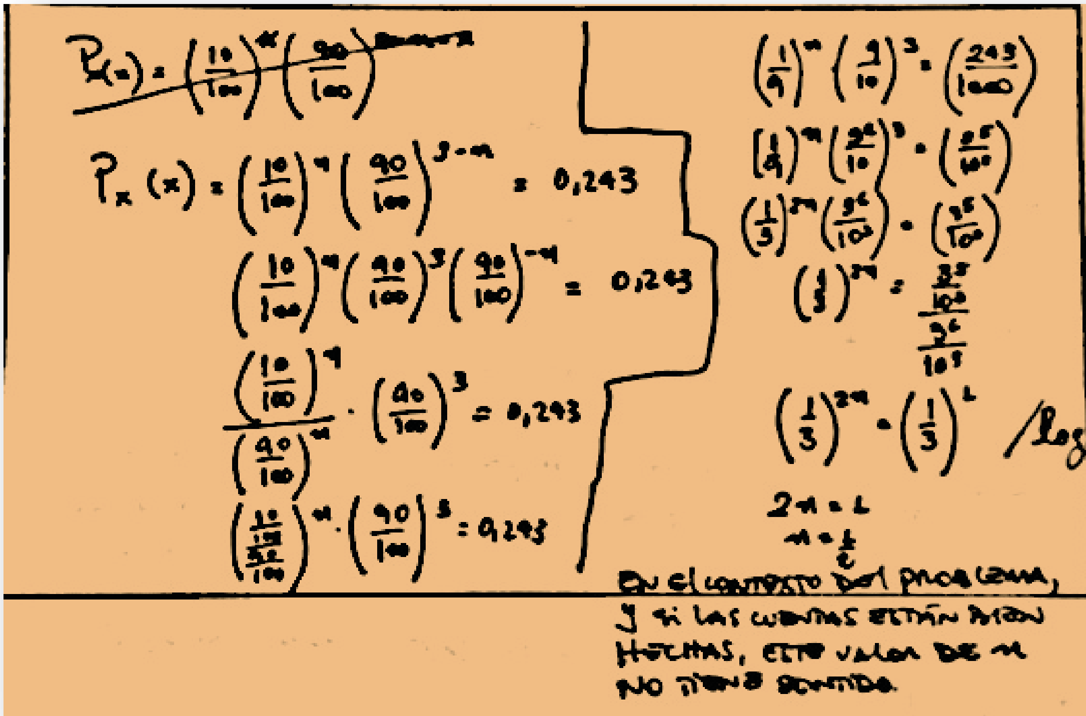


P

Figura 210: **Respuesta informante 11, actividad 8.A)**

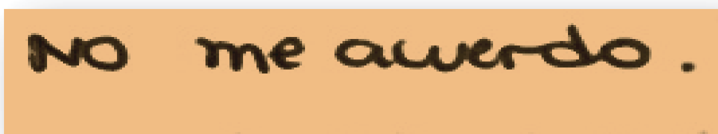
4 de los 6 informantes manifiestan una construcción proceso y dos de ellos en vías de hacerlo.

B) Si P(X = n) = 0,243, ¿cuál es el valor de n? Justifica tu respuesta.



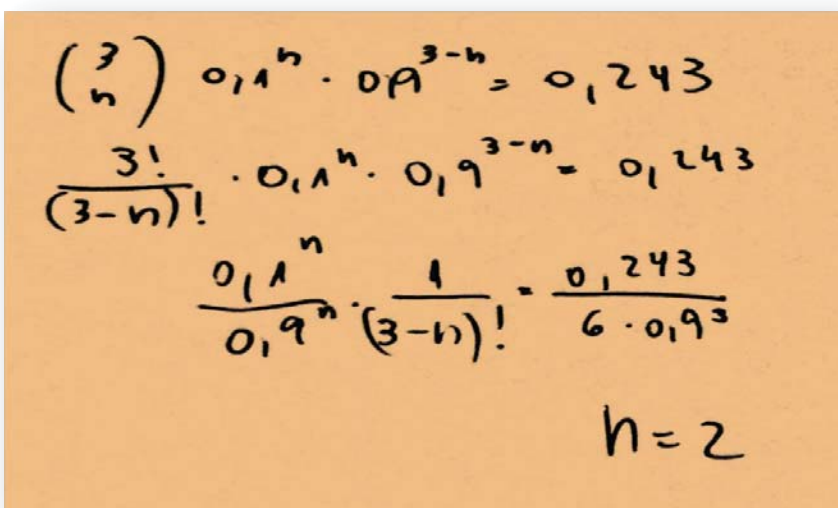
S C

Figura 211: **Respuesta informante 6, actividad 8.B)**



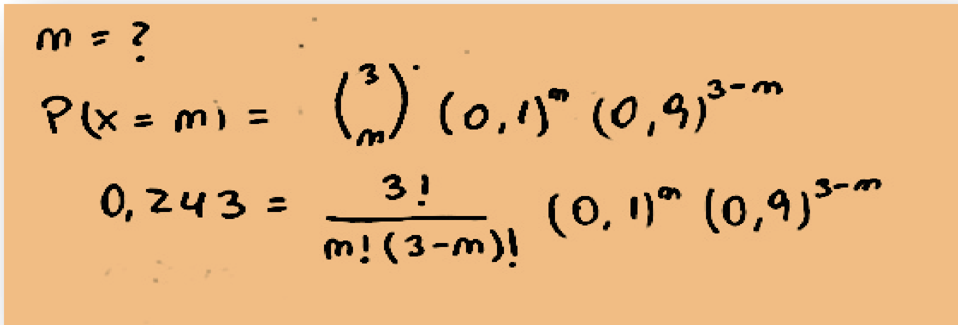
S C

Figura 212: **Respuesta informante 7, actividad 8.B)**



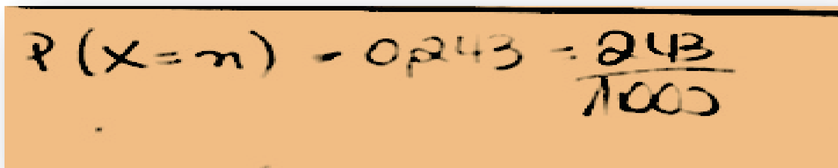
S C

Figura 213: **Respuesta informante 8, actividad 8.B)**



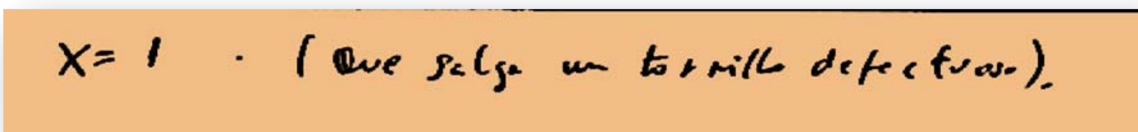
S C

Figura 214: **Respuesta informante 9, actividad 8.B)**



S C

Figura 215: **Respuesta informante 10, actividad 8.B)**



O

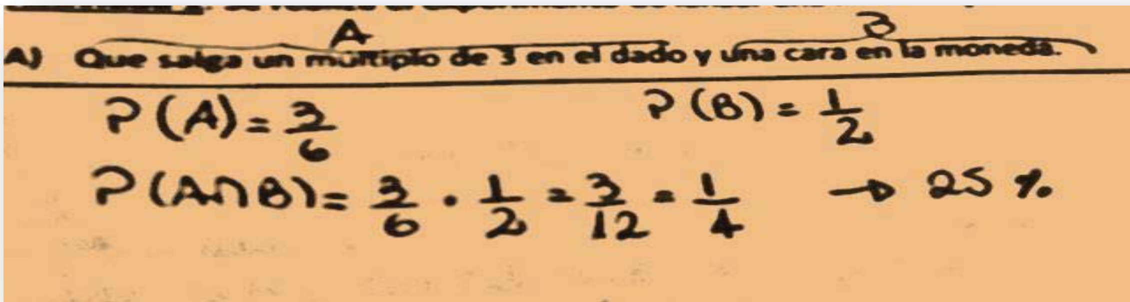
Figura 216: **Respuesta informante 11, actividad 8.B)**

Solo I11 muestra una coordinación y encapsulamiento entre la función inversa, compuesta en la variable aleatoria con probabilidad como objeto. Los demás informantes no muestran construcción y tratan de llegar mediante un método algebraico a la respuesta y no mediante un método analítico.

1.1.3 ANÁLISIS POR PREGUNTA CASO 3

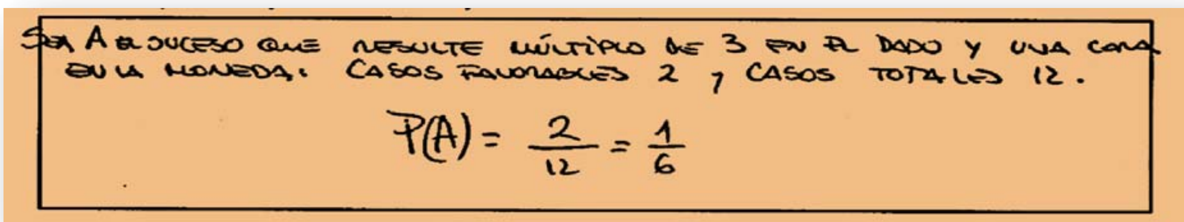
Actividad 1: Se realiza el experimento de lanzar una moneda y un dado. Cuál es la probabilidad de:

A) Que salga un múltiplo de 3 en el dado y una cara en la moneda.



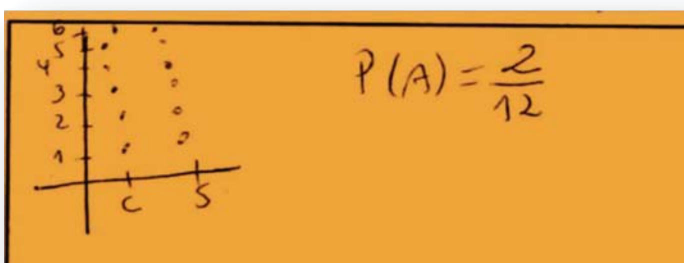
A – P

Figura 217: **Respuesta informante 12, actividad 1.A)**



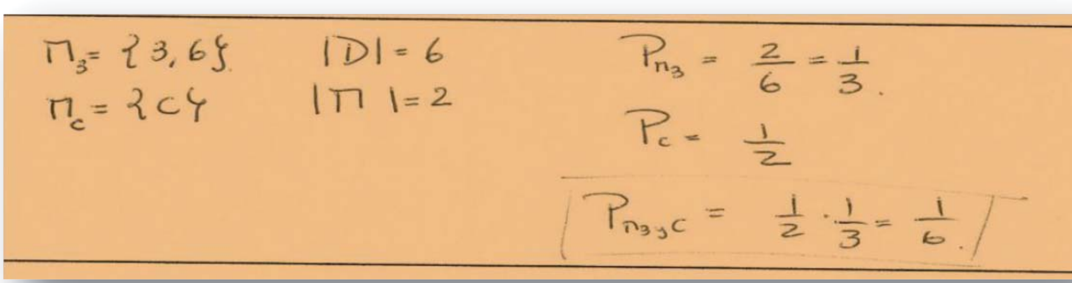
P

Figura 218: **Respuesta informante 13, actividad 1.A)**



P

Figura 219: **Respuesta informante 14, actividad 1.A)**



P

Figura 220: **Respuesta informante 15, actividad 1.A)**

Como se puede apreciar todos los informantes muestran una concepción proceso de la propiedad de la intersección de probabilidades. I12 sin embargo cuenta 3 múltiplos de 3 en el dado y por ese motivo comete un error.

B) Que salga una cara o un sello en la moneda y un número primo en el dado.

A B C

Que salga una cara o un sello en la moneda y un número primo en el dado.

$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ $P(C) = \frac{2}{6}$

$P((A \cup B) \cap C) = 1 \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \rightarrow 33,3\%$

A – P

***Figura 221*: Respuesta informante 12, actividad 1.B)**

SEA A EL SUCESO QUE RESULTE CARA O SELLO EN LA MONEDA Y UN NÚMERO PRIMO EN EL DADO: CASOS FAVORABLES 3 Y CASOS TOTALES 12.

$P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

A – P

***Figura 222*: Respuesta informante 13, actividad 1.B)**

$P(B) = \frac{6}{12}$

P

***Figura 223*: Respuesta informante 14, actividad 1.B)**

$P_{cos} = 1$ $P_r = \{2, 3, 5\}$

$P_{Pr} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

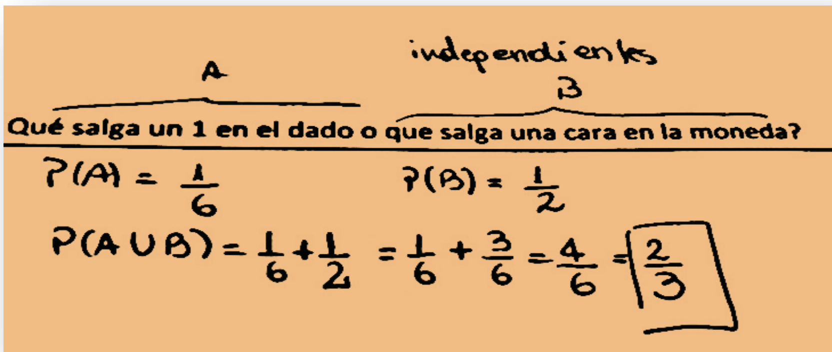
$\boxed{P_{cos \cap P} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}}$

P

***Figura 224*: Respuesta informante 15, actividad 1.B)**

Los informantes muestran una construcción proceso de la unión e intersección de probabilidades; I12 comete un error al parecer al contabilizar la cantidad de números primos en el dado. I13 al parecer cuenta con un "o" excluyente, es decir es: "o cara o sello, pero no los dos juntos".

