PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO

PROGRAMA DE DOCTORADO EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS

TESIS

Para la obtención del grado de
DOCTOR EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Miguel Alejandro Rodríguez Jara

CONSTRUCCIÓN DE LOS ESPACIOS VECTORIALES $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ DESDE LA TEORÍA APOE

Tesis dirigida por

Dra. Marcela Parraguez González
Dra. María Trigueros Gaisman

Valparaíso, Noviembre del 2014.

CHILE

PROYECTO FINANCIADO POR FONDECYT REGULAR No. 1140801

CONICYT
COMISIÓN NACIONAL DE INVESTIGACIÓN
CIENTÍFICA Y TECNOLÓGICA

Agradecimientos

Para la concreción de este trabajo convergieron distintos aspectos, desde distintos planos, que se entrelazaron y permitieron que se plasmara este producto que es el esfuerzo mancomunado de todo un equipo que a continuación se individualiza:

Mi esposa Erika y mis hijas Javiera y Catalina, por la paciencia y el apoyo incondicional en las prolongadas e intensas jornadas de lectura y escritura.

A todos los profesores del Programa por sus aportes y sugerencias, en especial al Dr. Arturo Mena y Dr. Jaime Mena por las iluminaciones hacia los aspectos matemáticos, al Dr. Jorge Soto por compartir su particular mirada de la matemática y cooperar con una entrevista. A la Profesora Luisa Aburto y el Profesor Roberto Johnson por sus valiosos aportes desde la matemática y las entrevistas concedidas. A mis profesoras guías Dra. Marcela Parraguez y Dra. María Trigueros por la paciencia y por sus sabias orientaciones durante el proceso de investigativo.

Al Dr. Salomón Alarcón por sus aportes y su incondicional colaboración. A todos los estudiantes de las tres universidades que desinteresadamente aportaron en esta investigación. A la Dra. María del Valle por encaminarme es esta senda.

A mis compañeros del programa con los que compartimos en distintas instancias durante el proceso formativo: Soledad, Gina, Lino, Marcos, Carolina y Romina. Además agradecer a mi amigo Mauricio Gamboa por las conversaciones sobre la teoría APOE. Finalmente a la Srta. Marisol Sucre por su especial preocupación, como secretaria del programa de Doctorado, para con todos los alumnos del programa.

INDICE

RESUMEN

Esta investigación, ya concluida, se enfocó en documentar la construcción de los conceptos espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y espacio vectorial $\mathbf{R}^3$ desde la teoría APOE. Para ello se diseñaron y documentaron descomposiciones genéticas a la luz del ciclo de investigación que dicha teoría provee. Los aspectos históricos epistemológicos que se consideraron y los diversos antecedentes que se recopilaron procuran sustentar la pertinencia de reconstruir los conceptos en cuestión desde aquellas ideas matemáticas fundamentales, a saber ecuación lineal homogénea (en su sentido amplio), ecuación lineal no homogénea y sus respectivos conjuntos solución. En ese escenario los conceptos previos conjunto, operación binaria así como las geometrías asociadas a $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$, desde ideas elementales como la dilatación y contracción de un segmento dirigido, inciden fuertemente en dicha reconstrucción.

Abordamos la investigación como un estudio de caso múltiple, desde una perspectiva hermenéutica centrada en un objeto matemático, lo que puso de relieve la importancia de elaborar cuestionarios en sintonía con un modelo cognitivo para indagar en aquellas construcciones y mecanismos mentales que son necesarios para la reconstrucción de los conceptos espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$. Allí las entrevistas semiestructuradas permitieron ahondar en aquellos aspectos que los cuestionarios no consideraron o no quedaron explícitos desde los argumentos que manifestaron los estudiantes. Los antecedentes recopilados evidenciaron la importancia de las *construcciones objeto* conjunto solución de una ecuación lineal homogénea y conjunto solución de una ecuación lineal no homogénea en la reconstrucción de los espacios vectoriales en cuestión.

Para finalizar, dentro de los principales resultados destaca la importancia de comenzar la reconstrucción de los conceptos ya aludidos atendiendo a la *construcción acción* asociar números a los términos de una ecuación lineal homogénea y la *construcción acción* asignar un número a una de las incógnitas de una ecuación lineal homogénea, así como las *construcciones proceso* múltiplo escalar de una solución, todas las soluciones, álgebra de soluciones, cartesiano $\mathbf{R}^2$ y cartesiano $\mathbf{R}^3$.

Palabras Clave Ecuación Lineal Homogénea, cartesiano $\mathbf{R}^2$, cartesiano $\mathbf{R}^3$, Descomposición Genética.

SUMMARY

This research, already concluded, is focused on documenting the construction of the concepts of vectorial space $\mathbf{R}^2$ and vectorial space $\mathbf{R}^3$ based on APOS theory. For the above mentioned, genetic decompositions were designed and documented in the light of the research cycle provided by such theory. The epistemologic historical aspects that were considered and the several precedents compiled try to support the approppriateness of reconstructing the concepts in question from those fundamental mathematical ideas, that is to say: homogenous linear equation (in a broad sense), nonhomogenous linear equation and the respective solution sets. In that scenario, the previous concepts: set, binary operation as well as geometries associated to $\mathbf{R}^2$ and $\mathbf{R}^3$, starting from basic ideas like the expansion and contraction of a directed line segment, strongly affect this reconstruction.

We faced the research as a multiple case study, from a hermeneutics perspective focused on a mathematical object, which highlighted the importance of creating questionnaires accordingly with the cognitive models to investigate in those constructions and mental mechanisms that are necessary for the reconstruction of the vectorial space concepts $\mathbf{R}^2$ and $\mathbf{R}^3$. There, the semistructured interviews allowed to go deep is those aspects that the questionnaires did not consider or that were not explicit from the arguments that the students showed. The compiled precedents showed the relevance of the *constructing mental objects*, solution set of a homogenous linear equation and solution set of nonhomogenous linear equation in the reconstruction of the vectorial spaces in question.

Finally, among the main results, it is stressed the importance to begin the reconstruction of the concepts already mentioned paying attention to *constructing mental action* to associate numbers to the terms of an homogenous linear equation and constructing mental action to assign a number to one of the variables of a homogenous linear equation, as well as *constructing mental process*: scalar multiplier of a solution, all the solutions, algebra of solutions, cartesian $\mathbf{R}^2$ and cartesian $\mathbf{R}^3$.

Key Words Homogenous Linear equation, Cartesian $\mathbf{R}^2$ and $\mathbf{R}^3$, Genetic Decomposition.

Glosario

Este glosario contiene tanto términos de la teoría APOE como nociones matemáticas de uso común cuyo sentido se explican a continuación.

Ecuación Lineal Homogénea (ELH), es una relación de igualdad que asocia aditivamente términos, que incluyen incógnitas con sus respectivos coeficientes, con el elemento neutro aditivo (en el desarrollo de este texto).

Ecuación Lineal No Homogénea (ELNH), es una relación de igualdad que asocia aditivamente términos, que incluyen incógnitas con sus respectivos coeficientes, con un elemento que no es el neutro aditivo.

Conjunto Solución de una ELH (CSELH), Conjunto que incluye a todas las soluciones de una ELH.

Cartesiano $\mathbf{R}^2$, es el plano cartesiano provisto de operaciones, no se consideran propiedades de esas operaciones.

Cartesiano $\mathbf{R}^3$, es el espacio cartesiano provisto de operaciones, no se consideran propiedades de esas operaciones.

Plano Cartesiano: Es el plano euclidiano que incorpora coordenadas.

Espacio Cartesiano: Es el espacio euclidiano que incorpora coordenadas.

Descomposición Genética, es un modelo cognitivo que explicita las construcciones y mecanismos mentales que intervienen en la construcción de un concepto matemático.

Acción, es una construcción mental que obedece a estímulos externos.

Proceso, es una construcción mental que obedece a estímulos internos y es dinámica; se puede dar desde la interiorización de una *acción*, de una *coordinación* de dos *procesos*, la reversión de un *proceso* o la *desencapsulación* de un *objeto*.

Objeto, es una construcción mental de una idea que se concibe como un todo. Se construye por la *encapsulación* de un *proceso*.

Encapsulación, es un mecanismo mental que procura que una *construcción proceso* de paso a una *construcción objeto* de un concepto matemático.

Desencapsulación, es un mecanismo que procura volver sobre las construcciones proceso que permitieron la *construcción objeto* de un concepto matemático.

Concepción, es una elaboración intrapersonal de una idea matemática o no.

Concepto, elaboración interpersonal que una comunidad de expertos ha consensuado.

INTRODUCCIÓN

La presente investigación titulada "*Construcción de los espacios vectoriales* $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ *desde la teoría APOE"* da cuenta, desde un estudio de caso múltiple, de la validación y puesta en escena, a través de la aplicación de clases, de un modelo cognitivo que procura, en términos teóricos, modelar la construcción de los conceptos espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$. Para ello se consideró a 19 estudiantes de pregrado de tres universidades chilenas, incorporando la aplicación de cuestionarios y entrevistas. Con los casos 1 y 2, se pudo validar los dos modelos teóricos que se diseñaron para reconstruir, respectivamente, los espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$. Con el caso 3, se documentó la enseñanza para el espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ desde el modelo que se validó, en un aula universitaria, a la luz del ciclo de enseñanza que provee la teoría que sustenta este trabajo.

Los dos modelos cognitivos se diseñaron a la luz el análisis teórico, una de las tres etapas del ciclo metodológico del marco teórico que avala esta indagación. Para ello se consideró un caso de estudio que lo conformaron 5 profesores universitarios que hacen docencia en cursos de álgebra lineal a estudiantes de pregrado. Fundamentalmente, para indagar tanto en las concepciones que los profesores tienen de los conceptos cartesiano $\mathbf{R}^2$ y cartesiano $\mathbf{R}^3$ y su relación con los espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$, así como también aspectos referidos a su enseñanza. Considerando, además, un análisis histórico epistemológico de los conceptos ligados al álgebra lineal, en particular de los conceptos en cuestión.

Para indagar en la construcción cognitiva de los espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$, se consideró como marco teórico a la teoría APOE –Acción, Proceso, Objeto y Esquema– la cual fue desarrollada por Dubinsky en colaboración con el grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Educations Community). Ellos se han abocado al estudio de trozos de conocimiento que demandan un alto nivel de abstracción, donde el concepto de abstracción reflexiva, propuesto por Piaget, resulta clave para interpretar y describir la construcción de un concepto matemático a partir de un modelo cognitivo, la Descomposición Genética (DG). Modelo que explicita y relaciona los mecanismos *interiorización*, *coordinación*, *reversión*, *encapsulación* y *desencapsulación* con las construcciones mentales *acción*, *proceso*, *objeto* y *esquema* que requiere un aprendiz para construir cognitivamente un concepto matemático, lo que se verá más adelante.

Las características del álgebra lineal en cuanto a que formaliza, unifica y generaliza conceptos matemáticos y los desafíos que ello demanda desde un punto de vista cognitivo, tanto de su enseñanza como de su aprendizaje, ha motivado indagar en uno de sus conceptos fundamentales, el concepto de espacio vectorial. Este estudio, que se dará a conocer a través de cinco capítulos, está focalizado en los conceptos matemáticos, espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y espacio vectorial $\mathbf{R}^3$ que, sin duda, forman parte de un curso básico de álgebra lineal a nivel de pregrado.

Cabe destacar que el trabajo con las Ecuaciones Lineales Homogéneas (ELH) fue el punto de partida para establecer aquellas construcciones y mecanismos mentales que estudiantes universitarios deben tener, para construir cognitivamente los conceptos espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ y, propiciar así, el respectivo tránsito entre éstos; donde el plano y el espacio cartesiano son dos conceptos que inciden fuertemente en la construcción cognitiva de los conceptos matemáticos ya mencionados, así como los cartesianos $\mathbf{R}^2$ y cartesiano $\mathbf{R}^3$ que se instalan, gradualmente, a partir del Conjunto Solución de una ELH (CSELH) y del Conjunto Solución de una Ecuación Lineal No Homogénea (CSELNH).

Para organizar la lectura de esta tesis doctoral se ha considerado una introducción para situar al lector en los distintos alcances de esta investigación y las motivaciones que conllevan, además de cinco capítulos que darán cuenta de cada uno de los aspectos que esta investigación abarcó. En el último capítulo, se presentan las conclusiones y proyecciones de esta investigación. Finalmente, la bibliografía y los respectivos anexos. A continuación una descripción de cada uno de los capítulos que luego se trabajarán en extenso.

En el capítulo 1, se da una mirada histórica epistemológica a algunos conceptos ligados al álgebra lineal. Se comienza este recorrido desde el trabajo de los babilonios y chinos con las ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales, pasando por la algebraización de la geometría y, luego, con la aparición de los sistemas abstractos destacando el concepto de grupo; luego se avanza a la axiomatización del álgebra lineal, al alero del concepto de espacio vectorial. Desde ahí, se destaca la importancia de los procesos de formalización y unificación que se han dado en el desarrollo de la matemática; además de resaltar aquellos elementos matemáticos que ayudan a direccionar el diseño de las DG que se proponen. En particular, se hace referencia al período que sitúa a la reforma de las matemáticas modernas en Francia, en los años 60's, donde destaca la postura de connotados matemáticos y educadores en relación a la enseñanza y aprendizaje de la matemática a nivel secundario y universitario, destacando una postura particular de la enseñanza de la geometría. Además, se hace mención al programa de investigación en álgebra lineal impulsado por Dorier y su equipo de investigación, en los años 80's, quienes realizaron un estudio histórico epistemológico en torno a los conceptos del álgebra lineal y documentaron la enseñanza y el aprendizaje de dichos conceptos a nivel de pregrado, en países como Francia, Marruecos y Brasil.

En el capítulo 2, se da a conocer la problemática didáctica que se aborda en este estudio así como los objetivos generales y específicos que se trazaron como metas al término de este. A lo anterior se agrega una revisión al estado de arte, en relación a investigaciones referidas a algunos conceptos del álgebra lineal, desde un punto de vista de su aprendizaje y enseñanza, en particular respecto las referidas al concepto espacio vectorial real de dimensión finita.

En el capítulo 3, se da una descripción del marco teórico que sustenta este estudio –la teoría APOE–, la cual se gesta en el período que comprende la reforma del currículum del álgebra lineal en E.E.U.U. en los años 90's. Además se hace referencia a algunas investigaciones con la teoría APOE que están en estrecha relación con esta investigación. Por otro lado se da a conocer la unidad de análisis que configura este estudio, la cual está conformada por estudiantes de tres universidades chilenas, poniéndose de relieve un estudio de caso múltiple. Destaca un caso conformado con cinco profesores universitarios, que hacen docencia en cursos de álgebra lineal a nivel de pregrado, para indagar en las concepciones de algunos conceptos ligados a los espacios vectoriales en cuestión y la concepción de enseñanza de éstos.

En el capítulo 4, se presentan los diseños de las DG para los espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ y la respectiva validación; todo regido por el ciclo metodológico que propone APOE: Análisis teórico, Diseño y aplicación de instrumentos, Análisis y verificación de datos. Una vez validadas las DG, se implementaron clases a un grupo de estudiantes de la carrera de pedagogía en matemática y computación, en una de las tres universidades contempladas en este estudio, considerando para ello el ciclo ACE, Actividades (A), Discusión de clase (C) y ejercicios fuera de la clase (E), y la DG del $\mathbf{R}^2$ espacio vectorial que fue validada. El objetivo, delinear los elementos de una propuesta didáctica en la enseñanza del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ a nivel universitario; de la cual se describen y detallan algunos de sus elementos en los anexos de este trabajo.