C) Qué salga un 1 en el dado o que salga una cara en la moneda?



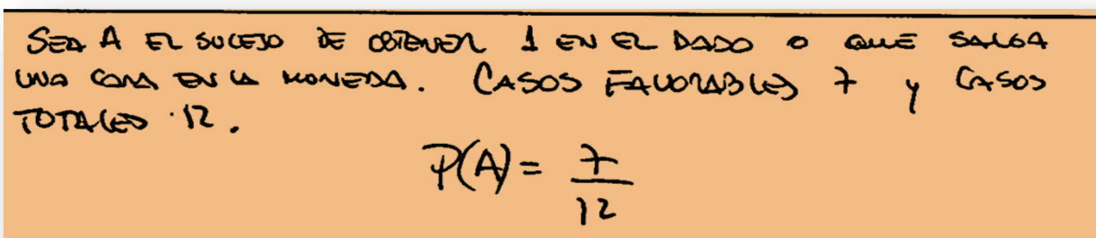
$\underbrace{\text{Qué salga un 1 en el dado}}_{A}$ o $\underbrace{\text{que salga una cara en la moneda?}}_{B}$ (independientes)

$P(A) = \frac{1}{6}$ $\quad P(B) = \frac{1}{2}$

$P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3}}$

A – P

Figura 225: **Respuesta informante 12, actividad 1.C)**

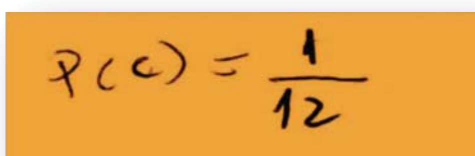


SEA A EL SUCESO DE OBTENER 1 EN EL DADO O QUE SALGA UNA CARA EN LA MONEDA. CASOS FAVORABLES 7 y CASOS TOTALES 12.

$P(A) = \frac{7}{12}$

P

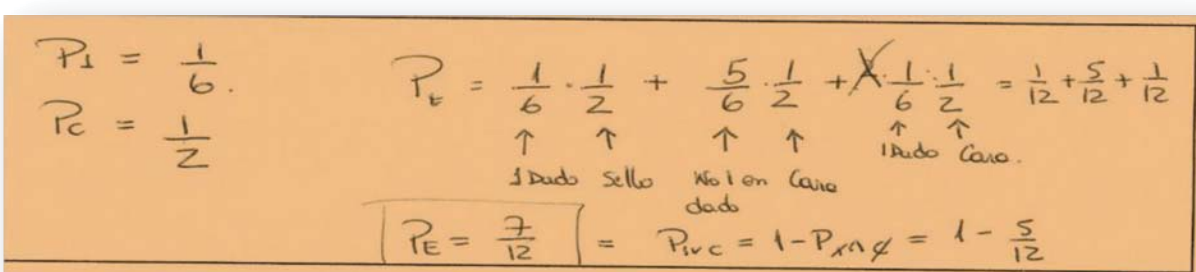
Figura 226: **Respuesta informante 13, actividad 1.C)**



$P(C) = \frac{1}{12}$

A – P

Figura 227: **Respuesta informante 14, actividad 1.C)**



$P_1 = \frac{1}{6}$

$P_c = \frac{1}{2}$

$P_t = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{12} + \frac{5}{12} + \frac{1}{12}$

1 Dado, Sello, No 1 en dado, Cara, 1 Dado, Cara.

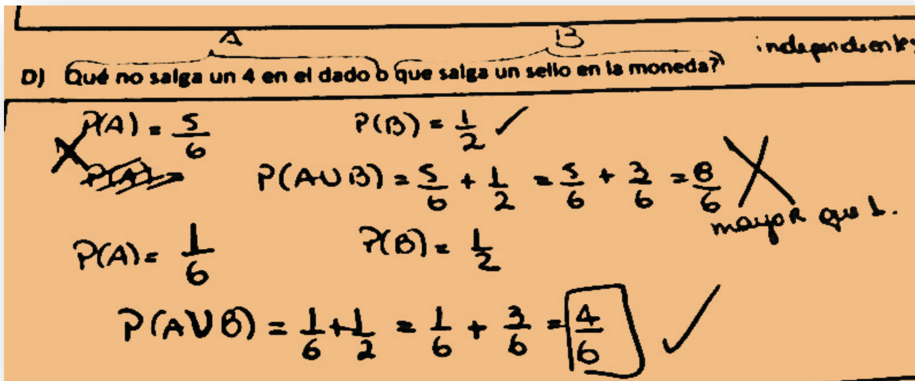
$\boxed{P_E = \frac{7}{12}} = P_{1 \cup c} = 1 - P_{x \cap \not c} = 1 - \frac{5}{12}$

P

Figura 228: **Respuesta informante 15, actividad 1.C)**

En la mayoría de los informantes de todos los casos se aprecia este fenómeno, que es el de confundir sucesos independientes con el de sucesos mutuamente excluyentes y este caso de estudio no es la excepción, ya que I12 lo hace; quizás la explicación a los problemas de los otros dos casos. I14 responde parcialmente ya que responde por la probabilidad de la intersección de los sucesos.

D) Qué no salga un 4 en el dado o que salga un sello en la moneda?



D) Qué no salga un 4 en el dado o que salga un sello en la moneda? independientes

$P(A) = \frac{5}{6}$ $P(B) = \frac{1}{2}$ ✓

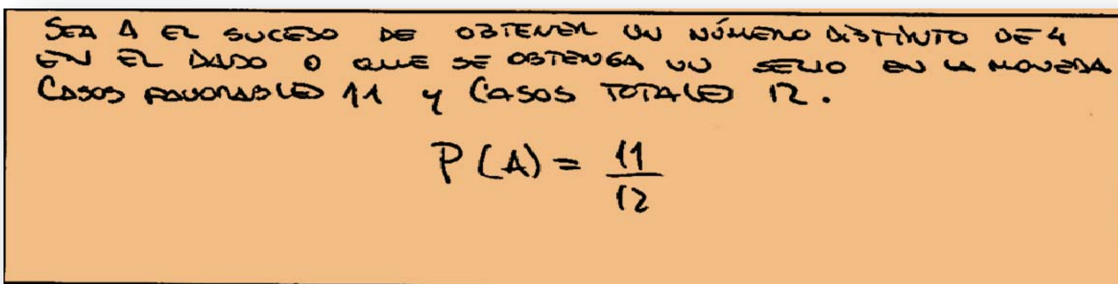
$P(A \cup B) = \frac{5}{6} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} + \frac{3}{6} = \frac{8}{6}$ mayor que 1.

$P(A) = \frac{1}{6}$ $P(B) = \frac{1}{2}$

$P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \boxed{\frac{4}{6}}$ ✓

A – P
propiedades
de la unión
de prob.
SC Axiomas

***Figura 229*: Respuesta informante 12, actividad 1.D)**

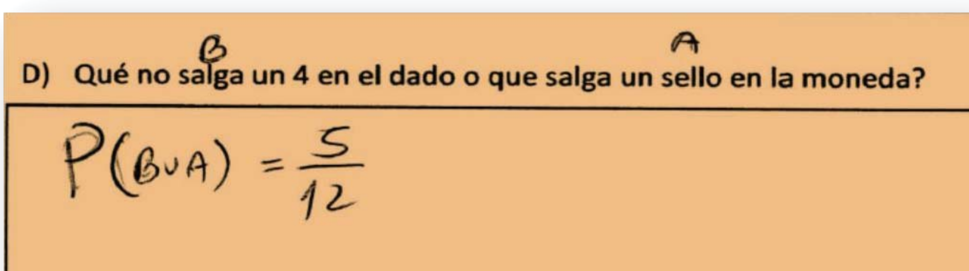


SEA A EL SUCESO DE OBTENER UN NÚMERO DISTINTO DE 4 EN EL DADO O QUE SE OBTENGA UN SELLO EN LA MONEDA CASOS FAVORABLES 11 Y CASOS TOTALES 12.

$P(A) = \frac{11}{12}$

P

***Figura 230*: Respuesta informante 13, actividad 1.D)**

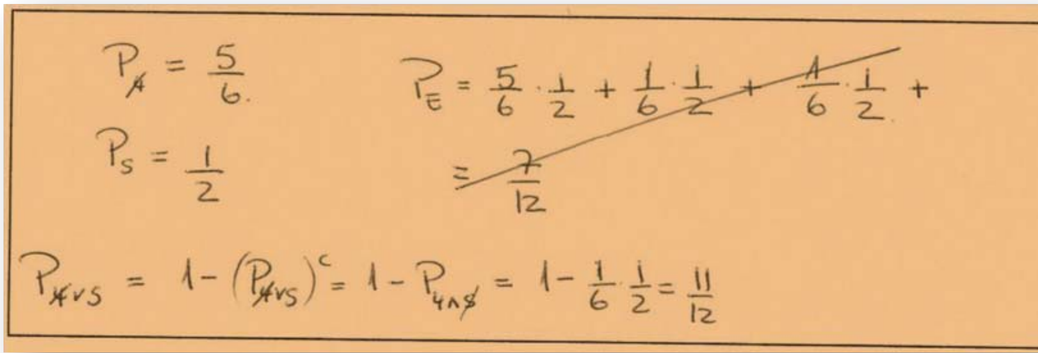


D) Qué no salga un 4 en el dado o que salga un sello en la moneda?

$P(B \cup A) = \frac{5}{12}$

A - P

***Figura 231*: Respuesta informante 14, actividad 1.D)**



$P_{\cancel{A}} = \frac{5}{6}$ $\qquad$ $P_E = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} + = \frac{7}{12}}$

$P_S = \frac{1}{2}$

$P_{\cancel{A}\cup S} = 1-(P_{\cancel{A}\cup S})^c = 1 - P_{A\cap \cancel{S}} = 1 - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} = \frac{11}{12}$

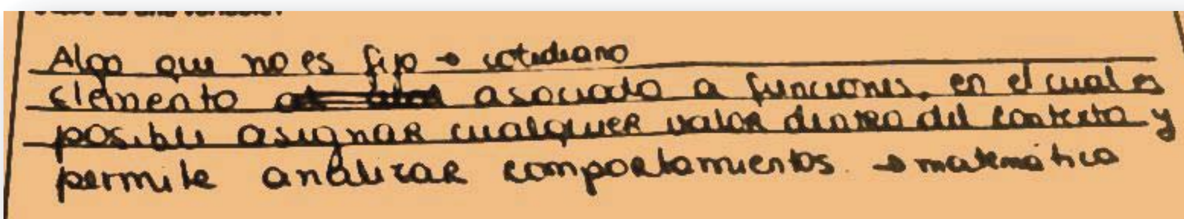
P

Figura 232: **Respuesta informante 15, actividad 1.D)**

El fenómeno de la pregunta anterior persiste en I12, aunque ahora se da cuenta, colocándole una cruz en la respuesta y una leyenda que dice: "mayor que 1", por lo que tiene noción de los axiomas de kolmogorov. I14 nuevamente responde la intersección de los sucesos y no la pregunta. I13 e I15 muestran una construcción mental proceso de propiedades de la unión de probabilidades.

<u>Actividad 2</u>: Responde las siguientes preguntas:

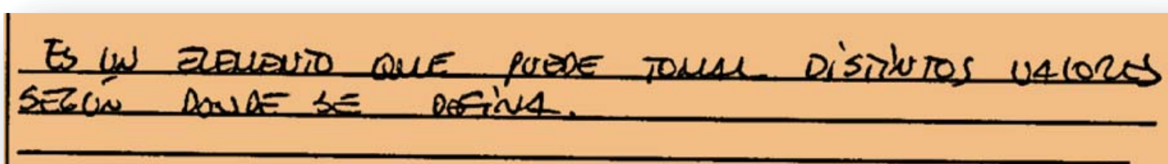
¿Qué es una variable?



Algo que no es fijo o cotidiano elemento ~~que toma~~ asociado a funciones, en el cual es posible asignar cualquier valor dentro del contexto y permite analizar comportamientos o matemática

P

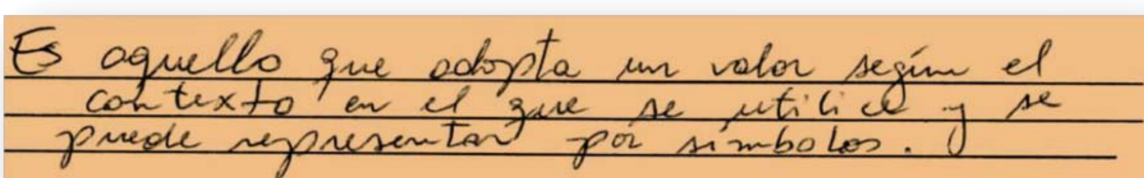
Figura 233: **Respuesta informante 12, actividad 2.A)**



ES UN ELEMENTO QUE PUEDE TOMAR DISTINTOS VALORES SEGÚN DONDE SE DEFINA.

P

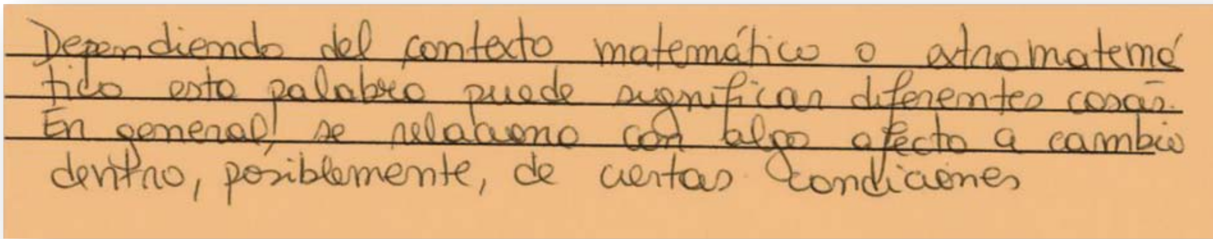
Figura 234: **Respuesta informante 13, actividad 2.A)**



Es aquello que adopta un valor según el contexto en el que se utilice y se puede representar por símbolos.