En el capítulo 5, se presentan las conclusiones de esta investigación, destacando el papel unificador de los conceptos que están implícitos en las DG y que se han validado; cuestión que está en sintonía con los aspectos epistemológicos que se dieron a conocer en el capítulo 1. Por otro lado, se hace notar la importancia que cobra el concepto de ecuación lineal homogénea en la conexión con las estructuras algebraicas desde el conjunto solución de esta. A ello se agregan el concepto de parámetro y función que permite conectar, desde una intuición geométrica, con los conceptos que son de interés en este trabajo. Además de las proyecciones y los productos de esta investigación.

Como proyecciones, interesa sistematizar la implementación de clases en aulas universitarias, poniendo de relieve la importancia del CSELH y CSELNH para articular el plano y espacio cartesiano con los cartesianos $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$, donde, por ejemplo, la *construcción objeto* CSELH procura dar paso a la *construcción proceso* cartesiano $\mathbf{R}^2$ y luego *encapsularlo* en la *construcción objeto* espacio vectorial $\mathbf{R}^2$. En definitiva, consolidar un trabajo de aula a nivel universitario, en otras universidades chilenas, desde los aspectos que se han pesquisado para establecer, de manera gradual, un puente con la matemática escolar desde los conceptos asociados al plano y espacio cartesiano, incorporando las fichas didácticas como recurso de aula para sugerir, desde situaciones variadas, los mecanismos y construcciones mentales que se han documentado.

CAPÍTULO I: ANTECEDENTES HISTÓRICOS EPISTEMOLÓGICOS DE LOS CONCEPTOS ASOCIADOS AL ÁLGEBRA LINEAL

Antes de presentar un análisis histórico epistemológico, para poner de relieve el proceso de unificación y axiomatización en el desarrollo de la matemática y, en particular, en lo que se refiere al álgebra lineal, cabe preguntarse el por qué un estudiante de pregrado presenta dificultades en el aprendizaje de los conceptos asociados a esta rama de la matemática. Probablemente la respuesta a la pregunta anterior puede estar relacionada con distintos factores que están presente en la epistemología e historia del álgebra lineal, como por ejemplo, la diversidad de conceptos matemáticos que están ligados a la idea de vector, uno de los conceptos basales del álgebra lineal, y que un aprendiz debe asimilar en el proceso de aprendizaje de este o bien, el alto nivel de abstracción que se requiere para la comprensión de los conceptos que están asociados con esta disciplina (Dorier, 1995).

A continuación se hará referencia a un período amplio de la historia que antecede a la axiomatización del álgebra lineal, evento que se dio de la mano del concepto de espacio vectorial. El objetivo de este capítulo es establecer algunas directrices que puedan orientar el tratamiento de algunos conceptos matemáticos, desde un punto de vista cognitivo, considerando la evolución histórica de los mismos si así fuese necesario (Artigue, 2003).

1.1.-Una panorámica histórica y epistemológica que incluye algunos conceptos matemáticos asociados al álgebra lineal

Para comenzar a dar cuenta de esta panorámica, en la Figura1 se presenta una línea de tiempo que destaca el período que va desde 2000 a.C. hasta 1900 d.C., período que antecede a la axiomatización del álgebra lineal y su posterior desarrollo como disciplina matemática. Un primer hecho a destacar, antes de la era cristiana, es que algunas culturas ya resolvían problemas asociados a la agricultura, el comercio y la agrimensura, utilizando ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales (Boyer, 1968; Kline, 1992; Bell, 1985; Luzardo et al., 2006; Kleiner, 2007).

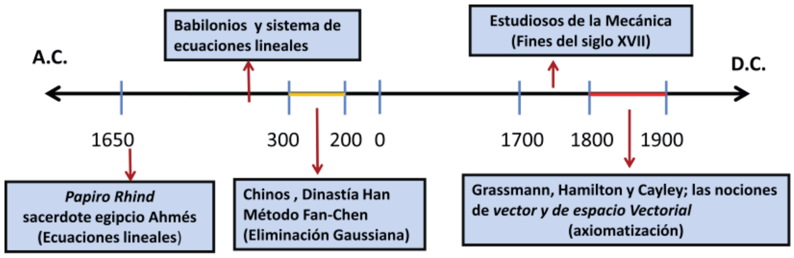


Figura 1: algunos hitos asociados a algunos conceptos ligados al álgebra lineal.

Ya en el Papiro de Rhind, en el 1.600 a.C., hay evidencia que los egipcios utilizaron las ecuaciones lineales y los babilonios trabajaron en la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Por otro lado, los matemáticos chinos entre 300 a.C. y 200 a.C. utilizaron algunos procedimientos para resolver sistemas de ecuaciones lineales que más tarde, unos dos mil años aproximadamente, se ligarían con el trabajo de las matrices y los determinantes (Kleiner, 2007). A finales del siglo XVII, emerge el concepto de vector desde el trabajo de los estudiosos de la mecánica (Luzardo, et al., 2006) y bien avanzado el siglo XVIII se comienzan a configurar, desde el estudio de las soluciones de las ecuaciones algebraicas, los sistemas abstractos en la matemática. Esto dio paso al concepto de grupo, concepto que jugó un rol preponderante en la unificación de las geometrías (Kleiner, 2007).

Por otro lado, Peano en 1888 en una publicación que denominó *cálculo geométrico según el "Ausdehnungslehre" de H. Grassmann*, formula en el último capítulo de su libro una definición axiomática de lo que hoy se conocemos como espacio vectorial (Dorier, 1995b; Kleiner, 2007). Esta definición axiomática que presenta Peano está referida a lo que él denominó un sistema lineal. Sistema que basó en las ideas de Grassmann, desde una mirada más bien geométrica. Define un sistema de entes, una relación de igualdad y una suma para estos entes; además estos entes interactúan con números enteros positivos desde una ponderación (Dorier, et al., 1997).

Cabe hacer notar que allá por 1679 Leibniz propone un análisis geométrico el cual está basado en una relación de congruencia. La idea de este nuevo cálculo geométrico intenta dar respuesta a las dificultades que Leibniz encuentra en las demostraciones geométricas, sobre todo en aquellas que están basadas con el uso de la regla y compás, herencia de los geómetras griegos. El trabajo de Leibniz está en sintonía con los trabajos que desarrollan de manera independiente Descartes, en 1637, y Fermat, en 1643, quienes algebraizan la geometría en la búsqueda de un cálculo geométrico. Por otro lado, Wallis en 1673 presenta una interpretación geométrica de la raíces de números negativos y desde ahí en adelante, Wessel en 1779, Argand en 1806 y Möbius en 1827, por nombrar algunos, van sentando las bases de un nuevo cálculo geométrico con bases algebraicas que decanta en la axiomatización de un espacio vectorial, en 1888, con los trabajos de Peano (Boyer, 1968; Grattan-Guinness, 1984; Dorier, 1997).

Es importante hacer notar que en 1800 la mayoría de los conceptos ligados a lo que hoy conocemos como álgebra lineal ya habían sido desarrollados, a excepción del concepto de espacio vectorial, el cual permitió axiomatizar el álgebra lineal en 1930 y dio paso a la unificación de los conceptos que esta involucra (Grattan-Guinness, 1984; Dorier, 1995a; 1995b, Kleiner, 2007). Esto evidencia, desde un punto de vista histórico epistemológico, que no siempre hay un desarrollo secuencial e inclusivo de las ideas matemáticas como se podría percibir desde su enseñanza en un aula universitaria, aspecto a tener en cuenta a la hora de pensar en el proceso de enseñanza aprendizaje de un concepto matemático.

1.1.1.- Los sistemas de ecuaciones lineales y su relación con el desarrollo de conceptos asociados al álgebra lineal

Como ya se mencionó en el apartado anterior, las ecuaciones lineales y los sistemas de ecuaciones lineales estuvieron presentes desde muy tempano en algunas culturas, como herramientas para resolver problemas en ámbitos específicos como la agricultura y el comercio. En el siglo XVII, los sistemas de ecuaciones lineales comienzan a vincularse al desarrollo de los conceptos del álgebra lineal. Lo anterior se puede sustentar sobre la base de algunos hechos históricos, como por ejemplo, el que nos ofrece el matemático y filósofo francés d'Alembert, el cual da cuenta que las soluciones de un sistema de ecuaciones de la forma $Ax = B$ conforma un sub-espacio afín (Bourbaki, 1976; Grattan-Guinness, 1984; Luzardo, et al., 2006). De la misma manera Euler, Lagrange y el propio d'Alembert se percatan que la solución general de un sistema homogéneo $Ax = 0$ es combinación lineal de algunas soluciones particulares de este (Boyer; 1968; Bourbaki, 1976; Grattan-Guinness, 1984; Luzardo, et al., 2006; Kleiner, 2007).

Lo anterior pone de relieve, en términos de esta investigación, la importancia de establecer una relación entre las soluciones de una ecuación lineal homogénea (no homogénea). Respectivamente para las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo (no homogéneo).

Cabe hacer notar que en el siglo XVI, de manera análoga para una ecuación de segundo grado, se obtuvieron fórmulas para ecuaciones de grado tres y cuatro, obligando a los matemáticos de la época a avanzar en la misma dirección para ecuaciones de grado mayor. A mediados del siglo XVII, ante los nulos intentos de la búsqueda de fórmulas para las raíces de ecuaciones de grado mayor a 4, se visualiza la importancia de las permutaciones en el trabajo de las raíces de un polinomio. En 1770, Lagrange incorpora el concepto de permutación, visto como un arreglo, en el trabajo de las raíces de polinomios de grado tres y cuatro, sentando las bases para el desarrollo de los sistemas abstractos en matemática; punto de partida para que en 1830 se establezca el concepto de grupo de la mano de Galois (Hernández, 1972; Grattan-Guinness, 1984).

En la Tabla N°1 se detallan algunos aspectos en relación a los sistemas de ecuaciones lineales. En una primera etapa destacan como herramienta para resolver problemas y en una segunda etapa, desde un estudio más formal como objetos matemáticos, en vinculación con otros conceptos que están asociados al álgebra lineal (Boyer, 1968; Grattan-Guinness, 1984; Bell, 1985; Kleiner, 2007).

Tabla N°1: Algunos hitos asociados a los sistemas de ecuaciones lineales.

Tabla N°1: Los sistemas de ecuaciones lineales		
Año	**Matemático**	**Aspecto que se desarrolla o problemática**
2000 a.C.	Babilonios	Resolvían sistemas de ecuaciones de dos ecuaciones y dos incógnitas, 2x2.
200 a.C.	Chinos	Resolvían sistemas de ecuaciones de 3x3 sobre la base de sus coeficientes numéricos.
1693	Leibniz	Comienza el estudio moderno de los sistemas de ecuaciones lineales e incorpora el concepto de determinante.
1750	Cramer	Inventa la regla que lleva su nombre y que utiliza determinantes para resolver sistemas de ecuaciones lineales.
1750	Euler	Plantea que los sistemas de ecuaciones lineales pueden carecer de una solución o bien que esta puede no ser única.
1811	Gauss	Desarrolla el método de los mínimos cuadrados y el método de eliminación gaussiana. Estudió las condiciones sobre las cuales los sistemas de ecuaciones lineales tienen soluciones y son únicas.

Un hecho que procura graficar posibles dificultades que estudiantes universitarios podrían enfrentar, desde un punto de vista cognitivo, en el aprendizaje de algún concepto ligado al álgebra lineal es el referido al matemático Euler, uno de los primeros en darse cuenta que un sistema de ecuaciones de $n \times n$ no necesariamente tiene una única solución (Kleiner, 2007). Euler describe algunos inconvenientes que aparecen cuando se resuelven algunos sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 y 3×3, cuyas ecuaciones están relacionadas entre sí. Problemática que lleva asociada un concepto matemático que está implícito en la situación que se describe y que no se explicita; cuya formulación matemática y respectiva formalización requerirá de por lo menos un siglo, el concepto de dependencia lineal (Dorier, 1995a; Dorier et al., 1997; Dorier et al., 2000).

Para dar cuenta de la situación mencionada en el párrafo anterior, en la Figura 2 se presentan algunos detalles de lo que reportó Euler para mostrar, por ejemplo, cómo a partir de un sistema de ecuaciones de 2×2, donde una de las ecuaciones es múltiplo escalar de la otra, se obtiene la identidad $0 = 0$ al aplicar el método de eliminación y sustitución para determinar la solución de dicho sistema de ecuaciones.

Figura 2: Diagrama que muestra dos hitos históricos y la evolución de la dependencia lineal desde la resolución de un sistema de ecuaciones.

En el caso 3×3 Euler utiliza ejemplos que muestran las distintas posibilidades que se pueden dar en atención a lo ocurrido en el caso 2×2 sin llegar a establecer o formular un concepto más general o inclusivo que se haya podido extrapolar por ejemplo a las *n*-uplas. Aunque, como lo plantea Dorier (1995a), si bien Euler está consciente de la importancia de su análisis, sólo se circunscribe a la dependencia de las ecuaciones lineales, la dependencia inclusiva de Euler. Lo que probablemente pudo estar influenciado por las necesidades de la época, donde los sistemas de ecuaciones estaban más bien ligados a resolver cuestiones de índole geométrica (Kleiner, 2007, Dorier, 1995a).

Lo anterior procura, nuevamente, poner de manifiesto que la maduración y la respectiva formulación de una idea matemática, en su proceso de formalización, no es algo tan inmediato que se produzca de manera secuencial al alero de otros conceptos menos inclusivos, en el sentido ausubeliano (Ausubel, 1983), sino por el contrario requiere de un proceso de maduración y de adecuación con otras ideas, ya existentes en la mente de quien aprende, y las cuales deben ser conciliadas e integradas de manera funcional en la estructura cognitiva de un aprendiz para promover así un aprendizaje significativo (Ausubel, 1983; Novak et al., 1988; Coll, 1996, p. 189-202), donde el aprendizaje cooperativo y colaborativo juega un rol que se debe tener en cuenta a la hora de promover aprendizajes significativos (Coll, 1996, p.105-122).

1.1.2.- El concepto de determinante y su relación con los sistemas de ecuaciones en un contexto geométrico

En el Jiu Zhang Suan Shu, texto matemático chino que recopila en nueve capítulos el conocimiento matemático de China desde el siglo X a.C. hasta el siglo I a.C., se presentan, en el capítulo séptimo, algunos problemas que se resuelven como un caso especial de la regla de Cramer para un sistema de ecuaciones con dos incógnitas. Lo anterior, evidencia que el concepto determinante está presente unos dos mil años antes de su publicación como regla; primero por el matemático japonés Seki Kowa, en 1683, y diez años después por el matemático alemán Leibniz (Luzardo, 2006; Kleiner, 2007).

En la Tabla N°2 se dan a conocer algunos hechos vinculados al concepto de determinante, fundamentalmente en la etapa de su elaboración, como objeto matemático, desde una presentación axiomática (Boyer, 1968; Grattan-Guinness, 1984; Bell, 1985; Kleiner, 2007).

Tabla N°2: Algunos hechos de la etapa de formalización del concepto de determinante, el cual parte con Vandermonde y decanta desde un enfoque más axiomático en Weierstrass y Kronecker.

TABLA N°2: Los determinantes		
Año	**Matemático**	**Aspecto que se desarrolla o problemática**
1748	Maclaurin	Hizo una de las primeras publicaciones sobre determinantes y los utilizó para resolver sistemas de 2×2, 3×3 o 4×4.
1870	Dedekind	Utiliza determinantes para establecer resultados en teoría de números.
1772	Vandermonde	Estudia a los determinantes como objetos matemáticos y no en función de un sistema de ecuaciones lineales.
1772	Laplace	Muestra cómo expandir determinantes por medio de cofactores
1812	Cauchy	Presenta el primer estudio sistemático de los determinantes, presentando y demostrando propiedad: det (AB) = det(A)· det(B)
1841	Cayley	Desarrolla una geometría analítica en n dimensiones utilizando determinantes.
1868-1874	Weierstrass y Kronecker	Introducen de manera axiomática a los determinantes.