P

Figura 235: **Respuesta informante 14, actividad 2.A)**



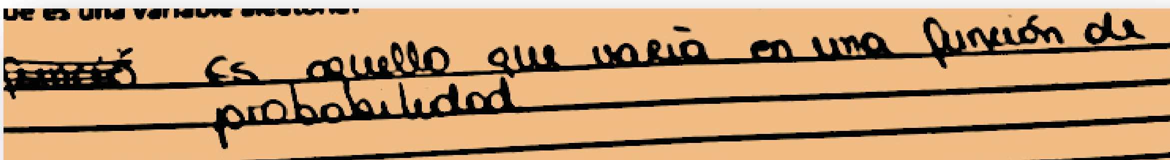
Dependiendo del contexto matemático o extramatemático esta palabra puede significar diferentes cosas. En general se relaciona con algo afecto a cambio dentro, posiblemente, de ciertas condiciones

P

Figura 236: **Respuesta informante 15, actividad 2.A)**

Aunque no existe una única definición para la variable, se evidencia una construcción mental proceso en todas estas respuestas.

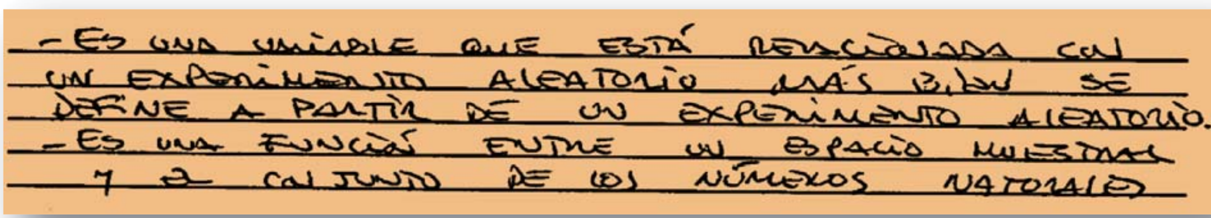
¿Qué es una variable aleatoria?



Es aquello que varía en una función de probabilidad

A–P

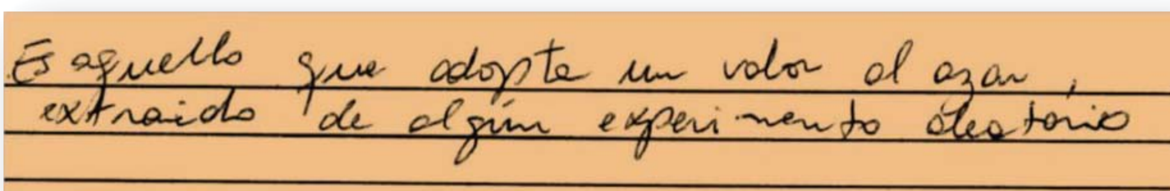
Figura 237: **Respuesta informante 12, actividad 2.B)**



- ES UNA VARIABLE QUE ESTÁ RELACIONADA CON UN EXPERIMENTO ALEATORIO MÁS BIEN SE DEFINE A PARTIR DE UN EXPERIMENTO ALEATORIO.
- ES UNA FUNCIÓN ENTRE UN ESPACIO MUESTRAL Y EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

P

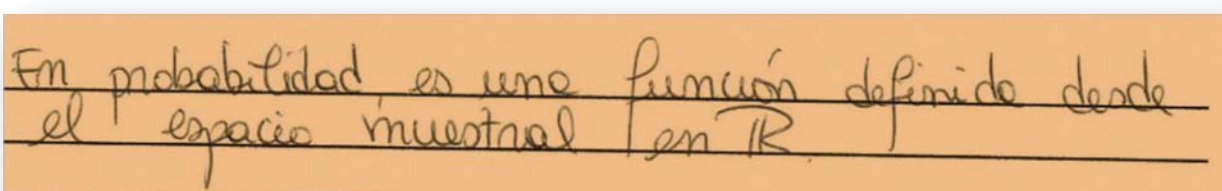
Figura 238: **Respuesta informante 13, actividad 2.B)**



Es aquello que adopte un valor al azar, extraído de algún experimento aleatorio

A–P

Figura 239: **Respuesta informante 14, actividad 2.B)**



En probabilidad es una función definida desde el espacio muestral en $\mathbb{R}$.

P

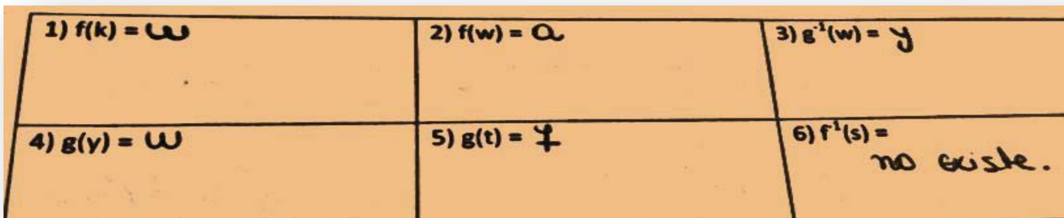
Figura 240: **Respuesta informante 15, actividad 2.B)**

I12 la define a medias, ya que no dice que es una función, aunque posee una idea intuitiva, se encuentra en camino a una construcción proceso, de la misma manera I14 aunque su respuesta es un poco más clara, no la define como una función. I13 se refiere a una variable aleatoria discreta, ya que dice que el recorrido es el conjunto de los números naturales, de todas maneras muestra una construcción proceso. I15 la define mostrando una construcción proceso.

Actividad 3:

Omitiremos los diagramas, ya que han sido presentados en el mismo cuestionario de los casos 1 y 2.

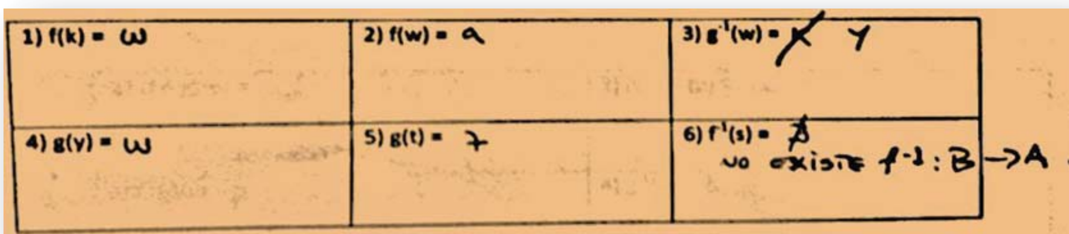
A) Determina:



1) $f(k) = \omega$	2) $f(w) = a$	3) $g^{-1}(w) = y$
4) $g(y) = \omega$	5) $g(t) = 7$	6) $f^{-1}(s) =$ no existe.

A – P

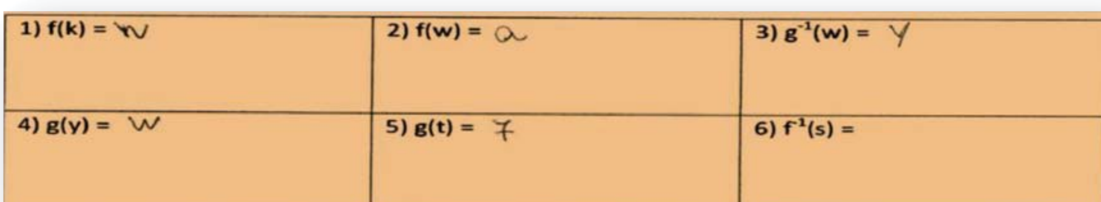
***Figura 241*: Respuesta informante 12, actividad 3.A)**



1) $f(k) = \omega$	2) $f(w) = a$	3) $g^{-1}(w) = \cancel{X}$ Y
4) $g(y) = \omega$	5) $g(t) = 7$	6) $f^{-1}(s) = \emptyset$ no existe $f^{-1}: B \to A$.

A – P

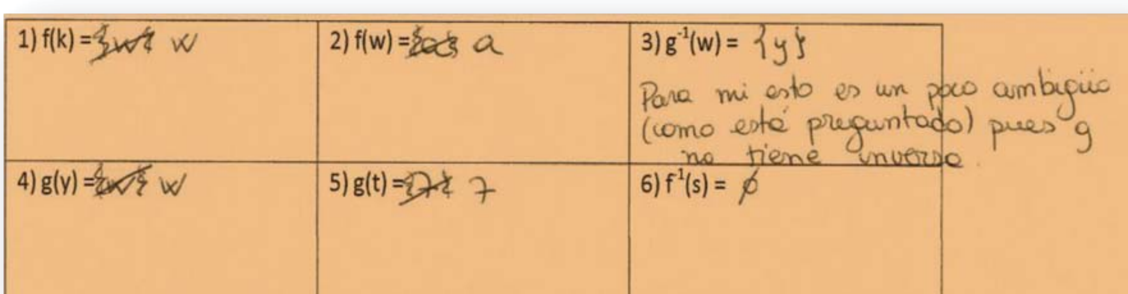
***Figura 242*: Respuesta informante 13, actividad 3.A)**



1) $f(k) = w$	2) $f(w) = a$	3) $g^{-1}(w) = y$
4) $g(y) = w$	5) $g(t) = 7$	6) $f^{-1}(s) =$

A – P

***Figura 243*: Respuesta informante 14, actividad 3.A)**



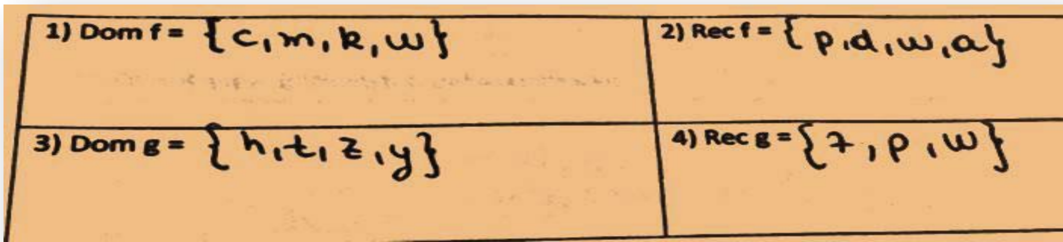
1) $f(k) = \cancel{\{w\}}$ w	2) $f(w) = \cancel{\{a\}}$ a	3) $g^{-1}(w) = \{y\}$ Para mi esto es un poco ambigüo (como esté preguntado) pues g no tiene inverso
4) $g(y) = \cancel{\{w\}}$ w	5) $g(t) = \cancel{\{7\}}$ 7	6) $f^{-1}(s) = \emptyset$

P

***Figura 244*: Respuesta informante 15, actividad 3.A)**

Solo I15 muestra una concepción proceso al manifestar que ambas funciones no tienen inversa. I12 e I13 afirman que solo f no tiene inversa. I14 no reconoce que ni f ni g tienen inversa.

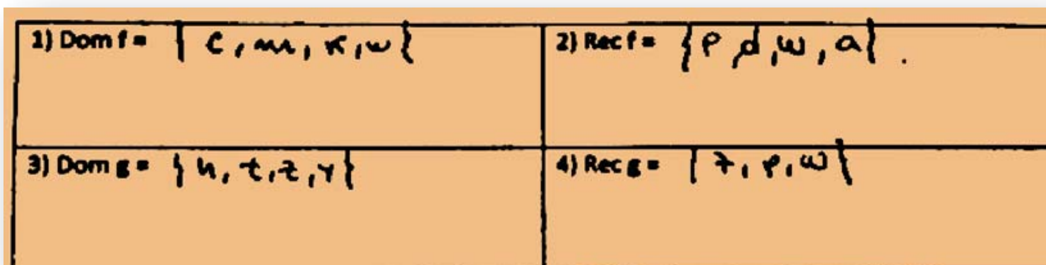
B) Determina:



1) Dom f = {c, m, k, w}	2) Rec f = {p, d, w, a}
3) Dom g = {h, t, z, y}	4) Rec g = {7, p, w}

P

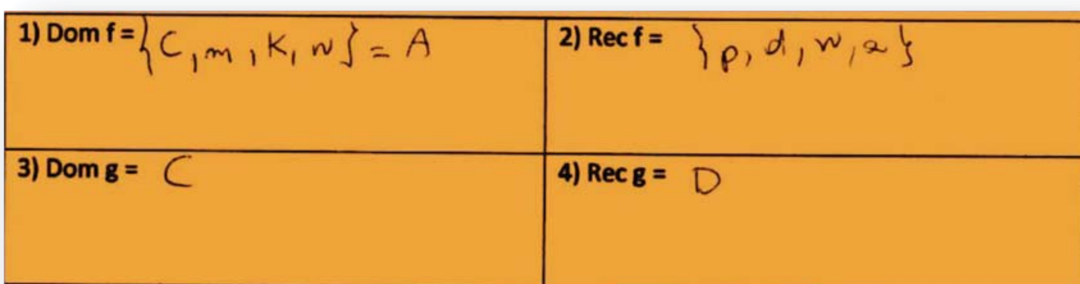
***Figura 245*: Respuesta informante 12, actividad 3.B)**



1) Dom f = {c, m, k, w}	2) Rec f = {p, d, w, a}
3) Dom g = {h, t, z, y}	4) Rec g = {7, p, w}