Si bien en el siglo II a.C. hay evidencia de la aparición informal del determinante en la solución de problemas lineales, en el ámbito de la agricultura, por matemáticos chinos; es en el año 1750 que Cramer publica un tratado, *Introduction to the Analysis of Algebraic Curves*, donde da a conocer un método para resolver un sistema de ecuaciones lineales. La vinculación del determinante con la resolución de sistemas de ecuaciones lineales si bien no ayuda en el desarrollo de la idea de dependencia lineal, desde lo que Euler manifiesta en ese mismo año, procura un avance en la idea rango (Kleiner, 2007, Dorier, 1995a).

1.1.3.-Matrices y transformaciones lineales

El siguiente problema que se presenta a continuación tiene la particularidad que su solución, en el capítulo IX del Jiu Zhang Suan Shu, deja en evidencia que tanto el concepto de matriz como el determinante aparecen mucho antes de su elaboración matemática.

Problema

Hay tres tipos de maíz de los cuales, tres paquetes del primero, dos del segundo, y uno del tercero, hacen 39 medidas. Dos del primero, tres del segundo y uno del tercero, hacen 34 medidas. Y uno del primero, dos del segundo y tres del tercero, hacen 26 medidas. ¿Cuántas medidas de maíz contienen los paquetes de cada tipo?

A continuación, en la Figura 3, se describe la forma como se resuelve dicho problema, utilizando un algoritmo, sin que se dé a conocer los fundamentos de este (Citado en Andreoli, 2009).

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39
0	0	3
4	5	2
8	1	1
39	24	39
0	0	3
0	5	2
36	1	1
99	24	39

El autor manda al lector a multiplicar la columna del medio por 3 y restar la columna de la derecha tanta veces como sea posible. Luego, a partir de 3veces la primera comuna, restar tantas veces como sea posible, la columna de la derecha. Esto da:

Manda ahora multiplicar la primera columna por 5 y entonces restar la columna del medio tantas veces como sea posible. Esto da:

Luego de lo cual afirma que, a partir de allí, se pude encontrar la solución para el tercer tipo de maíz, luego para el segundo, luego para el primero, por sustitución posterior. Este método, hora conocido como eliminación gaussiana, no llegó a ser bien conocido hasta principios del siglo XIX.

Figura 3: Descripción de cómo se resuelve el sistema de ecuaciones.

En la Tabla N°3 se destacan algunos aspectos en relación al concepto de matriz, primero como tabla de números, utilizada por matemáticos chinos y luego, su vinculación con las transformaciones lineales en un contexto más geométrico (Boyer, 1968; Grattan-Guinness, 1984; Bell, 1985; Kleiner, 2007).

Tabla N°3: Algunos hitos sobre matrices y transformaciones lineales.

TABLA N°3: Matrices y transformaciones lineales		
Año	**Matemático**	**Aspecto que se desarrolla o problemática**
200 a.C.	Chinos	Las matrices aparecen como tablas de números
1801	Gauss	Utiliza en su trabajo de las formas cuadráticas binarias. Aparece la multiplicación de matrices.
1850-1858	Sylvester Cayley	Sylvester acuña el término matriz y Cayley formula la primera definición abstracta de matriz.
1844-1848	Eisenstein y Hermite	Extienden el trabajo de Gauss sobre las formas cuadráticas y las operaciones elementales.
1918	Weyl	Weyl formula la versión moderna de transformación lineal concepto que venían desarrollando Cauchy, Weierstrass y Kronecker.

El concepto de transformación lineal, así como otros conceptos del álgebra lineal, conllevan alguna dificultad intrínseca para su aprendizaje. Algunas investigaciones desde la didáctica de la matemática o matemática educativa dan cuenta de ello y se refieren a las dificultades que tienen los estudiantes en el aprendizaje del concepto de trasformación lineal en un ambiente de geometría dinámica (Ubicab & Oktaç, 2006; Molina & Oktaç, 2007). Roa & Oktaç (2009), se abocan al diseño de una DG teórica, que les proporciona un marco teórico, para establecer aquellas construcciones y mecanismos mentales necesarios para construir cognitivamente el concepto transformación lineal en conexión con el concepto de espacio vectorial.

1.1.4.- Los conceptos de dependencia e independencia lineal, base y dimensión hacia la estructura de espacio de vectorial

Para efectos de este estudio es importante reparar en algunos hechos históricos que ya se han indicado y que muestran una dinámica no secuencial en el desarrollo de los conceptos asociados al álgebra lineal. El concepto de dependencia lineal se instala desde la dependencia inclusiva de las ecuaciones lineales que describe Euler en 1750 y la idea de combinación lineal en términos de la relación que se establece entre las soluciones particulares de un sistema homogéneo con la solución general en atención a los trabajos de d'Alembert (Bourbaki, 1976; Grattan-Guinness, 1984; Kleiner, 2007).

En las Tablas N°4 y N°5 se presentan aquellos hechos más relevantes en relación a los conceptos que están asociados directamente con el concepto de espacio vectorial y que llevarán a la axiomatización de un espacio vectorial como hoy se le conoce (Boyer, 1968; Grattan-Guinness, 1984; Bell; 1985; Kleiner, 2007).

Tablas N° 4 y N° 5: Nos sitúan en período previo al proceso de axiomatización de los espacios vectoriales, siendo fundamental el trabajo de Hamilton desde la idea de vectores.

TABLA N°4: Dependencia e independencia lineal, base y dimensión

Año	Matemático	Aspecto que se desarrolla o problemática
1843;1845	Cayley y Graves	Generalizan las ideas de Hamilton introduciendo las ideas de octoniones
1853	Hamilton	Con los cuaternios presenta la primera idea de espacio vectorial
1882	Dedekind y Weber	Utilizan la idea de combinación lineal y de base pero no de la forma moderna como hoy se le conoce.
1910	Steinitz y Artin	Perfeccionan las ideas de Dedekind y Weber en la teoría de los campos

TABLA N°5: Espacio vectorial

Año	Matemático	Aspecto que se desarrolla o problemática
1888	Peano	Introduce la noción de espacio vectorial
	Wessel	Introduce el concepto de vector geométrico que culmina con Gauss
1853; 1881 y 1893	Hamilton, Gibbs y Heaviside	El álgebra de vectores por Hamilton y Gibbs-Heaviside estudian los vectores como se conocen actualmente.
1881	Hamilton, Cayley y Grassmann	Generalizan las ideas de vector para dimensión dos o superior
1918	Weyl	Aplica los conceptos de vectores a la física, en particular a la teoría de la relatividad y el concepto de transformación lineal como hoy se le conoce
1920	Banach	Incorpora la idea de espacios vectoriales normados
1920-1926	Noether	En su obra incorpora el lenguaje moderno de los espacios vectoriales
1930	Van der Waerden	Define espacio vectorial reconocible en el siglo XXI

1.2.- La axiomatización y la unificación: Un recorrido hacia la formalización del álgebra lineal

Mirar en retrospectiva el desarrollo de la matemática y en particular del álgebra lineal procura rescatar algunos hitos que dan cuenta que la formulación matemática de ideas fuerza, que han impulsado el desarrollo de esta, requieren no tan sólo de procesos cognitivos y la puesta en escena de un tipo de pensamiento, sino que además de la explicitación de cierta dinámica interna que es propia de la matemática y que la articula como tal (Kline, 1967; Schaaf, 1964). En la Figura 3 se presentan algunos hitos que ponen de manifiesto la importancia del proceso de abstracción en el desarrollo de la matemática y su articulación con las estructuras intelectuales, en el sentido Piagetano (Piaget & García, 1989), cuestión que toma fuerza con la reforma de la enseñanza de la matemáticas en los años 60's en Francia (Charlot, 1984).

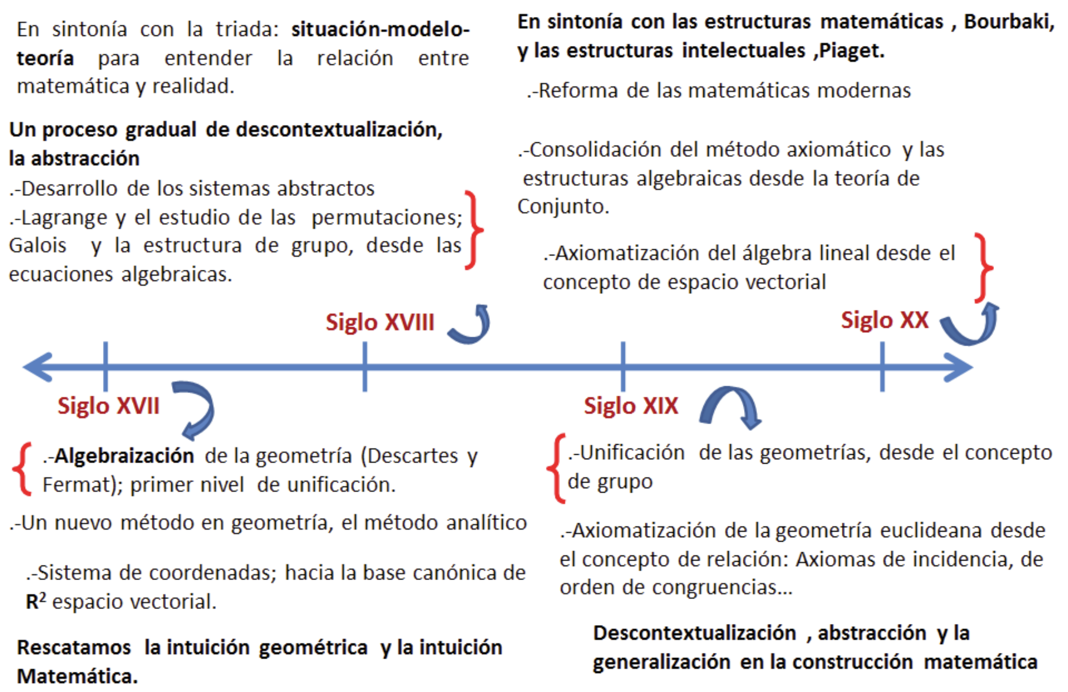


Figura 3: Del desarrollo de los sistemas abstractos hasta el método axiomático con las reforma de las matemáticas modernas.

Por otro lado, con el diagrama de la Figura 4 se pone de manifiesto el papel de la axiomatización y unificación como procesos matemáticos, que irán impulsando el desarrollo de los sistemas abstractos que comienzan a gestarse a partir de los trabajos de las soluciones de las ecuaciones algebraicas que trabaja Lagrange en 1770, para que luego aparezca el concepto de grupo propuesto por Galois en 1830 (Kleiner, 2007), concepto que permitirá a Klein en 1874 unificar las geometrías y por otro lado a hacer aportaciones a la teoría de grupo (Nevanlinna, 1966). En definitiva se va moldeando un método que distingue a la matemática de otras ciencias y cuyo valor, desde un punto de vista de su enseñanza, toma interés por connotados matemáticos franceses en los años 50 en Francia, Dieudonné, Choquet y Lichnerowics, imprimiendo un sello característico a la reforma de las matemáticas de los años 60's que fue desencadenada por dos eventos; el lanzamiento del satélite soviético en octubre de 1957, en el marco de la carrera espacial, y lo efectos de la segunda guerra mundial en cuanto a la modernización industrial que pone de relieve un nuevo énfasis a la enseñanza para impulsar un desarrollo económico (Charlot, 1984).

1.2.1.- El rol de la axiomatización y estructuras en la unificación de las matemáticas

Pensar en la axiomatización y la unificación de los asuntos inherentes a la matemática, es remontarse a episodios de nuestra historia que se enmarcan en el desarrollo de esta ciencia; así, por ejemplo, podemos mencionar: la unificación de las geometrías desde el programa de Erlangen propuesto por Klein (1872), la reformulación axiomática de la geometría euclideana que plantea Hilbert (1899), la axiomatización del álgebra lineal que plantea Van der Waerden (1937).

Dichos episodios ponen en juego y resaltan algunos elementos matemáticos como los conceptos de relación, función, transformación y grupo, por nombrar algunos, que nos acercan desde distintos ángulos a una estructura algebraica –los espacios vectoriales–.

El proceso de axiomatización como método tiene su inicio en la geometría euclideana y, en su desarrollo, a partir de la axiomática propuesta por Hilbert (1899), no estuvo exento de dificultades. Por ejemplo, en la axiomatización de la aritmética, desde la teoría de conjuntos aparecen paradojas como las plateadas por Rusell que se suscitan a partir de la idea de suponer la existencia del conjunto de todos los conjuntos (Schaaf, 1964; Thom, 1970; Bourbaki, 1976; Hernández, 1978; Grattan-Guinness, 1984).

Independientemente de lo anterior el método axiomático, ya consolidado con Peano y Hilbert a finales del siglo XIX, se instala en el siglo XX con la reforma de la enseñanza de las matemáticas con el objetivo de proveer de una base sólida e imprimir un alto nivel de rigor lógico a las construcciones matemáticas en el sentido de Hilbert al replantear la presentación de la geometría euclideana (Nevalinna, 1966).

Por otro lado, el desarrollo de estructuras algebraicas comienzan a gestarse en el siglo XVIII lo que procura, a través de un proceso gradual de descontextualización, el posicionamiento de sistemas abstractos; la base para el desarrollo de teorías que conllevan un alto nivel de abstracción, como la teoría de grupo (Kleiner, 2007). Estas estructuras se consolidan en el siglo XX, permitiendo, por ejemplo, la axiomatización del álgebra lineal y, en la década de los años 60, dan un impulso a la reforma de las matemáticas modernas; que implicaron un cambio de perspectiva en la enseñanza preuniversitaria y universitaria con algunos efectos que ello conllevó como por ejemplo, un cambio en los programas de estudio, a nivel escolar, con un marcado énfasis en uso de la teoría conjunto donde el exceso de rigor pone entre dicho a educadores y padres que no entienden el sentido de este nuevo cambio (Bkouche et al, 1991).

Es importante hacer notar que la axiomática para el propósito de esta investigación más que ser vista como una herramienta es rescatar su rol sistematizador (Thom, 1974). Por otro lado, se destaca el papel de las estructuras algebraicas como componentes esenciales en el proceso de unificación, en particular de las geometrías. Las tendencias actuales muestran que las geometrías no deben ser vistas como una parte independiente de la matemática, como ya lo plantea Revuz (1971), donde las estructuras algebraicas, grupo y espacio vectorial, juegan un papel preponderante tanto en el desarrollo como en la descripción de éstas, al alero de una axiomática. Así, el papel unificador o descriptor de dichas estructuras, como las mencionadas, es otro aspecto que se destaca en la perspectiva de este trabajo, destacando las el trabajo de Klein al unificar las geometría desde el concepto de grupo (Eves, 1986).

1.2.2.- Axiomatización y unificación en el álgebra lineal desde la estructura de espacio vectorial y otros antecedentes asociados

La axiomatización del álgebra lineal, hacia 1930, al alero del concepto espacio vectorial demandó un alto nivel de abstracción (Dorier, 2000; Dorier, et al. 2002). Por otro lado, el concepto espacio vectorial desde un punto de vista epistemológico más que una herramienta para resolver nuevos problemas debe ser visto como un concepto unificador, generalizador y formalizador al igual que el concepto de límite (Dorier, et al., 1997; Dorier, 2000; Artigue, 2003).