P

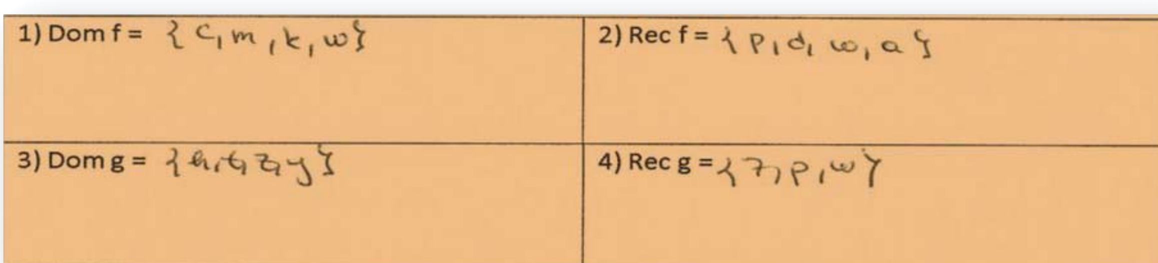
***Figura 246*: Respuesta informante 13, actividad 3.B)**



1) Dom f = {C, m, K, w} = A	2) Rec f = {p, d, w, a}
3) Dom g = C	4) Rec g = D

P

***Figura 247*: Respuesta informante 14, actividad 3.B)**



1) Dom f = {c, m, k, w}	2) Rec f = {p, d, w, a}
3) Dom g = {h, t, z, y}	4) Rec g = {7, p, w}

P

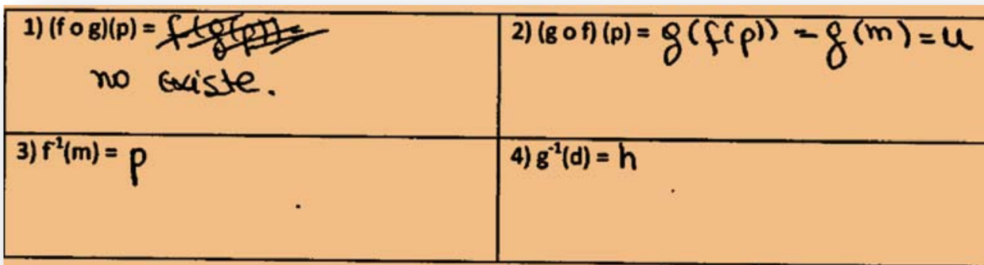
***Figura 248*: Respuesta informante 15, actividad 3.B)**

Todos los informantes muestran una construcción mental proceso del dominio y el recorrido de una función.

Actividad 4:

Omitiremos los diagramas, ya que han sido presentados en el mismo cuestionario de los casos 1 y 2.

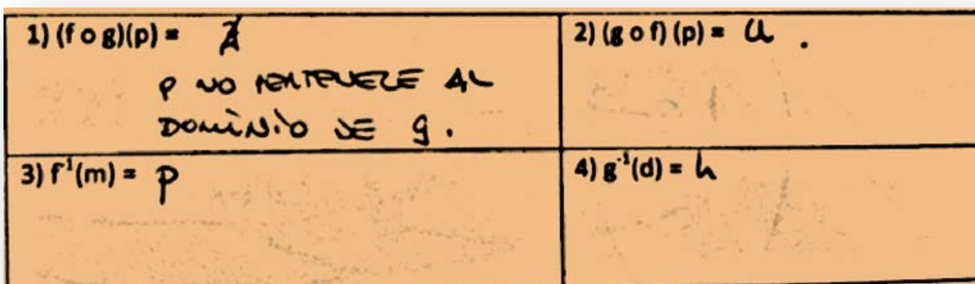
Determina:



1) (f o g)(p) = ~~f(g(p))~~ no existe.	2) (g o f) (p) = g(f(p)) = g(m) = u
3) f^{-1}(m) = p	4) g^{-1}(d) = h

P

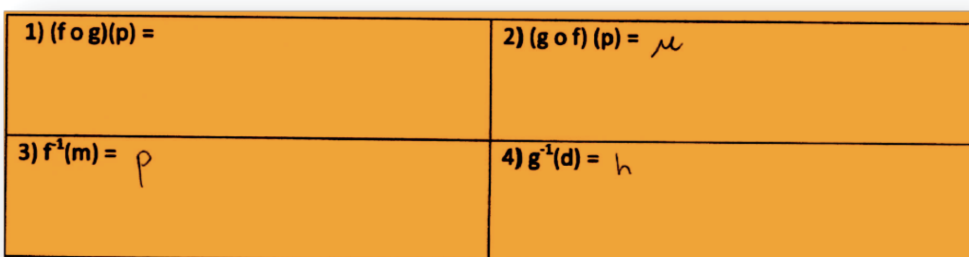
***Figura 249*: Respuesta informante 12, actividad 4**



1) (f o g)(p) = ∄ p no pertenece al dominio de g.	2) (g o f) (p) = u.
3) f^{-1}(m) = p	4) g^{-1}(d) = h

P

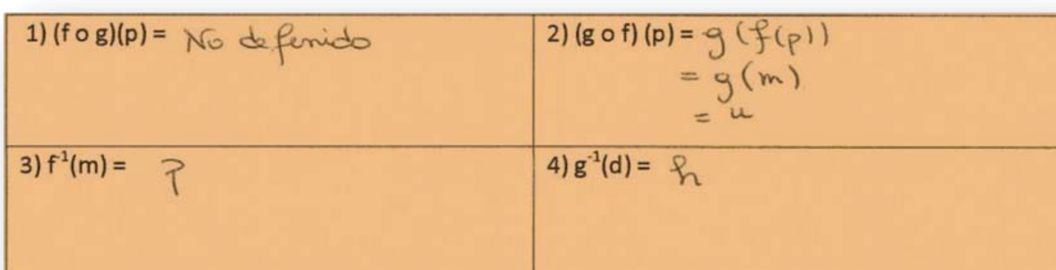
***Figura 250*: Respuesta informante 13, actividad 4**



1) (f o g)(p) =	2) (g o f) (p) = u
3) f^{-1}(m) = p	4) g^{-1}(d) = h

A – P

***Figura 251*: Respuesta informante 14, actividad 4**



1) (f o g)(p) = No definido	2) (g o f) (p) = g(f(p)) = g(m) = u
3) f^{-1}(m) = p	4) g^{-1}(d) = h

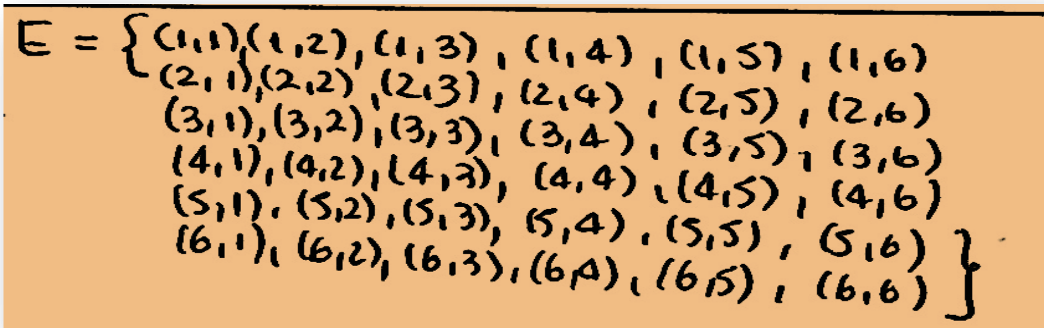
P

***Figura 252*: Respuesta informante 15, actividad 4**

I14 no contesta sobre el resultado de (fog), aunque reconoce la función inversa en f y en g. Los demás informantes muestran una concepción proceso de la función compuesta e inversa.

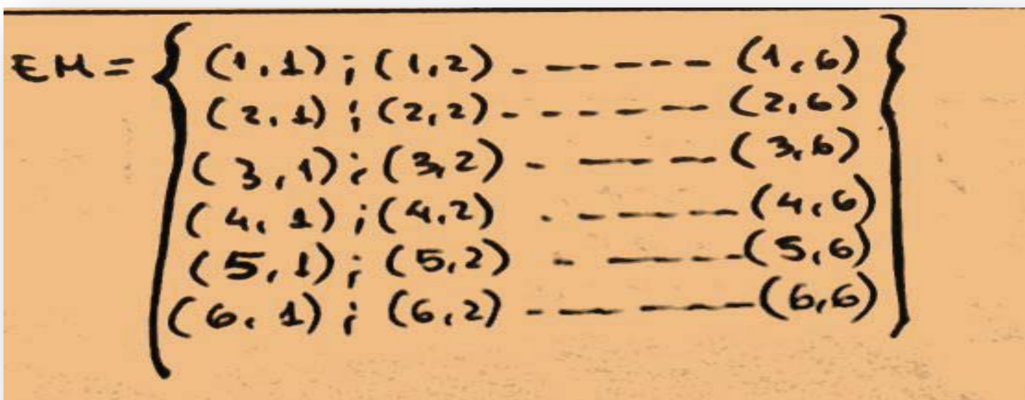
Actividad 5: Considera el experimento de lanzar dos dados de 6 caras, no cargados.

A) Escribe el espacio muestral del experimento.



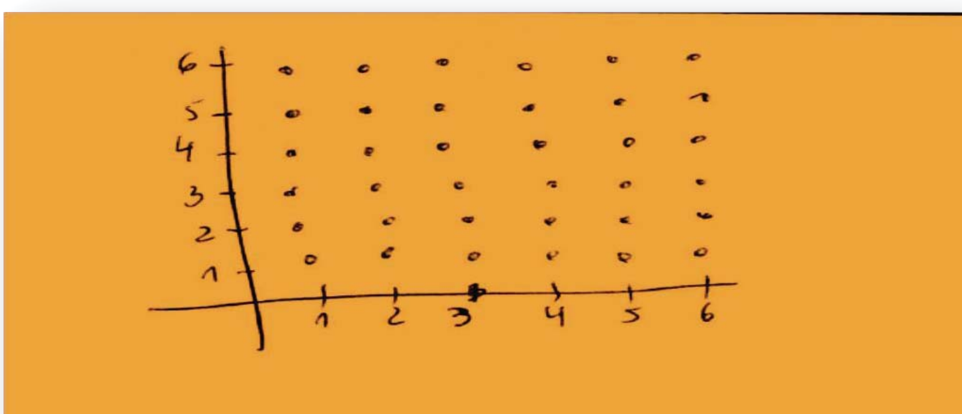
P

Figura 253: **Respuesta informante 12, actividad 5. A)**



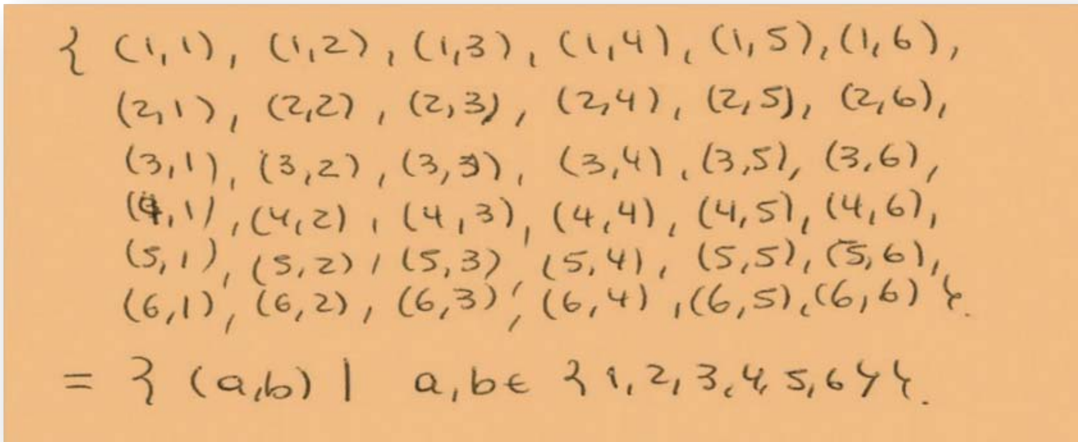
P

Figura 254: **Respuesta informante 13, actividad 5. A)**



P

Figura 255: **Respuesta informante 14, actividad 5. A)**

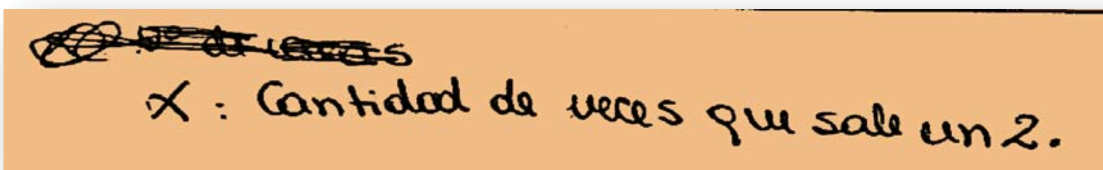

$\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),$
$(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),$
$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),$
$(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),$
$(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),$
$(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}.$
$= \{(a,b) \mid a,b \in \{1,2,3,4,5,6\}\}.$

P

***Figura 256*: Respuesta informante 15, actividad 5. A)**

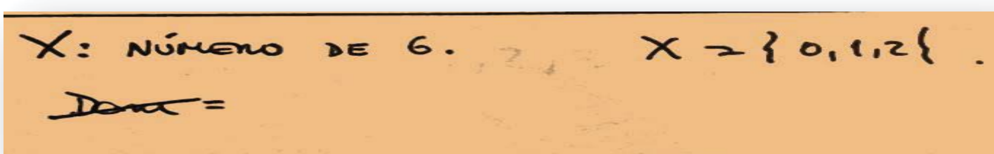
Todos los informantes determinan el espacio muestral del experimento aleatorio.