Cabe hacer notar que el proceso de unificación que se instala en la matemática, ha permitido puntos de inflexión en el trabajo de esta, entregando un nuevo estatus a los conceptos que en ella se trabajan. Por ejemplo, para el caso del álgebra lineal, si consideramos conjuntos como $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, las funciones reales y continuas en una variable, polinomios sobre el cuerpo de los números reales, matrices reales, por nombrar algunos, dotados de una estructura, pueden ser estudiados como un espacio vectorial. Esto procura situar a sus elementos bajo un objeto matemático común, que desde la estructura que adscriben y, probablemente atendiendo al trabajo de los estudios de la mecánica en el siglo XVII y desde un punto de vista de un modelo geométrico en el sentido de Gueudet-Chartier (2000; 2003), se denomine vector.

La algebraización de la geometría procura dar un paso de la geometría sintética a la geometría cartesiana. Dicho logro es fruto del trabajo independiente desarrollado por Fermat y Descartes en el siglo XVII aplicando el método algebraico para analizar y representar curvas, problemas de interés en dicha época atendiendo al estudio de los cuerpos celestes y el desarrollo del comercio (Kline, 1992; Hernández, 1978), donde el uso de coordenadas es un aspecto que cobra relevancia y todo lo que ello conlleva. El paso a la geometría cartesiana puede ser visto como un tipo de unificación, antesala de aquella desarrollada por Klein a partir de la estructura algebraica de grupo (Klein, 1872).

Probablemente, la idea de un sistema de coordenadas rectangular sugiere implícitamente, desde transformaciones isométricas como la traslación, el uso de operaciones con pares ordenados para luego avanzar a estructura algebraica; el cual además provee de una vestimenta al plano de los griegos. Para efectos este trabajo denominamos cartesiano $\mathbf{R}^2$ al conjunto $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ provisto de operaciones. Dicho cartesiano puede entenderse a partir de una estructura para **R**, la recta real, lo que nuevamente pone de manifiesto un tipo particular de unificación. Luego, a partir de las propiedades que se pueden desprender del conjunto $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$**,** se propicia un modelo geométrico del plano como objeto matemático; plataforma que puede utilizarse para avanzar a $\mathbf{R}^2$ como espacio vectorial (Choquet, 1964).

Desde una mirada conjuntista y rescatando este nuevo modelo del plano que fue descrita en el párrafo anterior se hace mención a la representación que usualmente se hace en los textos de geometría analítica del sistema de coordenadas. Es importante destacar en este punto el papel que pudo haber jugado la geometría ordenada, esta geometría que desprende Coxeter (1971) de la geometría euclideana, en el desarrollo de la geometría cartesiana, pensando en la recta real y la estructura de **R**.

Lo aspectos anteriormente descritos, no necesariamente se dieron a través de un proceso secuencial, lo cual motiva a indagar en ello; la idea es establecer aquellos elementos basales que podrían estar incidiendo en la problemática que aborda esta investigación. Por ejemplo, si pensamos en la axiomatización de la geometría que propone Hilbert, se pone de relieve la necesidad de disociar objetos de la geometría euclideana con aquellos objetos de la realidad física en contraposición a la axiomática que propone Euclides para su geometría (Boyer, 1968; Bourbaki, 1976; Hernández, 1978; Bell, 1985).

En la axiomática de Hilbert, la relación de incidencia, de correspondencia y de congruencia da cuenta de la incorporación de elementos matemáticos al proceso de axiomatización, lo que está en sintonía con la tarea de unificación de las geometrías, que se plasma en el programa Erlangen de Klein (1872), donde una geometría es vista como la acción de un grupo sobre un conjunto, donde un grupo debe ser visto como un caso particular de una aplicación o transformación lo que conecta con el concepto de relación que incorpora Hilbert (Nevanlinna, 1966).

1.2.3.- Una mirada particular a la comunidad de matemáticos en los años 60 y 70 y su relación con otros episodios en la enseñanza y aprendizaje de los conceptos ligados al álgebra lineal

En Hernández (1978) se rescata la mirada y puntos de vista de la comunidad de matemáticos, a través de diversos trabajos, donde se pone énfasis a las estructuras matemáticas, al proceso de axiomatización, y la relación de dichos aspectos con esta nueva manera de ver la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La diversidad de miradas (Hernández, 1978; Bkouche et al., 1991), que incluye a un connotado investigador en el ámbito de la Psicología como fue Piaget, procura rescatar una serie de elementos, como la importancia de la abstracción reflexiva, en sintonía con esta exigencia a la formalidad y rigor que se impone a la construcción matemática, y que de manera paradójica más que alejarla de otras disciplinas se produce una explosión hacia la diversificación de las aplicaciones de la matemáticas a otros ámbitos (Stone, 1961, Bkouche et al., 1991).

1.2.4.- De la abstracción en matemática a la abstracción reflexiva: Matemática y álgebra lineal

Si nos remontamos al desarrollo de los sistemas abstractos desde las estructuras algebraicas, proceso que duró por lo menos un siglo (Kleiner, 2007), se reparará en que dicho proceso necesitó de un alto nivel de abstracción, en el sentido de una descontextualización de los objetos matemáticos y sus relaciones para ir en desarrollo de teorías más generales a partir de ciertos modelos, en el sentido de Revuz (1971), por ejemplo la teoría de grupo, la teoría de espacios vectoriales.

Particularmente si se mira retrospectivamente a la reforma de la enseñanza de las matemáticas en los años 60' en Francia, es posible reparar en varios aspectos que dicen relación con la matemática como disciplina y, la forma en cómo se concibe su enseñanza. En primer lugar, se imprime un marcado énfasis al tratamiento axiomático en su enseñanza, el uso del formalismo (Bkouche et al., 1991) donde la piedra angular para dicho tarea es la teoría de conjuntos; aspecto que genera algunos visiones encontradas respecto al uso desmedido de esta teoría en el tratamiento de la matemática en distintos niveles escolares (Thom, 1970).

El excesivo rigor, y el alto nivel de abstracción, descartando toda intuición, genera un debate en la comunidad de matemáticos, en torno a la enseñanza de estas matemáticas modernas, considerando la forma en cómo estaba concebida, y las implicancias que ello conllevaba al nivel escolar preuniversitario (Bkouche & Soufflet, 1982, Bkouche, 1988; Charlot, 1984; Hernández, 1978; Paiget et al., 1989).

El problema de la excesiva formalidad en la enseñanza de la matemática y sus implicancias a nivel universitario es documentada, desde los conceptos ligados al álgebra lineal, en los trabajos de Dorier y su equipo de investigación (Dorier, 2000). Las investigaciones en el sentido mencionado han permitido distinguir dos tipos de dificultades en la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal, una orientada a aspectos conceptuales, su estructura, y la otra respecto a los procesos cognitivos necesarios para su comprensión y desarrollo como asignatura. En este sentido viene al caso hacer mención a los planteamientos de Piaget en relación al concepto de abstracción reflexiva. En la Figura 4 una mirada geométrica de un matemático respecto de lo que entiende por abstracción reflexiva, para describir lo que según él, Piaget rotula como el proceso de obtener estructura consciente a partir de esquemas de actividad inconsciente (Thom, 1974, p.47).

> "…Voy a intentar dar una imagen geométrica de este proceso de "abstracción reflexiva". Supongamos que el conjunto de las actividades (sensorio-motoras y mentales) humanas están representados por el plano x, y, y que el semiplano superior $y>0$ representa la parte consciente de dichas actividades, mientas que el semiplano inferior $y<0$ representa la inconsciente. Un esquema de actividad inconsciente, S puede ser representado por una forma geométrica (S) en este semiplano inferior. La abstracción reflexiva consiste entonces en la creación, a partir de (S), que procede a su vez de S, de la forma (S') en el semiplano consciente $y>0$: se obtiene así una especie de imagen especular ($S´$) de (S), más pobre y estilizada. Este proceso de formación de una "prole consciente" S' a partir de la estructura madre S es análogo en todos sus pasos al de la reproducción biológica, mediante el que un ser vivo produce un descendiente isomorfo a él; se empieza siempre con la formación S de un brote o un feto, que se desarrolla en S, y que una vez llegado a la madurez, se separa. Se trata –como la misma palabra lo indica– de una verdadera "concepción", que procura la formación $S´$ a partir de S (Thom, 1974, p. 46)."

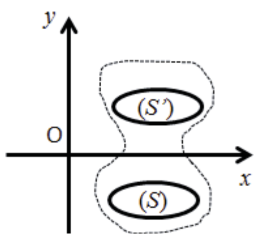


Figura 4: Una mirada geométrica a la abstracción reflexiva que da Thom (1974).

Lo anterior está en estrecha relación con los aspectos que estuvieron presentes y que dieron origen a la unificación, formalización y generalización en el álgebra lineal. Cabe destacar, en este sentido, que la ligazón de una variedad de objetos matemáticos bajo un comportamiento común, demandó de un nuevo nivel de abstracción y, de alguna manera, repercutió en los procesos mentales requeridos para abordarlos en un proceso de enseñanza aprendizaje (Dorier, 1995b; Dorier et al., 1997; Piaget et al., 1989).

Si bien el método axiomático en el siglo XX se instala con la idea de alejar de toda intuición a las construcciones matemáticas, es relevante destacar que la comunidad de matemáticos en los años 60 y 70 está de acuerdo en considerar la intuición matemática y el uso de modelos. Inclusive, cabe mencionar, el desarrollo de concepciones teóricas que incorporan a la intuición y la utilización de modelos (Fischbein, 1987; Tall & Vinner, 1981) para describir y comprender procesos cognitivos en el aprendizaje de las matemáticas; más aún, el desarrollo de modelos cognitivos que procuran construir, en términos teóricos, un concepto matemático (Arnon, et al., 2014).

Muchas de estas concepciones teóricas están vigentes hoy en día y han permitido desarrollar y generar nuevas ideas en la didáctica de las matemáticas; Ingeniería didáctica (Artigue, 1989); Modos de pensamiento (Sierpinska, 2000); Registros semiótico (Duval, 1995), por citar algunos.

De manera coincidente, es importante destacar que la herencia del período de las reforma de las matemáticas modernas son las estructuras matemáticas, atribuidas al grupo Bourbaki y, las estructuras intelectuales asociadas a Piaget (Bkouche et al., 1991), destacando la abstracción matemática y la abstracción reflexiva como ingredientes indisolubles en el trabajo de los conceptos matemáticos. Además perfilan a la didáctica de la matemática como una disciplina emergente que intentará dar respuesta a los efectos de esta reforma (Bkouche et al., 1991).

En particular, se puede mencionar que la "intuición geométrica" es un constructo que se desarrolla a partir de las ideas de Fischbein en relación a la intuición matemática y que conlleva la utilización de modelos que pueden ser trabajados en álgebra lineal. En el sentido anterior se destaca el trabajo de Gueudet-Chartier (2000; 2003), respecto de la intuición geométrica y el uso de la geometría en la enseñanza del álgebra lineal. Si bien interesan los resultados que de su investigación, se rescata el concepto de "intuición geométrica" como constructo teórico para situar a $\mathbf{R}^2$ **y** $\mathbf{R}^3$ como modelos para el trabajo de las estructuras algebraicas y estimular a estudiantes universitarios para que puedan acceder a teorías matemáticas con una intuición geométrica si así fuese necesario.

1.2.5.- La geometría y su relación con una estructura algebraica

Es importante indicar que para Klein (1872) una geometría es vista como la acción de un grupo sobre un conjunto, lo que pone de relieve el concepto de grupo en la unificación de las geometrías. Por otro lado un primer aspecto a destacar en la década de los años 1960 y 1970, lo que está plasmado en algunos de los artículos que recopila Hernández (1978), es la mirada que hace la comunidad de matemáticos respecto de la geometría. La geometría euclidiana es vista como un modelo de la realidad física y el punto de partida de la axiomatización de la matemática (Revuz, 1971; Thom, 1961; Nevanlinna, 1966; Artín, 1963; Choquet, 1964; Hernández, 1978). La relación realidad objetiva y matemática, en particular geometría, es un tema que el matemático intenta disociar y que se percibe en la axiomatización de Hilbert, donde, por ejemplo, la relación de incidencia que se utiliza intenta minimizar toda intuición geométrica del espacio físico.

Se destaca, en el sentido del párrafo anterior, la mirada de Revuz (1971) respecto a la triada situación, modelo y teoría para explicar el surgimiento de la matemática y su desarrollo. Enfatiza que el punto de partida es una situación, porción de la realidad física, que se aísla para, desde un proceso de abstracción, construir un modelo desde sus características esenciales descritas en términos matemáticos, para estudiarla con las técnicas que ofrece la matemática. Luego, prescindiendo de la situación, y a través de nuevos niveles de abstracción, construir una teoría. La intuición matemática, como catalizador, ocupa un lugar importante en la construcción de la matemática y que, a la vez, el matemático valora.

1.2.6.- Las estructuras en matemática y el álgebra lineal

Las estructuras que subyacen a la matemática son clasificadas en algebraicas (grupo, anillo, espacio vectorial, espacio afín, por citar algunas); topológicas (espacios topológicos) y de orden (retículos) (Schaaf, 1964; Stone, 1961). Se puede constatar que ya en el siglo XX el concepto de función, aplicación y correspondencia juegan un papel importante en el desarrollo de las estructuras y por ende en la unificación y la axiomatización de la matemática. En particular es importante hacer notar que, el concepto de grupo y la acción de un cuerpo sobre un grupo dan forma a una nueva estructura, el espacio vectorial.

1.2.7.- La estructura de espacio vectorial y su relación con la geometría

En relación a la estructura de espacio vectorial, considerando la preocupación de la comunidad de matemáticos franceses respecto de la enseñanza preuniversitaria, en las décadas de los años 1960 y 1970 destaca la relación que se hace en torno a la enseñanza de la geometría, desde la idea de caracterizar el plano o espacio, por ejemplo:

> “En un sentido más restringido, la geometría consiste en el estudio de los espacios euclídeos, es decir, los espacios vectoriales de dimensión finita sobre el cuerpo de los números reales dotados de un producto escalar” (Revuz, 1971, p.291-297).
> “Después de haber introducido, de una manera más o menos intuitiva, las coordenadas en los cursos preparatorios, se puede definir el espacio cartesiano como un espacio vectorial de dimensión dos dotado de una forma bilineal definida”(Artin, 1963, p.260-263).
> “Desde el punto de vista del matemático, la manera más elegante, profunda y rápida, de definir el plano (o espacio) es hacerlo como un espacio vectorial de dimensión dos (o tres) sobre **R**, dotado de un producto escalar, es decir, de una forma bilineal simétrica $u \cdot v$ tal que $u \cdot u > 0$ para todo vector $u \neq 0$ ” (Choquet, 1964, p.264-269).

Queda en evidencia desde estas miradas, Revuz (1971), Choquet (1964) y Artín (1963), la posibilidad de transitar desde el cartesiano $\mathbf{R}^2$ al espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ con la idea, probablemente, de establecer el álgebra lineal como motor para el desarrollo de la geometría, aunque desde el trabajo de Gueudet-Chartier (2000; 2003) se hace notar que la geometría, desde la intuición geométrica, puede ser un elemento a tener en cuenta para avanzar en el tratamiento del álgebra lineal a nivel universitario. Luego, la idea es dotar de una intuición geométrica a la construcción del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$, desde el tránsito del plano cartesiano al cartesiano $\mathbf{R}^2$, una apuesta que se intentará defender a la luz de lo antecedentes que se irán presentando.