B) Define una variable aleatoria para el experimento anterior.


X : Cantidad de veces que sale un 2.

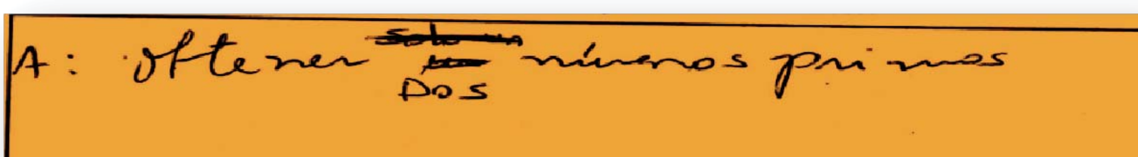
P

***Figura 257*: Respuesta informante 12, actividad 5. B)**


X: NÚMERO DE 6. X = {0,1,2}.
~~Dom~~ =

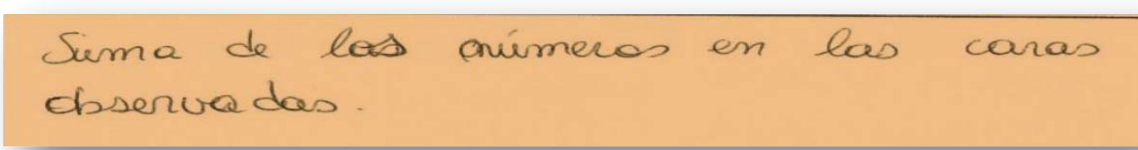
P

***Figura 258*: Respuesta informante 13, actividad 5. B)**


A: obtener ~~solo~~ ~~un~~ Dos números primos

S C

***Figura 259*: Respuesta informante 14, actividad 5. B)**

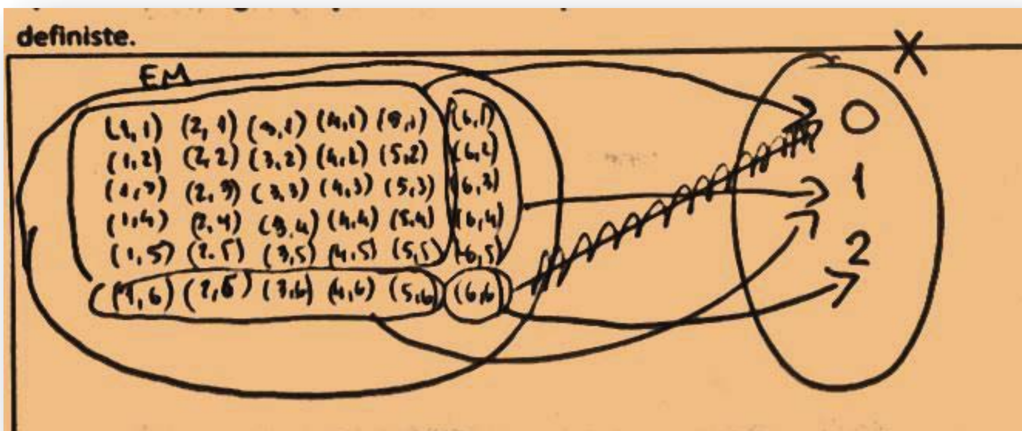

Suma de los números en las caras observadas.

P

***Figura 260*: Respuesta informante 15, actividad 5. B)**

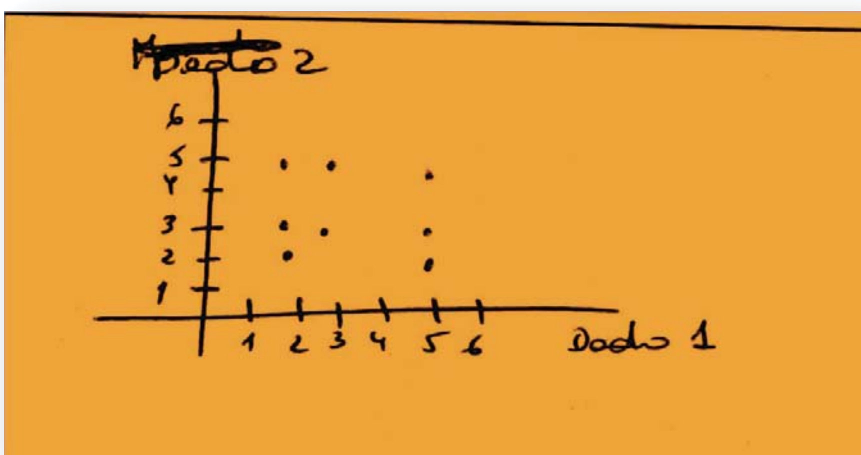
I14 confunde la variable aleatoria con suceso, mientras que los demás informantes la definen de manera "aceptable" y la relacionan con el espacio muestral, aunque no la mencionan como función, en las pregunta anterior habían mencionado que la variable aleatoria era una función.

C) Diseña un diagrama que relacione el espacio muestral del experimento con la variable aleatoria que definiste.



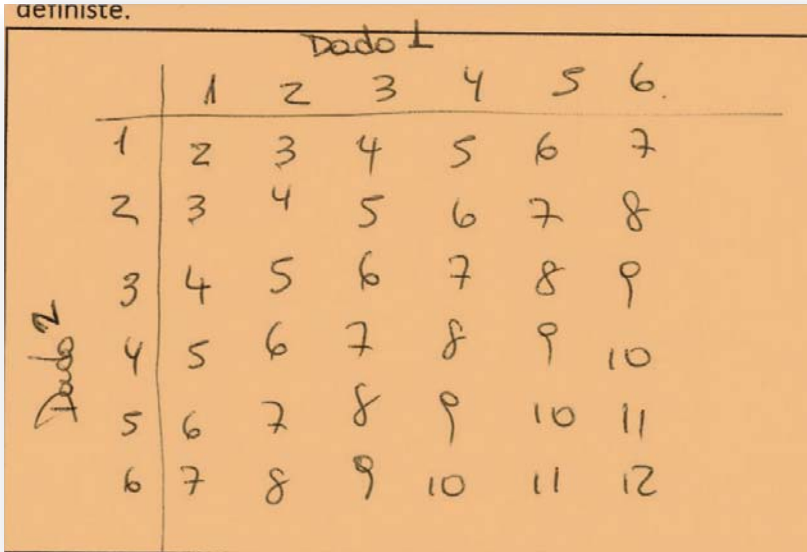
P

Figura 261: **Respuesta informante 13, actividad 5. C)**



S C

Figura 262: **Respuesta informante 14, actividad 5. C)**



definiste.

	Dado 1					
Dado 2	1	2	3	4	5	6.
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

S C

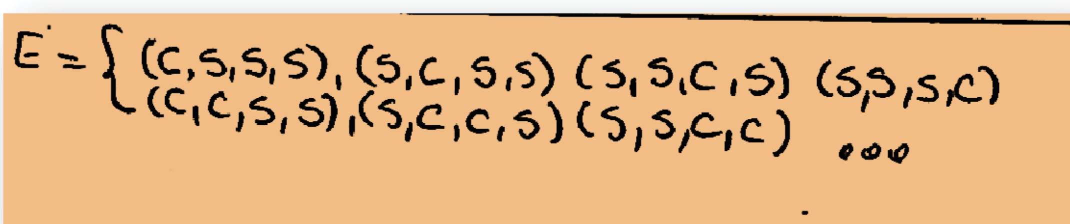
***Figura 263*: Respuesta informante 15, actividad 5. C)**

El informante 12 no contesta. ⟶ S C

En esta respuesta I13 responde mostrando una relación entre los elementos del dominio con los valores de la variable aleatoria o su recorrido, por lo tanto coordina los procesos variable aleatoria y función. I15 realiza un diagrama que resume los casos posibles, pero no da en su respuesta una relación manifiesta entre los elementos del dominio y los de la variable aleatoria. I14 responde con un diagrama que resume los elementos del espacio muestral, pero no los relaciona. I12 no contesta.

<u>Actividad 6</u>: Sea el experimento aleatorio: "Lanzamiento de 4 monedas".

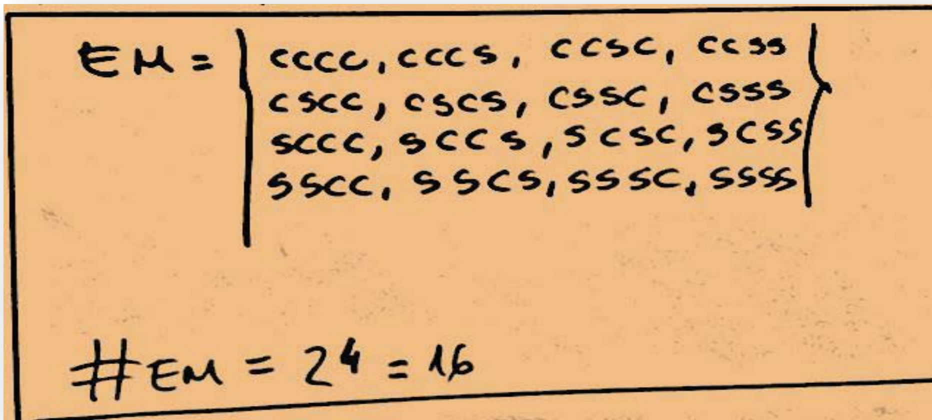
A) Determina el espacio muestral.



E = { (C,S,S,S), (S,C,S,S) (S,S,C,S) (S,S,S,C)
(C,C,S,S),(S,C,C,S) (S,S,C,C) ...

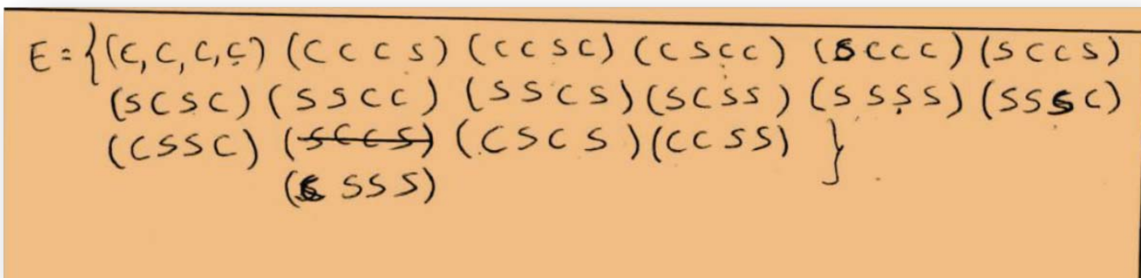
P

***Figura 264*: Respuesta informante 12, actividad 6. A)**



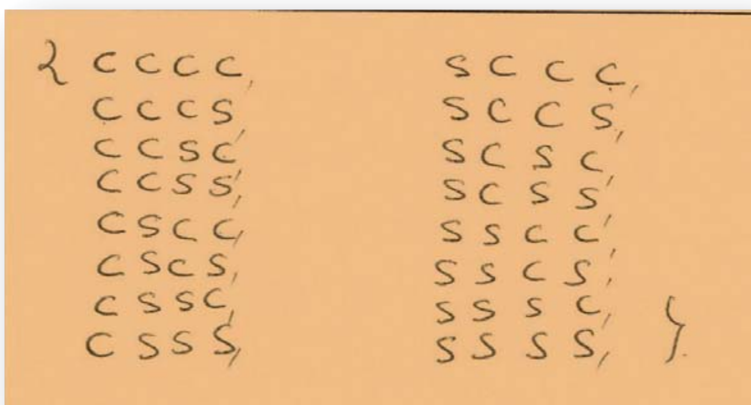
P

Figura 265: **Respuesta informante 13, actividad 6. A)**



P

Figura 266: **Respuesta informante 14, actividad 6. A)**



P

Figura 267: **Respuesta informante 15, actividad 6. A)**

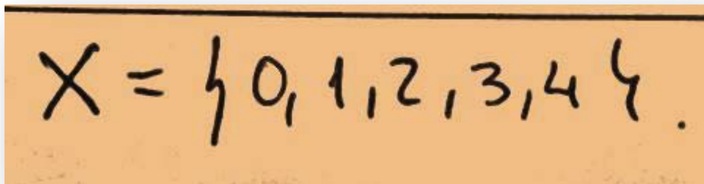
Respuestas de los informantes, en las que todos determinan el espacio muestral, aunque I12 lo abrevia, supondremos que lo determinó correctamente.

B) Determina la variable aleatoria: “Número de caras que se obtienen”.


?