1.3.- Un postura que se desprende del análisis histórico epistemológico respecto de una primera unificación de los conceptos ligados al álgebra lineal

En atención a los distintos elementos matemáticos que se mencionaron en el análisis histórico epistemológico, a saber, ecuaciones lineales, concepto de función, la idea de conjunto, el concepto de estructura algebraica, se intentará establecer una articulación de todas estas ideas desde la resolución de una ELH. En la Figura 6, se aprecia un panorama conceptual que engloba los distintos conceptos matemáticos ya mencionados en vinculación con una ELH. Además está en sintonía con el período entre 1630 y 1890 donde se pone de relieve la necesidad de un cálculo geométrico desde una mirada algebraica (Grattan-Guinness, 1984; Hernández, 1972; Dorier et al., 1997).

En el diagrama de la Figura 5, (1) denota un punto de partida, desde la resolución de una ELH o un sistema de ecuaciones homogéneo, para conectar con la estructura de espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ desde el CSELH, y la idea de función como se aprecia de (2) a (7). Por otro lado de (8) a (10), se considera una línea más geométrica para conectar con pares ordenados, rectas vectoriales, dilatación o contracción de un segmento dirigido, traslación de puntos y así articular un cartesiano $\mathbf{R}^2$ con el plano cartesiano y un plano vectorial. En definitiva la estructura algebraica en sintonía con un modelo geométrico. En Rodríguez y Parraguez (2013) se puede encontrar una explicación detallada del diagrama.

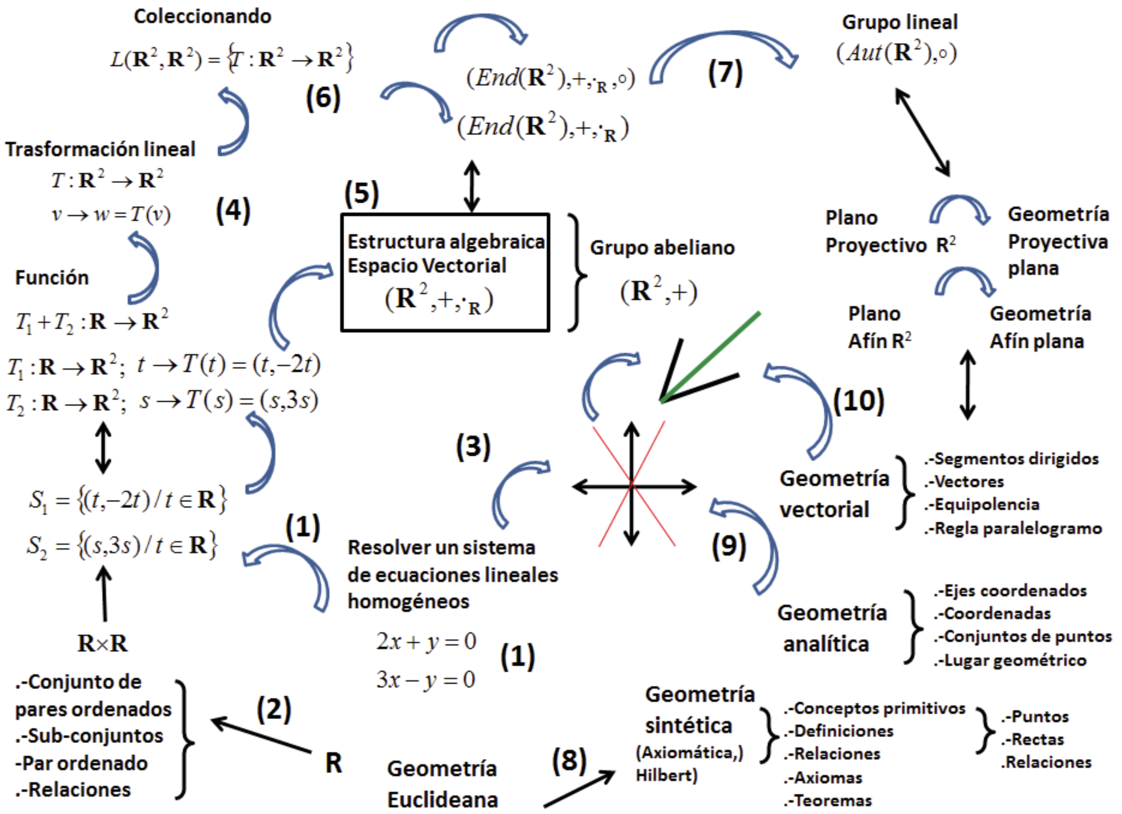


Figura 5: Panorama de aquellos conceptos matemáticos que se pueden ligar a partir de una ecuación lineal homogénea de dos incógnitas.

Es importante hacer notar que las ideas plasmadas en la Figura 5 se pueden extender para la construcción del espacio vectorial $\mathbf{R}^3$ desde el trabajo de las ELH de tres incógnitas, rescatando la construcción del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ en articulación con el espacio cartesiano para avanzar al cartesiano $\mathbf{R}^3$ y construir probablemente así, como una posibilidad, el espacio vectorial $\mathbf{R}^3$, donde el CSELH, CSELNH y las operaciones binarias son el punto de partida para comenzar a construir los espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$. Aspecto que se trabajará más delante con el detalle y la precisión que corresponda desde el apartado 4.1 en adelante.

CAPÍTULO II: PROBLEMÁTICA, OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN Y ESTADO DEL ARTE

2.1.- La Problemática que subyace a esta investigación

El tránsito del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^3$ no está exento de dificultades para los aprendices en estos tópicos (Robert & Robinet, 1987; Rogalski, 1991). Al respecto se puede señalar que, en relación al concepto de dependencia lineal, en Dorier (2000) se describen algunos inconvenientes que presentan algunos estudiantes para extender dicha idea del plano $\mathbf{R}^2$ al espacio $\mathbf{R}^3$, a modo de ejemplo, sobre la base de que dos vectores en $\mathbf{R}^2$ no colineales son linealmente independientes, la mayoría de los estudiantes encuestados contestaron que tres vectores no colineales en $\mathbf{R}^3$ también han de serlo.

Por otro lado, los espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ son de las estructuras algebraicas más utilizadas en todas las ramas de la ciencia. En física e ingeniería se utilizan recurrentemente para modelar el espacio matemático, las funciones periódicas, el conjunto solución de ecuaciones lineales, ecuaciones diferenciales y los polinomios, por citar algunos ejemplos. Por otro lado, dada la riqueza de su estructura algebraica, los espacios vectoriales en cuestión son muy utilizados para ejemplificar cuestiones del álgebra lineal: combinaciones lineales, base, conjunto generador, transformaciones lineales, dual, entre otros.

Probablemente quienes los utilizan, en el proceso de enseñanza, no se detienen en su construcción y sólo apelan a ellos como entes para ejemplificar las nociones ligadas al aprendizaje y enseñanza del álgebra lineal, aunque es probable que se atienda a su articulación y la relación de dichos espacios vectoriales con el plano, el espacio cartesiano, cartesianos $\mathbf{R}^2$ y cartesiano $\mathbf{R}^3$ desde su utilización al parecer no es suficiente.

Atendiendo al último punto, en el párrafo anterior, es que esta investigación se ha focalizado en la construcción cognitiva de los espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$, tomando en cuenta algunas experiencias exitosas que consideraron su utilización en la enseñanza de los conceptos ligados al álgebra lineal (Harel, 1990), esfuerzo que está en relación con los antecedentes que reportaron investigadores franceses en atención a las dificultades de estudiantes universitarios de Francia y Marruecos en relación a estas nuevas teorías que se les presentaba, la teoría de los espacios vectoriales (Robinet, 1996).

A la luz de lo que se ha indicado, se declara que el propósito de esta investigación es atender la diversidad de miradas para los conceptos de vector en los espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$, desde las relaciones que subyacen; a veces un punto (geometría ordenada), un par o trío ordenado (plano y espacio cartesiano), otras un segmento dirigido o flecha (Geometría Vectorial), incluso hasta puede llegar a ser una matriz (espacios vectoriales isomorfos a $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$); cuestión que desorienta a un aprendiz y probablemente requiera de un trabajo y una mirada en espiral de estos aspectos que se han mencionado.

2.2.-Objetivos y preguntas de investigación

Objetivos Generales

- Validar la construcción cognitiva de los conceptos espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y espacio vectorial $\mathbf{R}^3$, desde sus respectivos cartesianos
- Diseñar una propuesta didáctica para la enseñanza y aprendizaje, a nivel universitario, del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ en función de los antecedentes que se desprendan de la DG.

Objetivos Específicos

- Proveer evidencia empírica de las construcciones y mecanismos mentales que intervienen en la construcción cognitiva de los espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$.
- Diseñar y envasar actividades, con y sin uso de software, para su implementación en el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto espacio vectorial $\mathbf{R}^2$.

Preguntas de Investigación

1) ¿Qué construcciones y mecanismos mentales intervienen en la construcción cognitiva del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ a partir del plano cartesiano?
2) ¿A través de qué elementos se da la articulación del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ con el espacio cartesiano, para construir cognitivamente el espacio vectorial $\mathbf{R}^3$?

2.3.- Algunos antecedentes sobre el estado de arte de la investigación en la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal y los espacios vectoriales

A continuación, una breve reseña a un línea de investigación en álgebra lineal, liderado por investigadores de distintas nacionalidades, franceses, canadienses, norteamericanos, por citar algunos, que consideró un análisis histórico y epistemológico para situar cronológicamente aquellos conceptos ligados al álgebra lineal, describiendo tanto la evolución matemática de éstos como su relación con otros conceptos matemáticos (Robinet, 1986; Harel, 1989a, 1989b; Rogalsky, 1991; Dorier, et al., 1997).

La variedad de miradas y los distintos énfasis que se imprimieron a dicho proceso investigativo procura considerarlo como punto de referencia para rescatar aquellos aspectos que están en sintonía con esta investigación que se está reportando, la construcción cognitiva de los espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$. En este sentido cobra suma importancia lo relativo a la génesis de la teoría de los espacios vectoriales (Dorier, 1995b; Dorier, et al., 2001).

2.3.1.- De las dificultades del álgebra lineal en estudiantes de pregrado

Entender, desde un análisis histórico epistemológico, el por qué los estudiantes de pregrado tienen dificultades con el aprendizaje del álgebra lineal a nivel universitario, es una tarea que nos remite en el tiempo para comprender, por ejemplo, el proceso de axiomatización de esta e intentar dimensionar desde ahí los esfuerzos que ello significó para dar forma a esta disciplina, al alero del concepto de espacio vectorial. Además de rescatar aquellos elementos que dicen relación con su naturaleza unificadora y generalizadora de conceptos que incide de alguna manera en su enseñanza y aprendizaje. (Dorier, 1995a; Robinet, 1986; Dorier, 1995b; Dorier et. al; 1997)

Las investigaciones, en el sentido ya mencionado en el párrafo anterior, han permitido distinguir dos tipos de dificultades en la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal, una a aspectos conceptuales, su estructura, y la otra respecto de los procesos cognitivos necesarios para su comprensión y desarrollo como asignatura a nivel universitario. Lo anterior, en estrecha relación con los aspectos que dieron origen a la axiomatización del álgebra lineal, desde el concepto de espacio vectorial, hacia 1930 (Dorier, 1995a; Dorier, et al., 1997). Cabe hacer notar que la variedad de conceptos que se ligaron bajo un comportamiento común demandó de un nuevo nivel de abstracción que probablemente se transfiere a los procesos mentales requeridos para el proceso de enseñanza aprendizaje de esta (Dorier, 1995b; Dorier et al., 1997)

En el sentido anterior, Hillel (2000) sostiene que la enseñanza formal de los espacios vectoriales, en un curso de álgebra lineal para estudiantes de pregrado, no se justifica. Uno de los argumentos que aduce es que, por un lado, se aúnan esfuerzos para establecer el isomorfismo entre un espacio de dimensión "*n*" cualquiera y el espacio vectorial $\mathbf{R}^n$, para finalmente terminar trabajando con los espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$ y $\mathbf{R}^4$. Como producto de sus investigaciones Hillel, identificó tres tipos de lenguaje que son usados en el álgebra lineal, el geométrico ligado a $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$, el algebraico asociado a $\mathbf{R}^n$ y el abstracto asociado a los espacios vectoriales en general (Hillel, 2000; Hillel, et al., 1994)

Otro foco a destacar en estas investigaciones (Dorier, 2000), es lo referido a las dificultades que presentaron y manifestaron estudiantes universitarios en Francia respecto del excesivo uso del formalismo, en el sentido del gran número de nuevas definiciones y relaciones en estas nuevas teorías, los espacios vectoriales y el álgebra lineal, en los cursos que debían cursar. Haciendo notar que muchas de ellas muy poco tenían que decir a la hora de resolver problemas. Para estos estudiantes, un catálogo de definiciones y procedimientos sobre los cuales sólo había que reproducir procedimientos (Rogalsky, 1991; Robinet, 1986).

Se acuña de esta manera un nuevo constructo en la didáctica del álgebra lineal, el "obstáculo del formalismo". Si bien los estudiantes lograban desenvolverse adecuadamente con estas nuevas ideas, por ejemplo, determinar si dos o más vectores eran linealmente independientes o escribir un vector como combinación lineal de otros vectores. La mayoría de los estudiantes manifestaron no lograr entender el sentido de estas nuevas ideas y tampoco poder conectar con aquellos conceptos elementales como son, por ejemplo, los sistemas de ecuaciones lineales o bien entenderlas desde un contexto geométrico (Dorier, et al., 1997; Dorier, 2000).

Es probable que lo difícil del aprendizaje del álgebra lineal como objeto matemático por parte de un estudiante de pregrado se relaciona, por un lado, con la variedad de conceptos que se ligan en torno a la idea de vector y por otro, el nivel de abstracción que se requiere para la comprensión de esta. Entendiéndose que la construcción axiomática del álgebra lineal demandó, por parte de la comunidad matemática, un esfuerzo considerable en términos de unificación conceptual y, por ende, de procesos de abstracción para ligar diversos objetos matemáticos, instalándose de esta manera una dificultad para su comprensión, si no hay una *"flexibilidad cognitiva"* para entender el sentido de este proceso de construcción (Alves Dias, et al., 1995; Sierpinska, 2000; Hillel, 2000).

Por otro lado, se debe lidiar, dada la naturaleza de los vectores, con distintos tipos de lenguajes: algebraico, geométrico y abstracto (Pavlopoulou, 1993; 1994; Alves Dias, et al., 1995). Además, la variedad de textos que se dispone en relación al tratamiento del álgebra lineal se puede favorecer y a la vez dificultar el aprendizaje de esta, pues el énfasis que se pueda dar a una idea, por las consideraciones o motivaciones particulares de un autor, puede inducir a nociones erróneas en la mente del estudiante al asumirla de manera aislada. Para tener una panorámica global de los énfasis descritos, en la Tabla N° 6, se dan a conocer los distintos enfoques que se realizaron para dar cuenta de las dificultades en la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal y los intentos por buscar soluciones al respecto.

Tabla N° 6: Cuatro énfasis en las investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal.

TABLA N°6 Investigaciones sobre las dificultades en el aprendizaje y enseñanza del álgebra lineal			
Diagnóstico Dificultades	**Registros y lenguajes**	**modo de pensar en la comprensión del álgebra lineal**	**La enseñanza del álgebra lineal**
Robert, Robinet y Rogalski Hay un problema con, y el uso del formalismo, si bien se entiende aspectos generales, se evidencia problemas en la interpretación de los conceptos generales en contextos más específicos (geométrico y sistemas de ecuaciones lineales)	**Hillel, Pavlopoulou y Alves-Dias** Reportan sobre los registros de representación y la conversión a estos. Un aspecto que debe estar presente en la enseñanza y los textos disponibles..	**Hillel, Sierpinska y Harel** Sus investigaciones apuntan a estimular una forma de pensamiento. Se habla de un pensamiento práctico y un pensamiento teórico, hay una imposibilidad de transitar y articular que se manifiesta por una rigidez al pensar (mecanización)	**Harel** Propone, dados los antecedentes de las investigaciones, tres principios para la enseñanza del álgebra lineal que se presentarán a continuación. La investigación aporta resultados en relación a que las dificultades que manifiestan los estudiantes se pueden explicar sobre la violación de estos principios.