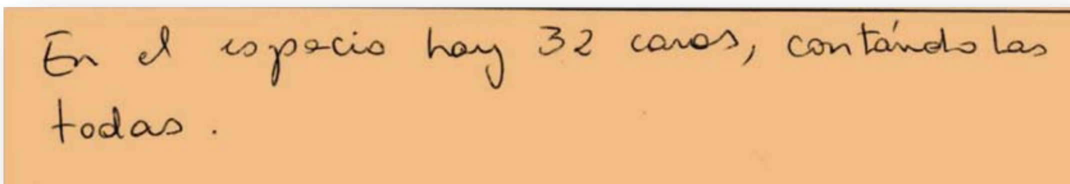
S C

***Figura 268*: Respuesta informante 12, actividad 6. B)**


$X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

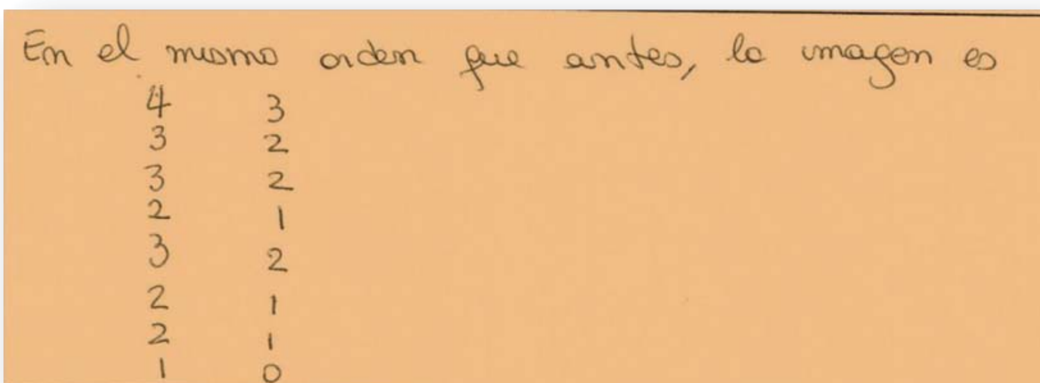
A – P

***Figura 269*: Respuesta informante 13, actividad 6. B)**


En el espacio hay 32 caras, contándolas todas.

S C

***Figura 270*: Respuesta informante 14, actividad 6. A)**


En el mismo orden que antes, la imagen es

4	3
3	2
3	2
2	1
3	2
2	1
2	1
1	0

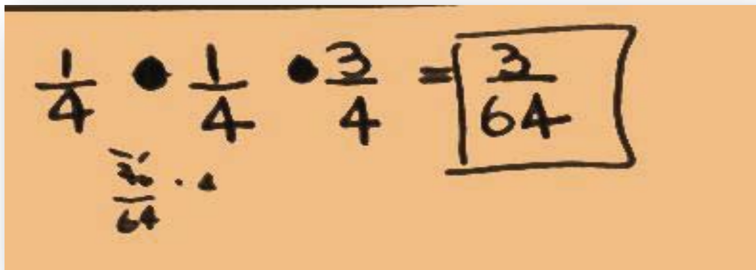
A – P

***Figura 271*: Respuesta informante 15, actividad 6. A)**

I13 e I15 entregan como respuestas los valores de la variable aleatoria o el recorrido de ella, pero ninguno de ellos establece la relación o no lo ve necesario, como sí lo estimamos en este trabajo, dado que quizás sea la causa del problema, el nunca declarar a las variables aleatorias como funciones.

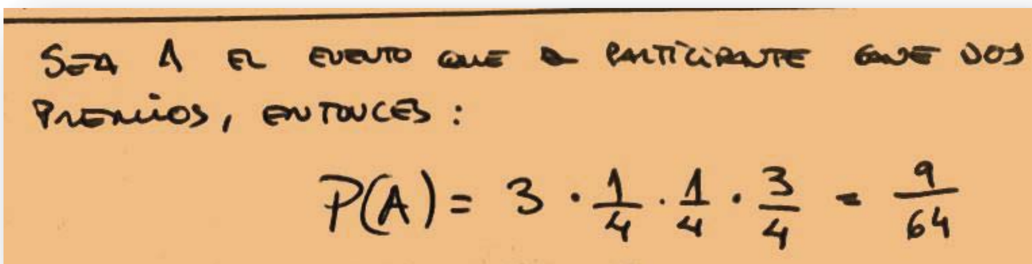
Actividad 7: En un programa de televisión los concursantes hacen girar una flecha en una ruleta como en la figura y cada vez que la flecha se detiene en la zona de color rojo, se gana un premio y el concurso se trata de hacer girar la flecha 3 veces.
En base a esta situación responde las siguientes preguntas:

A) ¿Cuál es la probabilidad de que un participante gane dos premios?



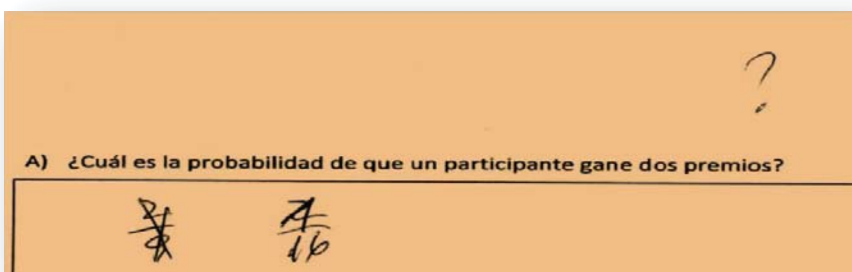
A – P

***Figura 272*: Respuesta informante 12, actividad 7. A)**



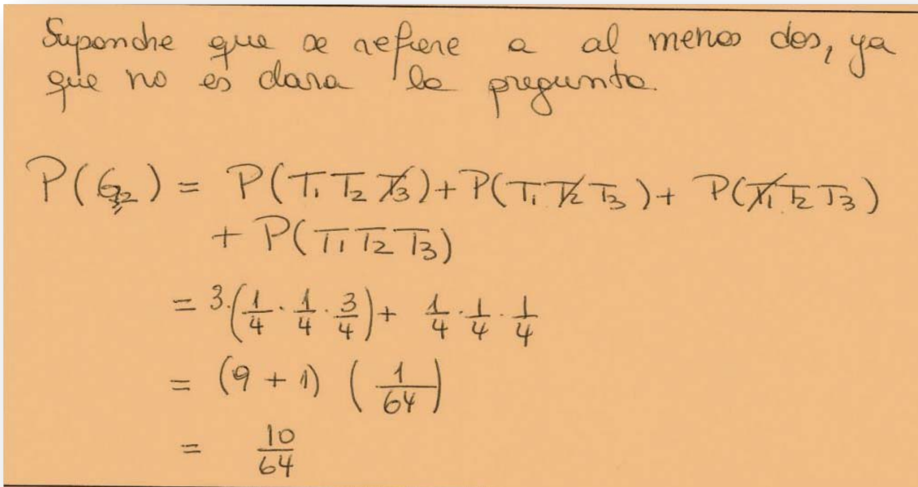
P

***Figura 273*: Respuesta informante 13, actividad 7. A)**



S C

***Figura 274*: Respuesta informante 14, actividad 7. A)**

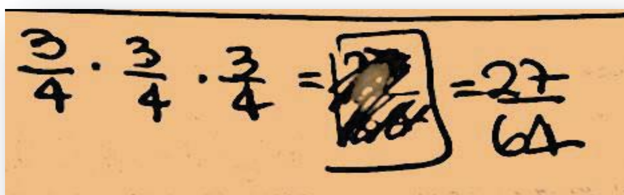


P

Figura 275: **Respuesta informante 15, actividad 7. A)**

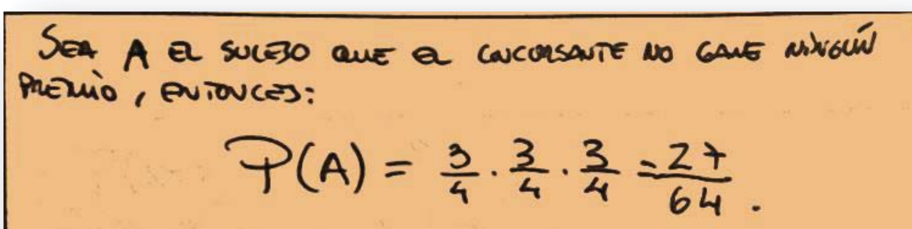
I13 e I15 muestran una construcción proceso de la variable aleatoria y además coordinan los procesos variable aleatoria con la función compuesta.

B) ¿Cuál es la probabilidad de que un concursante no gane ningún premio?



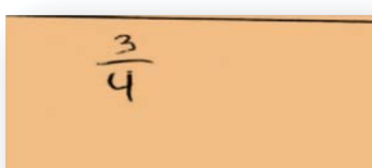
P

Figura 276: **Respuesta informante 12, actividad 7. B)**



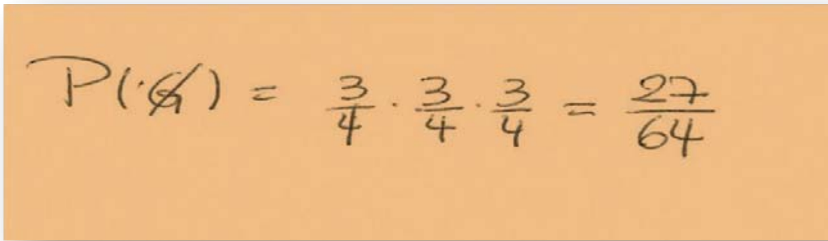
P

Figura 277: **Respuesta informante 13, actividad 7. B)**



S C

Figura 278: **Respuesta informante 14, actividad 7. B)**



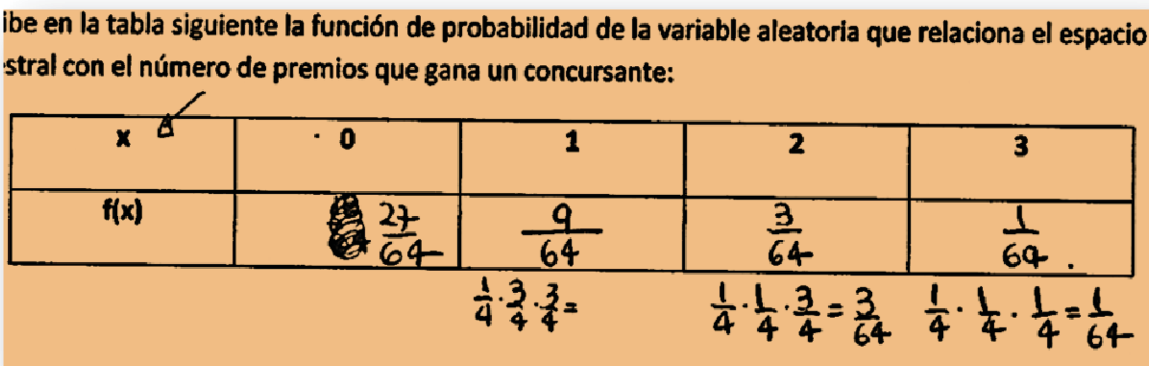
$P(\cancel{G}) = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{27}{64}$

P

Figura 279: **Respuesta informante 15, actividad 7. B)**

En esta pregunta no se aprecia necesariamente si la construcción mental buscada está o no en la mente de los informantes, ya que es un suceso repetido que no tiene permutaciones o las permutaciones dan el mismo suceso. Consideraremos que esta pregunta arroja información del proceso probabilidades y sus propiedades. I14 no muestra esta construcción.

C) Escribe en la tabla siguiente la función de probabilidad de la variable aleatoria que relaciona el espacio muestral con el número de premios que gana un concursante:



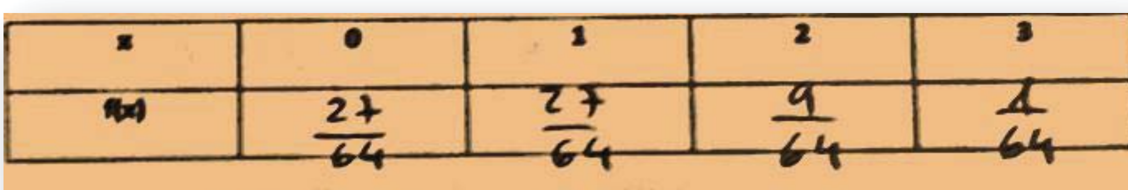
ibe en la tabla siguiente la función de probabilidad de la variable aleatoria que relaciona el espacio stral con el número de premios que gana un concursante:

x	0	1	2	3
f(x)	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{64}$

$\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=$ $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{64}$ $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{64}$

A – P

Figura 280: **Respuesta informante 12, actividad 7. C)**



x	0	1	2	3
f(x)	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

O

Figura 281: **Respuesta informante 13, actividad 7. C)**

x	0	1	2	3
f(x)	3/4	1/4	1/16	1/64

?

S C

Figura 282: **Respuesta informante 14, actividad 7. C)**

x	0	1	2	3
f(x)	27/64	27/64	9/64	1/64

O

Figura 283: **Respuesta informante 15, actividad 7. C)**

I13 e I15 muestran una coordinación entre los procesos y una encapsulación a través de los procesos función compuesta y probabilidades en el objeto variable aleatoria con probabilidad.

<u>Actividad 8</u>: En una tornería se clasifican los tornillos en defectuosos y en no defectuosos y generalmente se encuentran un 10% de los tornillos defectuosos. Si un experimento consiste en sacar 3 tornillos al azar y se define la variable aleatoria X: "Número de tornillos defectuosos". Determina:

A) P(X = 2)

A) P(X = 2)

10 % → defectuosos

10 % de 3

→ $\frac{2}{3}$

S C

Figura 284: **Respuesta informante 12, actividad 8. A)**

$$P(x=2) = 3\left(\frac{1}{10}\right)^2\left(\frac{9}{10}\right)$$
$$= 3\,\frac{1}{100}\cdot\frac{9}{10}.$$
$$= \frac{27}{1000}$$

P

Figura 285: **Respuesta informante 13, actividad 8. A)**

$$= \cancel{\frac{1}{100}}$$

$$P(X=2) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100} \qquad ?$$

S C

***Figura 286*: Respuesta informante 14, actividad 8. A)**

$$B(3; 2; 0.1) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot \frac{9}{10} = \frac{27}{1000}$$

P

***Figura 287*: Respuesta informante 15, actividad 8. A)**

I13 e I15 muestran una construcción mental proceso de la variable aleatoria.