2.3.2.- Antecedentes sobre la enseñanza y aprendizaje de los espacios vectoriales

Para Dorier (1995a, 1995b) el concepto de espacio vectorial se sitúa en la categoría de concepto unificador, formalizador y generalizador, en el sentido que su aparición en el escenario matemático obedece a la necesidad de englobar un conjunto de conceptos abstractos en torno a algunas particularidades que comparten y dan origen a una nueva estructura.

> "Por lo tanto, puede sugerirse que el éxito de la axiomatización [del concepto de espacio vectorial] no provino de la posibilidad de llegar a resolver problemas matemáticos no resueltos, sino de su poder de generalización y unificación y, consecuentemente, de la simplificación en la búsqueda de métodos para resolver problemas en matemáticas. Como una consecuencia, este acercamiento marcó un nuevo nivel en la abstracción, el concepto de espacio vectorial es una abstracción de objetos ya abstractos, como los vectores geométricos, *n*-uplas, polinomios, series o funciones."(Dorier, 1995b, p. 176)

Por otro lado Harel (1987, 1989a, 1989b, 1990) da cuenta de las dificultades de los estudiantes al ser introducidos repentinamente a los conceptos básicos de los espacios vectoriales desde una perspectiva netamente algebraica, razón por la cual se dificulta la comprensión de estos. Para subsanar tal deficiencia, desde el punto de vista de su enseñanza, Harel propone una secuencia que está basada en lo que denomina el "principio de representación múltiple", con el fin de incorporar un componente geométrico-algebraico y permitir a los estudiantes una representación a las ideas a trabajar.

Dicha propuesta considera tres fases; en la primera se discuten algunos conceptos básicos de la teoría de espacios vectoriales usando modelos geométricos sin coordenadas; en la segunda fase se introducen los conceptos de la fase anterior, desde los espacios $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$, para llegar a establecerlos a $\mathbf{R}^n$, desde el trabajo con las *n*-uplas. En la tercera fase, se discuten los espacios vectoriales de dimensión menor igual a tres con elementos indefinidos. En esta última fase se pretende que los estudiantes puedan usar las representaciones gráficas aprendidas en la primera fase para una comprensión cabal de los conceptos basales de un espacio vectorial y poder así resolver problemas, en un sentido amplio.

Otra aproximación al trabajo de los espacios vectoriales, desarrollada recientemente, está basada en la teoría APOE (*Acción-Proceso-Objeto-Esquema*). Un grupo de investigadores interesados en la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática a nivel universitario, RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics

Education Community), ha desarrollado algunos materiales de enseñanza en materias como precálculo, cálculo, matemáticas discretas y álgebra abstracta. Cabe destacar que el grupo RUMEC establece su propuesta en base a críticas al grupo LACSG (Linear Algebra Curriculum Study Group) (Carlson et al., 1997), que por los años 1990 se aboca a reformular los planes de estudio para la enseñanza del álgebra lineal a nivel universitario (Dorier, 2000; Arnon et al., 2014).

Después de las críticas publicadas por Dubinsky (1997) a las recomendaciones del grupo LACSG sobre la enseñanza del álgebra lineal, RUMEC ha puesto más atención a la problemática del aprendizaje y la enseñanza del álgebra lineal y ha preparado materiales de enseñanza donde materializan sus concepciones didácticas (Weller et al., 2002; Arnon et al., 2014). En este texto (Weller et al., 2002) se propone una aproximación a la enseñanza del concepto de espacio vectorial diseñando programas de computadora para que los estudiantes exploren sus propiedades.

Una exposición de su fundamentación teórica enmarcada en la teoría APOE, fue publicada en Trigueros & Oktaç (2005), quienes proponen una descomposición genética preliminar para construir el *esquema* espacio vectorial, desde cuatro *esquemas*: el de axioma, el de operación binaria, el de función y el de conjunto. Investigación que tiene una relación directa con esta indagación tanto en el tema como en el marco teórico que la sustenta. Las autoras utilizan la teoría APOE para describir las construcciones mentales que los estudiantes realizan mientras aprenden el concepto de espacio vectorial. Para ampliar sobre este trabajo y otros se puede acceder a una recientemente publicación sobre la teoría APOE que incluye su génesis, sus fundamentos, la descripción de sus componentes basales y los focos de investigación, incluyendo los nuevos planteamientos que se han hecho a esta teoría (Arnon, et al., 2014).

2.3.3.- Otros antecedentes asociados a conceptos básicos del álgebra lineal y el trabajo con los espacios vectoriales R^2 y R^3: Un segundo foco de investigaciones

A continuación un segundo foco de investigaciones, respecto de los conceptos ligados al álgebra lineal, cuyas problemáticas y resultados están en sintonía con los distintos aspectos históricos epistemológicos que se han venido documentando y describiendo, así como también de las dificultades que manifiestan los estudiantes toda vez que se ven enfrentados a situaciones que involucran los conceptos asociados al álgebra lineal y en particular, al de los espacios vectoriales. La idea de esta breve revisión, es rescatar aquellas consideraciones y orientaciones que vayan en la dirección de esta investigación.

Para comenzar, atendamos a la investigación que desarrolló Andreoli (2009) para indagar en los obstáculos que presentaban estudiantes de primer año de universidad en relación a los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores, desde conceptos más elementales pero no menos importantes como son los sistemas de ecuaciones lineales, en estudiantes de ciencias de una universidad del nordeste de Argentina, a la luz de las dificultades que venían manifestando estos en la facultad de ciencias. Cabe hacer notar que además se enfocó en indagar en las concepciones que tenían profesores que trabajaban con estudiantes, cuyas edades fluctuaban entre 14 y 17 años, respecto de los conceptos ya indicados y de las concepciones de enseñanza de dichos conceptos con profesores que trabajaban en la faculta de ciencias donde centró su investigación.

Identificó algunas dificultades al entrevistar a estudiantes de bioquímica entre 18 y 21 años, por ejemplo, respecto de la condición necesaria pero no suficiente para resolver un sistema de *"n"* ecuaciones lineales y de *"n"* incógnitas y el condicionar la posibilidad de solución única de un sistema de ecuaciones, la mayoría de los estudiantes encuestados se limitaron sólo a que ninguna de las ecuaciones fuera la amplificada de la otra. Respecto del primer grupo de profesores, estos evidenciaron algunas dificultades al tener que construir sistemas de ecuaciones que se indeterminan, lo que según Andreoli (2009) es un aspecto fundamental para trabajar el concepto de dependencia lineal de vectores.

En relación a las concepciones de los profesores de la facultad de ciencias, ellos hacen notar la importancia de los conceptos de dependencia e independencia lineal en la formación de sus estudiantes, esgrimiendo diversas razones como la universalidad de dichas ideas, por su aplicabilidad a distintos problemas, la variedad de registros que estimula su trabajo como ideas matemáticas. Además argumentan que las dificultades de los alumnos pasan por la falta de conocimientos previos, el aferrarse a las definiciones sin una comprensión, el formalismo que está siempre presente y la abstracción que se necesita emplear para avanzar en las ideas (Andreoli, 2009)

Por otro lado, en el trabajo de Soto (2003) se plantea como objetivo identificar las dificultades de los estudiantes al momento de construir y utilizar los conceptos, denominados básicos en el álgebra lineal, a saber: combinación lineal, dependencia e independencia lineal, conjunto generador, sub-espacio generado, base y dimensión; todo ello en torno a los espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$. Lo anterior, considerando el tratamiento y la conversión de distintos registros de representación semiótica (Duval, 1995), el registro gráfico, vectores geométricos; el registro algebraico, las *n*-uplas por indicar algunos (Soto, 2003).

En un estudio piloto, para establecer con mayor precisión el foco de su investigación que apunta a identificar las dificultades en relación a la conversión de registros semióticos, se desprenden algunas cuestiones tales como:

> "Los resultados generales obtenidos en los estudios preliminares revelan que la dificultad para convertir representaciones gráficas en algebraicas es sobresaliente, pero esta dificultad es más severa cuando el problema está relacionado con situaciones de vectores" (Soto 2003, p.11).

Lo anterior deja entrever que hay una dificultad manifiesta en el paso de una representación gráfica a una algebraica, cuestión que se agudiza a la hora de trabajar con vectores geométricos. Para ello se consideró dentro de las actividades el uso del software CABRI, del cual se establecen algunas conclusiones que ponen de manifiesto que el uso de un software por sí solo no es el fin para la solución a los problemas planteados, sino que es un medio a tener en cuenta en el diseño de situaciones (Soto, 2003.

En general las conclusiones se centran en las dificultades en el tratamiento y la conversión entre los distintos tipos de registros, en particular el registro gráfico y algebraico y la conversión entre estos. Además hace notar que muchas veces se trabaja con dos registros de representación gráfica a nivel universitario y no se explica la diferencia entre éstos. El registro vectores libres dificulta la conversión gráfico algebraica o gráfico numérica (Soto, 2003)

Otras investigaciones como las de Maracci (2005, 2006) reportan sobre las dificultades y errores de los estudiantes graduados y no graduados al resolver problemas de álgebra lineal, donde se da cuenta de algunas dificultades que tienen los estudiantes con nociones básicas de la teoría de espacios vectoriales, analizadas en términos de la dualidad proceso objeto de Sfard (1991).

2.4.- Importancia de indagar en la problemática planteada

Considerando que la enseñanza del álgebra lineal y en particular los espacios vectoriales forma parte del plan de estudio de diversas carreras universitarias chilenas, y otras seguramente, y que además su aprendizaje requiere de procesos cognitivos que demandan un alto nivel de abstracción, dado los antecedentes que se han ido reportando en los apartados anteriores, es necesario atender a su aprendizaje de manera efectiva.

Por otro lado, si cualquier espacio vectorial de dimensión dos o tres es isomorfo a $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ y el tránsito de dichos espacios incide a la generalización de $\mathbf{R}^n$ sobre $\mathbf{R}$; es por todo ello que se ha considerado necesario y relevante indagar en la construcción cognitiva de dichos conceptos y, además, poder desprender algunos elementos que permitan delinear una propuesta didáctica que fomente un trabajo efectivo para los espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$, a nivel universitario, y en particular que estimule el tránsito entre estos, sin perder de vista la posibilidad de establecer un puente con la matemática escolar.

Si a lo anterior agregamos que los conceptos que se trabajan en el álgebra lineal, en particular los espacios vectoriales, se relacionan con otras áreas de la matemática como por ejemplo cálculo en una o más variables, ecuaciones diferenciales, es un aliciente para pensar en lo importante de responder a las preguntas que se han planteado en esta investigación.

Por otro lado, a la luz de los antecedentes que se han entregado, fundamentalmente lo referido al análisis histórico epistemológico, se hace necesario promover la construcción de los espacios vectoriales en cuestión, atendiendo por un lado a su papel unificador y sistematizador. Rescatando además, su connotación geométrica que está impresa desde su gestación como tal; considerando que la primera presentación axiomática de un espacio vectorial, que realizó Peano en 1888, aparece más bien para sustentar y poner de relieve un nuevo cálculo geométrico que está en sintonía con otros trabajos que se venían desarrollando, en la misma línea desde 1636 en adelante. Considerando además que Peano intenta rescatar las ideas de Grassmann, referente a los cuaterniones, las que tienen un alcance más amplio a las ideas que propone Peano; entendiendo que las ideas de Grassmann tienen una incidencia importante en el desarrollo del álgebra lineal (Dorier et al., 1997).

Por último, desde un punto de vista de una estructura algebraica, el concepto de grupo está ligado a un espacio vectorial y además conecta con la geometría en el sentido de Klein (1978), la cual puede ser vista como la acción de un grupo sobre un conjunto; por otro lado una de las posibles definiciones de espacio vectorial considera la acción de un cuerpo sobre un grupo. (Aburto, et al., 2008; Citanivich, et al., 1999)

CAPÍTULO III: Marco teórico

3.1.- Teoría APOE: Una descripción de sus elementos basales

El marco teórico que sustenta esta investigación es la teoría APOE, la cual trata acerca de la construcción del conocimiento matemático y su desarrollo en la mente del individuo. Dicha teoría está sustentada en el concepto de abstracción reflexiva de Piaget. Dubinsky (1996), quien creó esta teoría y la desarrolló en colaboración con el grupo RUMEC, manifiesta lo siguiente:

> "El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizando en esquemas a fin de manejar las situaciones" (Dubinsky, 1996, p.7).

Si se analiza en detalle la cita anterior, se pueden desprender algunos elementos basales que están involucrados en la construcción cognitiva de un concepto matemático, a saber, las construcciones mentales: *acción*, *proceso*, *objeto* y *esquema*. Además se debe tener en cuenta tipos de abstracción reflexiva, desde una perspectiva piagetana (Dubinsky, 1991a, 1991b), a saber: *interiorización*, *coordinación*, *reversión*, *encapsulación* y *desencapsulación* que corresponden a los mecanismos mentales que dan origen a las construcciones mentales ya mencionadas (Arnon et al., 2014; Dubinsky et al., 1994; Asiala et al., 1996).

En el diagrama de la Figura 6 se puede observar la relación entre las construcciones y los mecanismos mentales que se han mencionado. Es importante hacer notar que si bien el diagrama sugiere una secuencialidad entre éstas, en la práctica dichas construcciones y mecanismos, para la construcción de un concepto matemático, no se dan de manera lineal (Arnon et al., 2014).

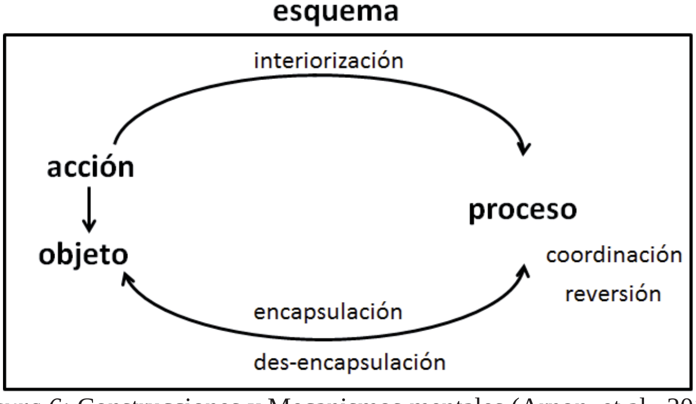


Figura 6: Construcciones y Mecanismos mentales (Arnon, et al., 2014).

Si hacemos una interpretación al diagrama de la Figura 6, se puede decir que para lograr una *construcción esquema* de un concepto matemático es necesario comenzar trasformando un cierto conocimiento para dar paso a construcciones mentales *acción*, *proceso* y *objeto* a través de los respectivos mecanismos mentales *interiorización*, *coordinación*, *reversión*, *encapsulación* y *desencapsulación*.

Por ejemplo, pensamos en la *construcción esquema* CSELH. Obtener una solución de una ELH da paso a la *construcción acción* asociar números reales a los términos de una ELH. Dicha *construcción acción* se *interioriza* en la *construcción proceso* solución de una ELH, donde relacionar números con una tipo de variable, dependiente e independiente, actúa como mecanismo de *interiorización*.

La *construcción proceso* solución de una ELH se *coordina* con la *construcción proceso* par ordenado para dar paso a la *construcción proceso* todas las soluciones, donde la utilización de un parámetro actúa como *mecanismo* de *coordinación*. La *construcción proceso* todas las soluciones se *encapsula* en la *construcción objeto* conjunto de todas las soluciones, donde asociar un conjunto con todas las soluciones de una ELH, a través del uso de un cuantificador, actúa como *mecanismo* de *encapsulación*.

Por otro lado, la construcción *esquema* CSELH requiere de los *procesos* todas las soluciones de una ELH, segmento dirigido y del *objeto* operación binaria donde dichas construcciones pueden relacionarse a través de una propiedad, la dilatación y contracción de un vector que puede caracterizarse a través de la ponderación por un escalar.

Una DG modela y procura describir de manera preliminar o hipotética, mientras esta no se valide, las construcciones y mecanismos mentales que estudiantes requieren para aprender un concepto matemático específico. Dicha hipótesis que plantea la DG se basa en distintas componentes que procuran su configuración como modelo, las concepciones del investigador, consideraciones epistemológicas del concepto en cuestión, resultados de otras investigaciones, concepciones de enseñanza. Es importante hacer notar que la DG no es única (Arnon, et al., 2014).

Para una mayor comprensión de lo que es una DG y de las construcciones y mecanismos mentales se recomienda revisar (Arnon, et al., 2014) y algunas investigaciones que se han realizado en el ámbito del álgebra lineal desde la teoría APOE (Trigueros & Oktaç, 2005; Manzanero et al., 2007; Kú et al., 2008; Roa & Oktaç, 2009; Parraguez, 2009; Parraguez & Oktaç, 2010). A continuación, algunos ejemplos, para ir delineando el énfasis que se dará a esta propuesta en relación a la construcción cognitiva de los espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ desde la teoría APOE. A continuación una descripción de las construcciones y mecanismos mentales desde ejemplos asociados al trabajo con una ELH y una ELNH.

> "An Action is external in the sense that each step of the transformation needs to be performed explicitly and guided by external instructions; additionally, each step prompts the next, that is, the steps of the Action cannot yet be imagined and none can be skipped" (Arnon et al., 2014,p.19).
> "Cabe recalcar que la construcción de acciones viene a ser crucial al inicio de la construcción de un concepto" (Kú et al., 2008).

Por ejemplo, asociar un número real a una de las incógnitas de la ELH, para obtener una solución de ésta o asociar los coeficientes de una ELH, en un orden dado, con una solución de dicha ecuación, son ejemplos de una *construcción acción*.

> "As an individual repeats and reflects on an action, it may be interiorized into a mental process. A process is a mental structure that performs the same operation as the action being interiorized, but wholly in the mind of the individual, thus enabling her or him to imagine performing the transformation without having to execute each step explicitly" (Dubinsky en Arnon et al., 2014, p.21).

La *acción* asociar un número real a una de las incógnitas de una ELH de dos incógnitas *interioriza* en la *construcción proceso* solución de una ELH, donde asociar los números reales con variables actúa como mecanismo de *interiorización*.

> "Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un *proceso* como un todo, realiza las transformaciones (ya sean *acciones* o *procesos)* que pueden actuar sobre él y puede construir de hecho esas transformaciones, entonces ha encapsulado este *proceso* en un objeto" (Asiala et al., 1996)".

La *construcción proceso* todas las soluciones se *encapsula* en la *construcción objeto* conjunto de todas las soluciones, donde formar un conjunto con todas las soluciones a través del uso de un cuantificador que actúa como mecanismo de *encapsulación*.

Dubinsky desarrolla posteriormente el concepto de esquema:

> "Con respecto al esquema, se puede decir que un esquema para un concepto en matemáticas es una colección coherente de acciones, procesos y objetos y otros esquemas relacionados entre sí, consciente o inconscientemente en la mente de un individuo, que se

> pueden utilizar en una situación problemática que tiene relación con ese concepto matemático” en (Kú et al., 2008).
> “La coherencia se refiere a que el estudiante puede decidir si alguna situación matemática puede trabajarse utilizando el esquema”. (Arnon, et al., 2014; Kú et al., 2008)

Si se piensa, por ejemplo, en una o más ELH en $\mathbf{R}^2$ y a partir de las soluciones de dichas ecuaciones se relaciona el método del paralelogramo, donde la ponderación por escalar da cuenta de una dilatación o contracción de un segmento dirigido y, además, si se relacionan dos vectores asociados a una ELH en $\mathbf{R}^2$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas, es probable que se esté en presencia del CSELH como una *construcción esquema*.

Para concluir las ideas ya expuestas, es importante volver a insistir en que las construcciones mentales *acción*, *proceso* y *objeto* se dan en forma secuencial, aunque esto no siempre ocurre en la construcción de un *esquema* (Trigueros & Oktaç, 2005; Arnon, et al., 2014).

> “La construcción de un concepto matemático requiere la construcción de concepciones de los tipos antes mencionados, pero esas concepciones no siguen necesariamente una secuencia lineal. Un individuo puede tener durante mucho tiempo concepciones intermedias o incluso tener una concepción de un tipo para algunos aspectos de un concepto y de otro para otros aspectos del concepto. Sin embargo, hay que subrayar que la forma de trabajo que un individuo pone de manifiesto frente a distintas situaciones problemáticas es diferente cuando responde de una manera que puede caracterizarse en la teoría como un *proceso*, un *objeto* o bien una *acción*. (Trigueros & Oktaç, 2005)

3.2.- Del Ciclo de Investigación de la teoría APOE, una variante del ciclo

La teoría APOE provee de un ciclo de investigación que contempla tres etapas, de las cuales, en la Figura 8, se presenta una variante que ha adoptado una comunidad de investigadores mexicanos, desde la matemática educativa, a saber: análisis teórico, diseño y aplicación de instrumentos y, análisis y verificación de datos. En Arnon et al., (2014) se puede ver la variante del ciclo de investigación que trabaja el grupo RUMEC. A saber Análisis teórico, Diseño e implementación de clases y Recolección y análisis de datos (Arnon, et al., 2014, p.94).

Para esta investigación se trabajó según el ciclo que muestra la Figura 7, agregando la implementación de clases para dar cuenta de la viabilidad y los alcances de la DG del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$, en un aula universitaria, respecto de las construcciones y mecanismos mentales dispuestos en ella a la luz del ciclo de enseñanza que provee la teoría APOE. Más adelante, en el apartado 5.5, se presentan algunos detalles de dicha implementación en el aula. Cabe hacer notar que el ciclo de investigación que propone APOE está basado en un diseño de investigación cualitativa (Asiala et al., 1996, p.4)

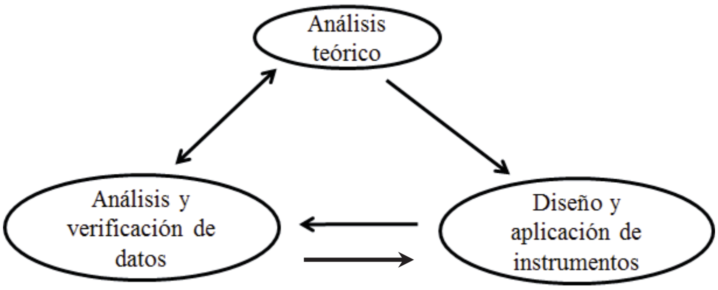


Figura 7: Ciclo de Investigación de la teoría APOE (Asiala, et al. 1996).

Análisis teórico

El análisis teórico, corresponde a la DG preliminar que se obtiene para los conceptos espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ y que, además, incluyen aquellos conceptos que están relacionados con las construcciones y mecanismos mentales que se explicitan. Esta DG preliminar está en sintonía con las concepciones del propio investigador respecto de aquellas construcciones y mecanismos que hacen viable la construcción de los conceptos que interesan en este estudio, en particular las *construcciones acción* y *construcciones proceso*, además de las concepciones de enseñanza sobre los conceptos que se quieren construir, los resultados de otras investigaciones y los aspectos históricos epistemológicos que se logren pesquisar de los conceptos en cuestión (Arnon, et al., 2014).

Diseño y aplicación de instrumentos

Una vez establecida(s) la(s) DG preliminar(es) es necesario validarla(s), es decir, mostrar evidencia empírica de las construcciones y mecanismos mentales que se han dispuesto en ella(s). Para ello es necesario diseñar y aplicar instrumentos que permitan recabar información para luego poder analizarla desde lo que se ha declarado en la(s) DG preliminar(es), de modo de reflejar explícitamente las construcciones y mecanismos mentales mediante los cuales los estudiantes pueden construir y aprehender un concepto matemático. En esta investigación, el espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$.

Para esta investigación cobran relativa importancia los cuestionarios, cuyas preguntas deben abarcar sectores de la(s) DG para ir dando cuenta de manera gradual de la viabilidad de ésta(s) en términos locales y luego hacer un análisis más global, dando cuenta de las construcciones y mecanismos mentales dispuestos preliminarmente. Las entrevistas permitirán abordar aquellos aspectos que manifiestan los estudiantes, desde los cuestionarios, que amerita indagar de manera más profunda. En nuestro caso, como se detallará más adelante, página 162, para dar cuenta de la incidencia del CSELNH en la *encapsulación* de las *construcciones proceso* cartesiano $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$, respectivamente, en las *construcciones objeto* espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$.

Análisis y verificación de datos

Esta componente lleva al análisis de los datos empíricos obtenidos en la segunda etapa. Los resultados obtenidos con la aplicación de los instrumentos: cuestionarios, entrevistas deben ser analizados desde la(s) descomposición(es) genética(s) preliminar(es) identificando qué elementos no han sido considerados o cuáles de las construcciones dadas hipotéticamente no se perciben.

En general el análisis tiene que ser dado con nitidez. Es decir, mostrando ejemplos de estudiantes quienes parecen comprender esto y otros que no lo hacen, y luego discutir si la diferencia radica en la presencia o falta de una construcción mental en particular que aparece en la(s) DG. Solamente entonces se puede llegar a la conclusión de que los datos soportan esta construcción mental particular en la(s) Descomposición(es) Genética(s). Esto tiene que ser hecho para todas las construcciones mentales específicas con las que cuenta el análisis teórico.

En definitiva, la teoría APOE establece que cada tópico matemático a investigar requiere de una DG, es decir, se debe establecer de manera hipotética un modelo que ayude a construir ese conocimiento matemático específico, poniendo de relieve construcciones y mecanismos mentales que están ligados entre sí; para luego, como una posibilidad a seguir, aplicar dicho modelo desde el uso de cuestionarios y entrevistas a estudiantes que hayan tenido la experiencia de trabajar, con un buen desempeño académico en dichos tópicos, para así mostrar evidencia empírica de las construcciones y mecanismos mentales que se han dispuesto en la DG y dar cuenta de la viabilidad de esta.

Para descomponer genéticamente un concepto se requiere actuar sobre un objeto matemático realizando trasformaciones a este para dar cuenta de las *acciones* y los *procesos* que se requieren para construir dicho concepto. Aunque no siempre es fácil distinguir en la teoría una *acción* de un *proceso*, porque la distinción depende más bien de la relación que estas transformaciones guardan entre sí (Arnon, et al., 2014).

3.3.- La Teoría APOE y el ciclo de enseñanza ACE

Dubinsky junto al grupo RUMEC han provisto a la teoría APOE de un ciclo de enseñanza denominado ciclo ACE, a saber, actividades (A) que enfrentan al estudiante a nuevas situaciones o informaciones, atendiendo al trabajo colaborativo como un componente importante; posteriormente se prosigue con discusiones en clases (C), donde nuevamente interviene el trabajo colaborativo con el fin de promover una mejor asimilación y acomodación; y por último se les entrega a los estudiantes una serie de ejercicios (E) buscando el reforzamiento y posible extensión de sus ideas, todo lo anterior a la luz de la DG (Asiala et al.,, 1996; Arnon *et. al.*, 2014). En la Figura 8 se puede apreciar en el diagrama las interacciones que se sugieren para las tres componentes que se han declarado en este ciclo de enseñanza.

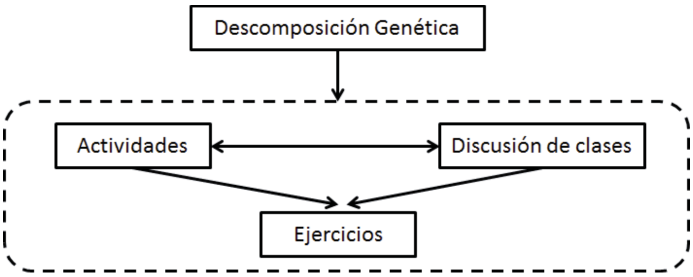


Figura 8: Componentes del ciclo de enseñanza ACE (Arnon, et al., 2014, p.58).

Las actividades

Las actividades son la primera etapa en el ciclo ACE y deben propiciar, desde un trabajo colaborativo entre los estudiantes, las construcciones mentales dispuestas en la DG, las que se diseñan y trabajan en un laboratorio de computación. En esta etapa, más que respuestas correctas, es importante promover abstracción reflexiva, en definitiva activando los mecanismos mentales que se han dispuesto en la DG u otros que aparezcan. Usualmente esto se logra haciendo que los estudiantes, escriban programas de computadora en un lenguaje de programación matemático que se ha diseñado para tal efecto, el ISETL (Arnon, et al.; 2014).

Discusión de clases

Esta segunda etapa promueve en los estudiantes la sistematización de sus ideas, desde pequeños grupos de trabajo con tareas que requieren lápiz y papel, dirigidos por un profesor que va canalizando sus discusiones que son una extensión de lo que se trabaja en las actividades de la primera etapa. Hay un ir y venir entre la primera y segunda etapa desde lo que se está trabajando con lo ya trabajado (Arnon, et al.; 2014).

Ejercicios

Esta última etapa consiste en proponer problemas para trabajar fuera de la clase, haciendo converger las reflexiones de las actividades y las discusiones de las tareas que se propusieron. Los ejercicios o problemas sirven de soporte para seguir desarrollando las construcciones mentales sugeridas por la DG (Arnon, et al.; 2014).

Cabe mencionar que en el capítulo 4 se presentará un recurso que está en sintonía con las etapas y componentes del ciclo ACE, las fichas didácticas, a saber Ficha explicativa, que está en sintonía con la primera etapa, la ficha de ejecución, que está en sintonía con la segunda etapa, y la ficha de resolución de problemas, que está en sintonía con la tercera etapa (Rodríguez, 2006, Rodríguez & Parraguez, 2012).

3.4.- APOE en la teoría de los espacios vectoriales

En Arnon et al., (2014, pp.48-51) se puede leer en detalle la postura de algunos investigadores respecto de la *construcción esquema* espacio vectorial. Se hace notar que en dicha construcción están involucrados tres *esquemas*, a saber el *esquema* conjunto, *esquema* operación binaria y *esquema* axioma. Por otro lado se detallan las construcciones mentales que se han establecido y se han identificado, producto de las investigaciones en dicho tópico, con cada uno de los *esquemas* que se ha indicado y que intervienen en la construcción del concepto espacio vectorial (Arnon et al., 2014).

Por otro lado, Dubinsky (1997, p. 93) establece que las dificultades de los estudiantes con los conceptos básicos de la teoría de espacios vectoriales provienen de tres fuentes:

Primera: El papel pasivo, imitador, asignado al estudiante en los cursos de álgebra lineal. Debido a este papel "los estudiantes no entienden estos conceptos debido a que nunca tienen la oportunidad de construir sus propias ideas acerca de ellos" (ibid, p. 93).

Segunda: La falta de comprensión de algunos conceptos que resultan un antecedente indispensable para entender las nociones básicas referidas, como es el caso del concepto de función. La comprensión de estas nociones básicas exige también contar con ciertas habilidades para usar algunas herramientas como los cuantificadores.