B) Si P(X = n) = 0,243, ¿cuál es el valor de n? Justifica tu respuesta.

$$\frac{n}{3} = 0{,}243 \iff n = 3 \cdot 0{,}243 = 0{,}729$$

$$n = 1 \qquad ¿?$$

S C

***Figura 288*: Respuesta informante 12, actividad 8. B)**

$$P(x=1) = 3\left(\frac{9}{10}\right)^2\left(\frac{1}{10}\right)$$

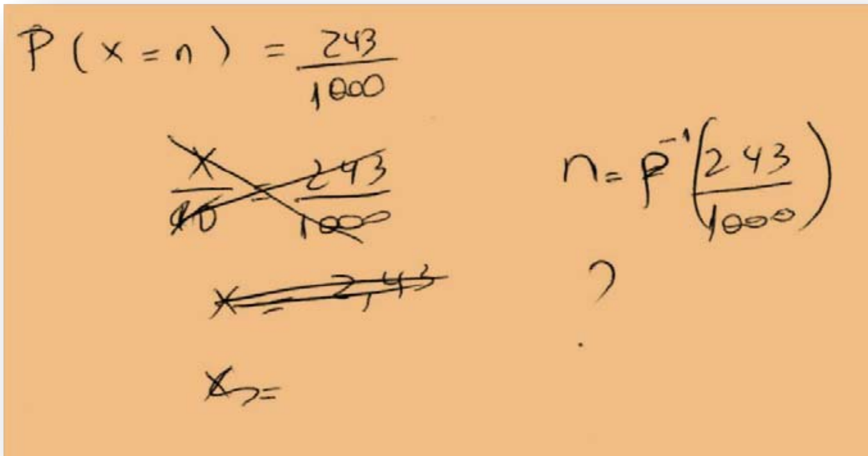
$$= 3 \cdot \frac{81}{100} \cdot \frac{1}{10}$$

$$= \frac{243}{1000}$$

$$= 0{,}243 \quad // \quad \boxed{n = 1}$$

O

***Figura 289*: Respuesta informante 13, actividad 8. B)**



$$P(x=n) = \frac{243}{1000}$$

$$\cancel{\frac{x}{10} = \frac{243}{1000}}$$

$$\cancel{x = 2{,}43}$$

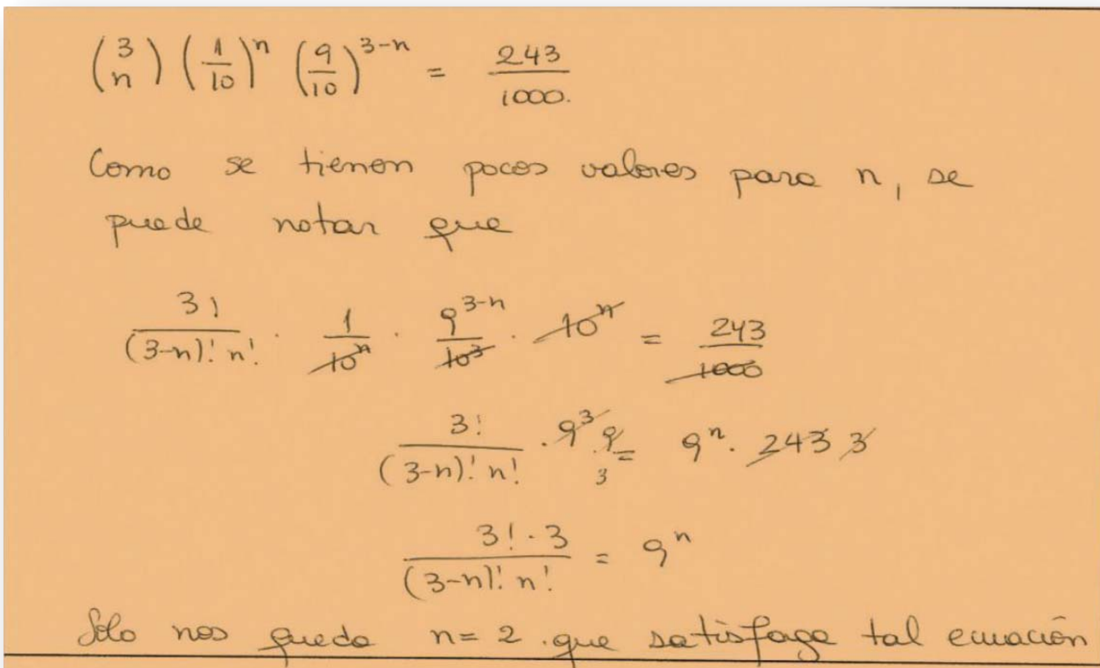
$$x_7 =$$

$$n = P^{-1}\left(\frac{243}{1000}\right)$$

?

S C

Figura 290: **Respuesta informante 14, actividad 8. B)**



$$\binom{3}{n}\left(\frac{1}{10}\right)^n\left(\frac{9}{10}\right)^{3-n} = \frac{243}{1000}.$$

Como se tienen pocos valores para n, se puede notar que

$$\frac{3!}{(3-n)!\,n!}\cdot\frac{1}{\cancel{10^n}}\cdot\frac{9^{3-n}}{\cancel{10^3}}\cdot\cancel{10^n} = \frac{243}{\cancel{1000}}$$

$$\frac{3!}{(3-n)!\,n!}\cdot 9^3\,\frac{9}{3} = 9^n\cdot 243\,3$$

$$\frac{3!\cdot 3}{(3-n)!\,n!} = 9^n$$

Solo nos queda n= 2 .que satisfaga tal ecuación

A – P

Figura 291: **Respuesta informante 15, actividad 8. B)**

I13 muestra una encapsulación de los procesos función inversa y probabilidades en el objeto variable aleatoria. I15 trata de llegar a la respuesta de una manera algebraica, más que de una manera analítica, lo que da luces del énfasis en lo algebraico de nuestra enseñanza.

1.2 Análisis por informante

Cuadro resumen de las construcciones mentales mostradas por los informantes del caso 1

A: Acción P: Proceso O:Objeto A – P: En camino a proceso

S C: Sin construcción

***Tabla 2*: Resumen caso 1**

Actividad	Informante 1	Informante 2	Informante 3	Informante 4	Informante 5
1. A	P	P	P	P	P
1. B	P	P	P	P	P
1. C	S C	A-P	A-P	A-P	A-P
1. D	S C	A-P – SC	A-P – SC	A-P – SC	A-P – SC
2. A	A-P	A-P	A-P	S C	A-P
2. B	A-P	S C	S C	S C	A-P
3. A	A-P	A-P	A-P	S C	A-P
3. B	P	S C	S C	S C	P
4	S C	A-P	S C	S C	S C
5. A	P	A-P	P	A-P	P
5. B	S C	A-P	A-P	A-P	A-P
5. C	S C	S C	S C	S C	S C
6. A	P	A-P	P	A-P	P
6. B	S C	S C	S C	S C	S C
7. A	S C	S C	S C	S C	S C
7. B	S C	S C	S C	S C	S C
7. C	S C	S C	S C	S C	S C
8. A	A-P	S C	S C	S C	S C
8. A	S C	S C	S C	S C	S C

Como podemos apreciar ninguno de los informantes de este caso evidencian una construcción mental de la variable aleatoria con probabilidad.
Al no poder construir los procesos de probabilidades y los de funciones, no se evidencia tampoco coordinación entre algunos procesos que estén en camino a construirse, con la variable aleatoria con probabilidad. En general tienen problemas serios con los conceptos involucrados en el cuestionario y se evidencia una falta de tratamiento de estos contenidos en las aulas.

Cuadro resumen de las construcciones mentales mostradas por los informantes del caso 2

A: Acción P: Proceso O:Objeto A – P: En camino a proceso

S C: Sin construcción

***Tabla 3*: Resumen caso 2**

Actividad	Informante 6	Informante 7	Informante 8	Informante 9	Informante 10	Informante 11
1. A	P	P	P	P	P	P
1. B	P	P	P	P	P	P
1. C	A-P	P	A-P	A-P	A-P	P
1. D	A-P Y SC	A-P	P	A-P	A-P Y SC	P
2. A	P	P	P	P	SC	A-P
2. B	A-P	A-P	A-P	A-P	S-C	A-P
3. A	A-P	A-P	A-P	A-P	A-P	A-P
3. B	P	P	P	A-P	P	P
4	P	A-P	P	A-P	A-P	P
5. A	P	P	P	A-P	A-P	P
5. B	A-P	P	A-P	SC	SC	P
5. C	SC	P	SC	SC	SC	P
6. A	P	P	P	P	A-P	P
6. B	A-P	A-P	A-P	SC	A-P	A-P
7. A	A-P	A-P	P	A-P	SC	P
7. B	P	SC	P	P	P	P
7. C	A-P	SC	O	A-P	SC	O
8. A	A-P	A-P	P	P	P	P
8. B	SC	SC	SC	SC	SC	O

El informante 11 logra encapsular los procesos y las coordinaciones necesarias en el objeto variable aleatoria con probabilidad ya que muestra las construcciones mentales con los conceptos mencionados en la DG. El informante 8 logra encapsular en la variable aleatoria con probabilidad, pese a no mostrar todas las construcciones mentales que la DG sugiere; sin embargo no logra encapsular el proceso función inversa en el objeto variable aleatoria.

Como podemos apreciar, en general, en los estudiantes de enseñanza superior (universitaria) de pedagogía en matemática no existe una concepción objeto de la variable aleatoria con probabilidad.

Cuadro resumen de las construcciones mentales mostradas por los informantes del caso 3

A: Acción P: Proceso O:Objeto A – P: En camino a proceso

S C: Sin construcción

***Tabla 4*: Resumen caso 3**

Actividad	Informante 12	Informante 13	Informante 14	Informante 15
1. A	A-P	P	P	P
1. B	A-P	A-P	P	P
1. C	A-P	P	A-P	P
1. D	A-P SC	P	A-P	P
2. A	P	P	P	P
2. B	A-P	P	A-P	P
3. A	A-P	A-P	A-P	P
3. B	P	P	P	P
4	P	P	A-P	P
5. A	P	P	P	P
5. B	P	P	SC	P
5. C	SC	P	SC	SC
6. A	P	P	P	P
6. B	SC	A-P	SC	A-P
7. A	A-P	P	SC	P
7. B	P	P	SC	P
7. C	A-P	O	SC	O
8. A	SC	P	SC	P
8. B	SC	O	SC	A-P

El informante 13 evidencia una encapsulación de los procesos de probabilidades, función compuesta, función inversa en el objeto variable aleatoria con probabilidad, mostrando las construcciones mentales y conceptuales de la DG. El informante 15 encapsula los procesos de probabilidades, de función compuesta, pero no el de función inversa en el objeto variable aleatoria con probabilidad, quizás llevado por la tendencia de nuestra enseñanza a obtener soluciones a los problemas matemáticos, siempre con procedimientos algebraicos.
La mitad de los profesores de este caso muestran una concepción objeto, lo cual podría ser en efecto una explicación a los resultados del caso 1.

CAPÍTULO VI: CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS DIDÁCTICAS

Como se ha manifestado en los análisis, los estudiantes de enseñanza media, los estudiantes de pedagogía y los profesores del sistema educativo no logran una concepción objeto de la variable aleatoria con probabilidad, lo que da pie a una situación compleja para la enseñanza de este concepto.
Es bastante preocupante, el hecho de que la mayoría de los estudiantes de pedagogía en matemática y la mitad de los profesores de este estudio, no muestren las construcciones mentales necesarias, ya que es quizás una de las explicaciones al poco tratamiento de este objeto matemático en las aulas chilenas. Es necesario y urgente por lo mismo que estos conceptos estén bien construidos en la mente de los estudiantes de pedagogía y también en la de los profesores que imparten clases en el sistema educativo de Chile.
Como ya se ha dicho la estadística está presente en prácticamente todos los ámbitos del conocimiento y su desarrollo y aprendizaje a nivel superior, depende en gran medida de que los estudiantes tengan las construcciones mentales que se requieren.

De acuerdo a los resultados, se considera al modelo presentado como un modelo válido de construcciones mentales del objeto variable aleatoria con probabilidad. Los informantes que mostraron las construcciones mentales objeto para la variable aleatoria con probabilidad, lo hicieron siguiendo el camino propuesto por la DG.

Los análisis epistemológicos dan luces de un avance en la teoría de la probabilidad en la ausencia de la variable aleatoria como función, el cual se ha dado en los últimos 100 años solamente, tiempo no tan grande para la historia y para el desarrollo de los conceptos matemáticos en general.
La "desgracia del nombre" es un fenómeno didáctico tomando en cuenta la forma de enseñanza de las funciones y de las variables cuando estas son deterministas; a esto hay que agregar que en las escuelas además se deja de lado en general las unidades de estadística o se dejan para la última parte del año escolar, quedando muchas veces sin tratarse los contenidos necesarios.

De acuerdo a los resultados, la tendencia en Chile es que la variable aleatoria, sea tratada bajo un paradigma de magnitud aleatoria, lo que trae como consecuencia obstáculos para su construcción.

La investigación tomó el nombre de: "variable aleatoria con probabilidad" por el hecho de que mientras se hacían los análisis teóricos llegamos a la conclusión de que la variable aleatoria no necesita de la probabilidad para que esta sea tal, solo basta un experimento aleatorio, para que sea el dominio de ésta y la relación que se quiera hacer para asignarle un número real a los elementos de ese dominio. Esta situación nos hace reflexionar en torno a cómo enseñamos los objetos matemáticos que enseñamos en el aula y además entrega ideas de cómo poder abordarlo en el aula.

Esta investigación se presenta, además como un modelo de enseñanza, por el énfasis dado en la determinación de diagramas para relacionar la variable aleatoria con las funciones y además como un ente comunicador de la serie de problemáticas aquí expuestas.

En una futura etapa se realizarán actividades con ejercicios de discusión en clase (Ciclo ACE) con el fin de que los resultados de esta investigación lleguen a las aulas y aportar en que puedan construir la variable aleatoria con probabilidad.

Queda de manifiesto la relación que se puede lograr de acuerdo a los antecedentes empíricos de esta investigación, con la función de distribución binomial. Esto queda abierto para futuras investigaciones.

Como también ha sido manifestado, los cambios en el currículum han traído la variable aleatoria hasta las aulas, cuestión que para un profesor quizás podría ser una imposición más del sistema, o una locura más de alguien, sin embargo, se hace necesario reflexionar en torno a las siguientes interrogantes, para poseer como docentes el convencimiento necesario que la enseñanza de este objeto matemático requiere: ¿Hasta qué punto debiera abarcar el concepto de variable aleatoria, en el currículum escolar?
¿Por qué debiéramos enseñar variable aleatoria, es decir, como país, que queremos lograr con la enseñanza de este objeto matemático?

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Asiala, M., Brown, A., Devries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, Schoenfeld, Dubinsky (Ed.s) *Research in Collegiate Mathematics Education*. Vol.2. Providence, RI: American Mathematical Society. p.1-32.

Dubinsky, E (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, in (D. Tall, ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht: Kluwer, 95-126.

Evans, M. & Rosenthal, J. (2005). Probability and statistics. The Science of Uncertainty. W. H. Freeman and Company, New York and Basingstoke.

Loève M. (1976). Teoría de la Probabilidad, Editorial Tecnos, Madrid.

Mena, A. (2011). Estudio epistemológico del teorema del isomorfismo de grupos. Tesis para obtener el grado de Doctorado en Matemática Educativa (no publicada), Cinvestav, México.

MINEDUC. (2009). Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media, actualización 2009. Santiago, Chile.

Parraguez, M. (2009). *Evolución Cognitiva del Concepto Espacio Vectorial*. Tesis para obtener el grado de Doctora en Matemática Educativa (no publicada), CICATA, México.

Pérez, B. (2012). Una construcción cognitiva del pensamiento aleatorio y determinista a partir de la regresión lineal. Tesis para obtener el grado de Magister en didáctica de la Matemática (no publicada). IMA - PUCV, Chile.

Romagnoli, P. P. *Probabilidades doctas con discos, árboles, bolitas y urnas*. J. C. Sáez Editor, Santiago, 2011.

Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2012). Validación de una descomposición genética de transformación lineal: un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 15(2), 199 – 232.

Ruíz, B. (2006).*Un acercamiento cognitivo y epistemológico a la didáctica del concepto de variable aleatoria.* Tesis de maestría no publicada. CICATA- IPN, México.

Ruiz, P. S., & de las Matemáticas, H. Historia de la Teoría de la Probabilidad.

Salgado, H. (2007), Conteo: una propuesta didáctica y su análisis. Tesis para obtener el grado de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa (no publicada), CICATA, México.

Stake, R. (1998). Investigación con estudio de casos. EDICIONES MORARA. Madrid. España.

Trigueros, M., Reyes, A., Ursini, S., & Quintero, R. (1996). Diseño de un cuestionario de diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en el álgebra. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, Barcelona, Espanha*, *14*(3), 351-364.

Trigueros, M. y Oktac, A. (2005). La Théorie APOS et l'enseignement de l'algebre linéaire. *Annales de didactique et de sciences cognitves. Revue internationale de didactique des mathematiques,* 10, 157 – 176.

ANEXO I MEDICIÓN INICIAL

MEDICIÓN INICIAL
(DIAGNÓSTICO)

Actividad 1: En un juego de video se gana, se pierde o se empata. La probabilidad de ganar es 0,36 y la de perder es 15 veces la probabilidad de empatar. ¿Cuáles son las probabilidades de empatar y la de perder?

Actividad 2: Se lanza una moneda y un dado. ¿Cuál es la probabilidad de?
A) Que salga un número par y una cara

B) Que salga un 4 en el dado o un sello

C) Que salga una cara o un sello y un número primo en el dado

Actividad 3: Un jugador de basketball, que suele encestar el 70% de sus tiros, tiene que realizar un lanzamiento. Si el jugador acierta el primer tiro, puede repetir el lanzamiento. Por lo tanto, es posible que consiga 0 puntos (fallando el primer lanzamiento), 1 punto (acertando el primero y fallando el segundo) o 2 puntos (acertando ambos lanzamientos). Sea X la variable aleatoria que representa el puntaje obtenido:

a) Calcula $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$

b) ¿Cuál es el puntaje esperado para este jugador?

Actividad 4: ¿Qué es una variable aleatoria?

____
____
____
____

Actividad 5: ¿Qué es una variable determinista?

____
____
____
____

Actividad 6: Un naturalista, apostado en el observatorio de un parque natural, sabe que la probabilidad de avistar una sola vez una especie rara de pájaro en un día cualquiera está en torno al 0,15. Si se quiere determinar la probabilidad de que acudiendo 20 días aviste en total 8 días ese pájaro, ¿cuál será la distribución que deberá de emplear para calcularla? **Justifica tu respuesta.**

Actividad 7: Un profesor aplica a sus alumnos un cuestionario sorpresa formado por tres preguntas tipo test con cuatro alternativas de respuesta, de las cuales solo una es correcta.

1) Si un alumno responde al azar, la función de probabilidad de la variable aleatoria "número de aciertos" es:

A)

X	0	1	2	3
f(x)	0,422	0,422	0,14	0,016

B)

X	0	1	2	3
f(x)	0,422	0,844	0,98	1

C)

X	0	1	2	3
f(x)	0,512	0,384	0,096	0,008

Justifica tu respuesta

2) Para la variable aleatoria "número de aciertos", ¿cuánto vale la expresión F(3) – F(1)?
Justifica tu respuesta

ANEXO II CUESTIONARIO

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Facultad de Ciencias - Instituto de Matemática
Magíster en Didáctica de la Matemática

Cuestionario para documentar las construcciones mentales del Objeto Variable aleatoria

Nombre: ____

Institución: ____

Correo electrónico: ____

Responde las siguientes preguntas con lápiz pasta, sin hacer borrones. Si necesitas borrar algo, solo táchalo.

<u>Actividad 1</u>: Se realiza el experimento de lanzar una moneda y un dado. Cuál es la probabilidad de:

A) Que salga un múltiplo de 3 en el dado y una cara en la moneda.

B) Que salga una cara o un sello en la moneda y un número primo en el dado.

C) Qué salga un 1 en el dado o que salga una cara en la moneda?

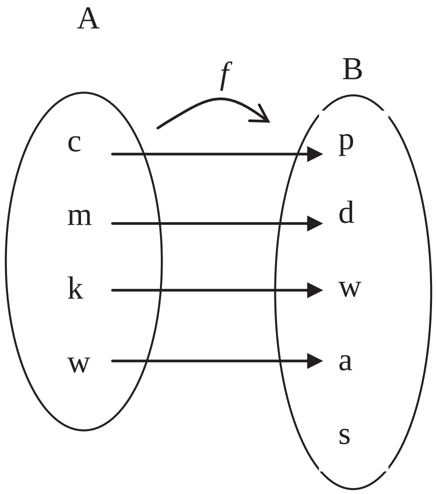
D) Qué no salga un 4 en el dado o que salga un sello en la moneda?

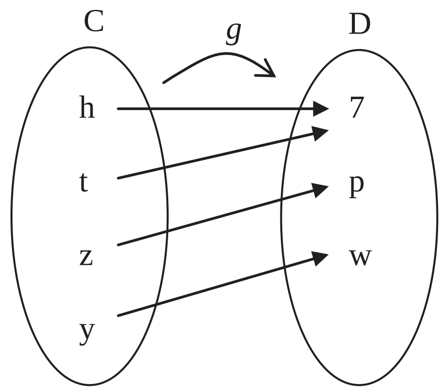
Actividad 2: Responde las siguientes preguntas:

¿Qué es una variable?

¿Qué es una variable aleatoria?

<u>Actividad 3</u>: Observa las siguientes representaciones de funciones:





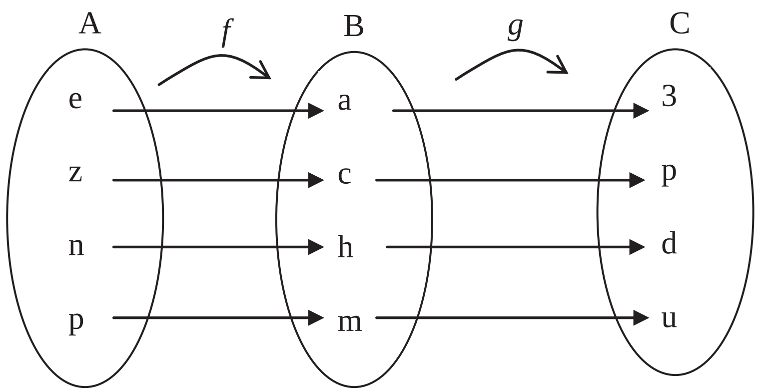
A) Determina:

1) $f(k) =$	2) $f(w) =$	3) $g^{-1}(w) =$
4) $g(y) =$	5) $g(t) =$	6) $f^{-1}(s) =$

B) Determina:

1) Dom f =	2) Rec f =
3) Dom g =	4) Rec g =

Actividad 4: Observa las siguientes representaciones de funciones:



Determina:

1) (f o g)(p) =	2) (g o f) (p) =
3) f^{-1}(m) =	4) g^{-1}(d) =

Actividad 5: Considera el experimento de lanzar dos dados de 6 caras, no cargados.

A) Escribe el espacio muestral del experimento.

B) Define una variable aleatoria para el experimento anterior.

C) Diseña un diagrama que relacione el espacio muestral del experimento con la variable aleatoria que definiste.

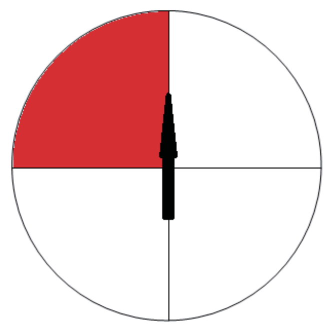
<u>Actividad 6</u>: Sea el experimento aleatorio: “Lanzamiento de 4 monedas”.

A) Determina el espacio muestral.

B) Determina la variable aleatoria: “Número de caras que se obtienen”.

<u>Actividad 7</u>: En un programa de televisión los concursantes hacen girar una flecha en una ruleta como en la figura y cada vez que la flecha se detiene en la zona de color rojo, se gana un premio y el concurso se trata de hacer girar la flecha 3 veces.

En base a esta situación responde las siguientes preguntas:



A) ¿Cuál es la probabilidad de que un participante gane dos premios?

B) ¿Cuál es la probabilidad de que un concursante no gane ningún premio?

C) Escribe en la tabla siguiente la función de probabilidad de la variable aleatoria que relaciona el espacio muestral con el número de premios que gana un concursante:

x	**0**	**1**	**2**	**3**
f(x)				

Actividad 8: En una tornería se clasifican los tornillos en defectuosos y en no defectuosos y generalmente se encuentran un 10% de los tornillos defectuosos. Si un experimento consiste en sacar 3 tornillos al azar y se define la variable aleatoria X: "Número de tornillos defectuosos". Determina:

A) $P(X = 2)$

B) Si $P(X = n) = 0,243$, ¿cuál es el valor de n? Justifica tu respuesta.

ANEXO III PARTICIPACIONES EN PONENCIAS

VI Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas

UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

CERTIFICA QUE:

RODRIGO SALAZAR

Asistió en calidad de

PONENTE

Con su presentación: **"LA VARIABLE ALEATORIA DESDE LA PERSPECTIVA APOE"**, con una intensidad de 1/2 hora, dictado en el marco del *VI Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas*, realizado en la Universidad de Medellín los días 7, 8 y 9 de mayo de 2014.

JOSÉ ALBERTO RÚA VÁSQUEZ

LUZ DORIS BOLÍVAR YEPES
Vicerrectora Académica

JOSÉ ALBERTO RÚA VÁSQUEZ
Jefe Departamento
de Ciencias Básicas

XVII JORNADAS
NACIONALES DE
EDUCACIÓN MATEMÁTICA

sochiem

UNIVERSIDAD ALBERTO HURTADO

Sociedad Chilena de Educación Matemática
confiere el presente certificado a

Rodrigo Salazar Bórquez

por haber participado en las XVII Jornadas Nacionales de Educación Matemática como

Ponente

realizada durante los días 5 y 6 de Diciembre de 2013
en la Universidad Alberto Hurtado, Santiago de Chile.

Roberto Vidal Cortés
Presidente Comisión Organizadora
XVII Jornadas Nacionales de Educación Matemática

Arturo Mena Lorca
Presidente Nacional
Sociedad Chilena de Educación Matemática

XXVIII
REUNIÓN LATINOAMERICANA DE
MATEMÁTICA EDUCATIVA
Barranquilla - Colombia

RELME 28
BARRANQUILLA - COLOMBIA

El Comité Latinoamericano de Matemática Educativa y el comité organizador de RELME 28 otorgan el presente certificado a:

RODRIGO SALAZAR BÓRQUEZ

Por su participación en calidad de: Ponente

Del Reporte de Investigación Titulado:

La variable aleatoria desde la perspectiva de la teoría APOE

Barranquilla, del 28 de Julio al 1 de agosto de 2014

Claudia Maria Lara Presidenta CLAME	Blanca Maria Peralta Comité Organizador	Alejandro Urieles Comité Organizador	Jorge Rodriguez Comité Organizador

Clame