Tercera: Esta última fuente está muy relacionada con la primera y tiene que ver con la ausencia de estrategias didácticas que den a los estudiantes la oportunidad de construir sus propios conceptos. La elaboración de estas estrategias se debiera iniciar por analizar las construcciones mentales específicas que pueden usarse para entender un determinado concepto.

Dubinsky (1997, pp. 94-95) como ya se mencionó, propone un ciclo de investigación que conduce a la formulación de las estrategias mencionadas en el último punto del párrafo anterior. Dicha estrategia contempla tres fases:

Fase 1: El análisis teórico mediante el cual se debe dilucidar cuáles son las construcciones mentales que el estudiante necesita hacer para aprender un tópico matemático en particular.

Fase 2: El diseño de estrategias de enseñanza que favorezca la creación de estas construcciones mentales.

Fase 3. La observación y evaluación de la enseñanza, cuya finalidad es determinar si las construcciones pudieron hacerse, qué es lo que el estudiante ha aprendido y la reconsideración sobre el análisis teórico y las estrategias didácticas.

En su esfuerzo por formular una propuesta didáctica específica para el álgebra lineal, RUMEC ha preparado materiales para la enseñanza en el que se muestra su filosofía acerca de qué contenidos debiera incluir y cómo debiera organizarse un primer curso universitario de álgebra lineal (Weller et al., 2002), donde propone una aproximación a la enseñanza que comienza con el concepto de espacio vectorial a partir del estudio de espacios vectoriales finitos. En este acercamiento el estudiante se introduce al estudio de espacios vectoriales elaborando programas de computadora con los cuales explora sus propiedades. Una exposición de su fundamentación teórica enmarcada en la teoría de APOE, está publicada en Trigueros & Oktaç (2005).

3.4.1.- Otras investigaciones recientes en relación a los espacios vectoriales desde APOE

Es importante aclarar que no puede hablarse dentro de esta teoría de, sólo una descomposición genética de un concepto, pues ésta depende de la formulación que ha hecho el investigador. Pueden coexistir varias descomposiciones genéticas de un mismo concepto, pues dado que no existe un único camino para que un estudiante construya un concepto matemático y no es posible que todos a la vez lo hagan de la misma manera (Arnon, et al., 2014).

Lo que es importante es que cualquier DG de un concepto sea un instrumento que dé cuenta del comportamiento observable del sujeto (Trigueros & Oktaç, 2005). La descomposición genética presentada en Trigueros & Oktaç (2005) hace hincapié en la construcción del concepto de espacio vectorial como un *objeto*, aunque se dan algunos elementos de la construcción de *esquema* para dicho concepto.

Por otro lado, Vargas (2007) explicitó algunos elementos de la descomposición genética de espacio vectorial presentada en Trigueros y Oktaç (2005), haciendo hincapié en la construcción de este concepto como *proceso* y *objeto*. En un trabajo reciente, Parraguez y Oktaç (2012) realizaron una investigación respecto de la evolución del *esquema* intra-espacio vectorial, inter-espacio vectorial y trans-espacio vectorial, reportando datos empíricos obtenidos de estudiantes de licenciatura en matemáticas. Cabe notar que los autores anteriormente citados no han hecho una propuesta explícita para una DG propiamente tal para los espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ a partir de los cartesiano $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$, considerando además el plano y el espacio cartesiano. Es por lo anterior que el interés de esta investigación es abocarse a dicha tarea considerando todos los elementos ya esgrimidos en el capítulo II, apartado 2.4.

3.5.- La investigación cualitativa y el diseño metodológico: Un diseño de caso múltiple

Para Taylor et al., (2010), la metodología de investigación en las ciencias sociales tiene dos vertientes teóricas claramente marcadas. La primera, el *positivismo* que se instala a partir del siglo XIX y comienzos del siglo XX, donde exponentes como Comte (1896) y Durkheim (1938) ponen de manifiesto la importancia de los hechos y las causas de los fenómenos sociales sin considerar la influencia subjetiva de los individuos (Taylor et al. 2010; Valle, 2009). La segunda, *fenomenológica* en el sentido de Deutscher (1973), que cobra fuerza a finales del siglo XIX con exponentes como Berger y Luckmann (1967), Bruyn (1966), Hursserl (1913) y otros, donde lo relevante es la realidad subjetiva, es decir, lo que las personas o individuos perciben como importante (Taylor et al., 2010; Valle, 2009). Ambas vertientes decantan, respectivamente, en dos metodologías de investigación, a saber, cuantitativa y cualitativa.

Antes de considerar algunas características relevantes de un enfoque de investigación cualitativa, considerando los objetivos que se trazaron en esta investigación, es importante establecer las diferencias entre un enfoque cualitativo y uno cuantitativo para dejar establecido el porqué de los elementos que se incorporan al ciclo de investigación que propone la teoría APOE, el estudio de casos múltiples y el uso de cuestionarios y entrevistas. En ese sentido Stake (1999) plantea que:

> Hay que detenerse en tres diferencias importantes entre la orientación cualitativa y la cuantitativa: 1) la distinción entre explicación y comprensión como objeto de la investigación; 2) la distinción entre una función personal y una función impersonal del investigador, y 3) una distinción entre conocimiento descubierto y conocimiento construido (Stake, 1999, p. 39)

En particular, lo importante para esta investigación es la comprensión profunda, por parte del investigador, de cómo estudiantes universitarios construyen cognitivamente un concepto matemático, en este caso los espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$, a la luz de un modelo cognitivo preliminar, la DG, que se configura desde una teoría explícita que se asume para tal efecto, la teoría APOE.

Por otro lado, para configurar una DG, no tan sólo se requiere de las concepciones que tiene el investigador, además es necesario que este se involucre no sólo en la búsqueda de antecedentes históricos epistemológicos respecto de un concepto matemático en estudio, sino que además, indague respecto de las concepciones de enseñanza de este y de aquellos conceptos que están ligados directamente con el concepto que se desea estudiar. Por último, una vez validada la DG, con las técnicas y métodos adecuados, se hace necesario un análisis e interpretación de los antecedentes y datos recopilados para luego dar cuenta de los hallazgos obtenidos.

Todo lo anterior pone de relieve que el ciclo de investigación, que propone la teoría APOE, se enmarca más en una orientación cualitativa, cuestión que se puede corroborar desde lo que declaran integrantes del grupo RUMEC (Arnon et al., 2014; Asiala, et al., 2004).

Por otro lado, Stake (1995) manifiesta que:

> La distinción fundamental entre investigación cuantitativa e investigación cualitativa estriba en el tipo de conocimiento que se pretende. Aunque parezca extraño, la distinción no está relacionada directamente con la diferencia entre datos cuantitativos y datos cualitativos, sino con una diferencia entre búsqueda de causas frente a búsqueda de acontecimientos. Los investigadores cuantitativos destacan la explicación y el control; los investigadores cualitativos destacan la comprensión de las complejas relaciones entre todo lo que existe (Stake, 1999, p. 39).

Considerando que en esta investigación el foco será validar DG que se propondrán en el capítulo 4, se pone de manifiesto lo complejo que es describir con precisión, a la luz de la teoría APOE, las construcciones y mecanismos mentales que están involucrados en la construcción de un concepto matemático y, que a su vez, es coincidente con el rol de un investigador cualitativo; teniendo en cuenta, además, que el ciclo metodológico que propone APOE, como ya se ha mencionado, está sustentado en un enfoque de investigación más bien cualitativo (Arnon et al., 2014; Asiala, et al., 2004).

La investigación cualitativa tiene varias características que la distinguen como tal: es inductiva, los diversos escenarios o personas sobre los cuales actúa o interactúa el investigador no son reducidos a variables sino que son vistos como un todo, el investigador cualitativo es sensible a los cambios que puede producir sobre las personas que estudia (Taylor et al., 2010).

Ante la pluralidad de enfoques que además se pueden encontrar en la investigación cualitativa como lo destaca Denzin y Lincoln (1994, p.2) “es multimetódica en el enfoque, implica un enfoque interpretativo, naturalista hacia su objeto de estudio”, en esta investigación se incorporó al ciclo metodológico de APOE un tipo de diseño que permitió, por un lado, validar el modelo cognitivo dada la complejidad de dicha tarea y, por otro, analizar la pertinencia de dicho modelo en la aplicación de clases. Es por lo anterior que se consideró pertinente utilizar un diseño metodológico de estudio de caso, en particular de casos múltiples, dada la complejidad y la variedad de realidades a las cuales fue posible estudiar (Stake, 1999; Rodríguez et al., 1999)

3.5.1- Algunos antecedentes al estudio de caso

Hay distintas posturas para concebir un estudio de caso. Para algunos autores es un método de investigación para otros, una estrategia de diseño de la investigación (Rodríguez et al., 1999). Para efectos de este estudio se le ha considerado como una estrategia de diseño para ser incorporada al ciclo de investigación que propone la teoría APOE, que como ya se mencionó, se adecua más a un método de investigación cualitativa.

Por otro lado, dado que el objetivo de este estudio es describir en detalle cómo es que un número determinado de estudiantes, con ciertas características particulares que los distinguen, dan cuenta de aquellas construcciones y mecanismos mentales que le procuran construir el concepto de espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ y su respectivo tránsito es que el estudio de caso resulta ser una estrategia a considerar desde su concepción teórica como tal (Castillo, 2008). Además que este tipo de estudio facilita al investigador la búsqueda de respuestas respecto del "cómo" o del "por qué" de los hechos que se dan, ya que se centra en el análisis profundo de uno o varios casos específicos (Yacuzzi, 2005). En ese sentido si bien los argumentos que despliega un estudiante desde lo que desarrolla en un cuestionario puede dar luces respecto de lo que se desea indagar, es probable que se necesite considerar otras instancia como una entrevista que permita cotejar y ampliar aquellos aspectos que pueden no quedar claros desde un problema o situación planteada en un cuestionario.

Teniendo en cuenta lo indicado en el párrafo anterior se puede decir que se asumió un estudio de caso múltiple de inducción analítica y global, pues procura la configuración de una unidad de análisis que garantiza una descripción de aquellas construcciones y mecanismos mentales que intervienen en la construcción de los conceptos aludidos en este estudio, además apunta a aportar evidencia a la teoría que sustenta esta investigación (Stake, 1999; Bodgan et al., 1982; Yin, 1993).

Stake (1999) diferencia en tres los estudios de casos, a saber, intrínseco instrumental y colectivo. Para otros autores los estudios de caso pueden clasificar en único o múltiples (Bodgan et al., 1982; Yin, 1993). Para Bodgan et al., (1982) los estudios de caso múltiple pueden tener dos modalidades, de inducción analítica y comparación constante al igual; para Yin (1993), se pueden clasificar en global e inclusivo (Citados en Rodríguez, et al., 1999). En definitiva los estudios de caso múltiple pueden ser clasificados según los siguientes criterios: número de casos, unidades de análisis y los objetivos del estudio (Rodríguez, et al., 1999).

3.5.1.1.- El cuestionario y la entrevista en profundidad

El diseño y aplicación de cuestionarios en esta investigación apuntó a indagar en el tipo de concepción que ponen de manifiesto estudiantes respecto aquellos conceptos matemáticos que están asociados al espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y espacio vectorial $\mathbf{R}^3$, en términos de construcciones y mecanismos mentales. Si bien un cuestionario como técnica para la recogida de información es propio de un enfoque cuantitativo, su diseño se puede ajustar a un enfoque cualitativo incorporando preguntas de desarrollo cuyas respuestas no se enmarcan en categorías o dan cuenta de un tipo de escala de apreciación. Algunas consideraciones a tener en cuenta es que un cuestionario debe permitir explorar ideas, son una técnica más en la recogida de información, deben apuntar a los aspectos teóricos con las cuales se sustenta la investigación, su aplicación no debe provocar rechazo (Rodríguez, et al., 1999). En particular, en el apartado 5.2, se muestra en detalle cómo se trabaja en esta investigación un cuestionario en sintonía con la DG, estableciéndose un análisis *a priori* de las preguntas y luego un análisis de las respuestas de los distintos estudiantes.

La incorporación de entrevistas en esta investigación tuvo como finalidad ahondar en aquellos aspectos que los cuestionarios no evidencian en relación a lo que se desean pesquisar o bien de los cual no es posible inferir desde los argumentos que despliegan los estudiantes al contestar las preguntas de los cuestionarios.

La entrevista es una técnica en la que un entrevistador o investigador solicita información a un entrevistado o informante respecto de alguna cuestión específica o de interés. En la entrevista en profundidad, el investigador necesita obtener información específica. Ésta requiere, de quien la dirige: experiencia, habilidad y tacto para indagar aquello que desea ser conocido. La idea es acercarse a ciertas ideas, supuestos o creencias (Rodríguez, et al., 1999). Para esta investigación la entrevista en profundidad es una técnica que permitió complementar aquellos aspectos que se evidenciaron desde la aplicación y análisis de las respuestas que se dieron a las preguntas de cada uno de los cuestionarios.

3.5.1.2.- La conformación de las unidades de estudio y su relación con el ciclo de investigación de APOE

La unidad de estudio que permitió indagar en la concepción que tienen algunos profesores respecto de los conceptos espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y espacio vectorial $\mathbf{R}^3$ y sus respectivos cartesianos así como de su enseñanza, fue conformada con especialistas que hacen docencia en álgebra lineal, de cuatro Universidades Chilenas la que se denotaron por Universidad 1 (U1), Universidad 2 (U2), Universidad (U3) y Universidad (U4). Este estudio exploratorio ayudó a establecer algunas directrices, que se detallan en el capítulo 4, en el marco del análisis teórico que propone APOE, fundamentalmente para el diseño de la DG del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$.

Las unidades de estudio, en la etapa de diseño y aplicación de instrumentos, para validar las DG del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y el espacio vectorial $\mathbf{R}^3$ y delinear los elementos de la propuesta didáctica fueron conformadas por 21 estudiantes de universidades U1, U2 y U3 que incluyeron estudiantes de las carreras de licenciatura y pedagogía en matemática, pedagogía en matemática y computación e ingeniería matemática, para cuya elección se utilizaron las siguientes categorías:

- Heterogeneidad de los estudiantes que pertenecen al conjunto.
- Existencia de programas de Pedagogía en Matemática y de Licenciatura en Matemática, que incluyan al menos una asignatura de álgebra lineal.
- Accesibilidad para los investigadores.

3.5.1.3.- Sobre las unidades de estudio

En la Tabla N°7 se distribuyen los cinco profesores de matemática, con grado de magister y doctorado en matemática, que fueron individualizados de la siguiente manera para referenciarlos a lo largo del escrito: dos profesores, **P3** y **P4**, de la U1, un profesor, **P1**, de la U2, un profesor, **P2**, de la U3 y un profesor, **P5**, de la U4. Se destaca la participación voluntaria de todos los profesores en este estudio.

Tabla N°7: Unidad de estudio para indagar en las concepciones de enseñanza de los conceptos matemáticos plano cartesiano y espacio vectorial $\mathbf{R}^2$.

	Caso 4: Concepción de enseñanza de los espacios vectorial $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ **U3-U2**	**Caso 5**: Concepción de plano cartesiano y relación con espacio vectorial $\mathbf{R}^2$. **U1-U4**
Unidad de estudio	**P1**, **P2**	**P3**, **P4** y **P5**
	Aplicación de Instrumentos: Entrevista: **P1** y **P2**	Aplicación de Instrumentos: Entrevista: **P3**, **P4** y **P5**

En la Tabla N°8 se distribuyen, en tres casos de estudio, los 21 estudiantes universitarios que conformaron un estudio de caso múltiple. Los estudiantes de los casos 1 y 2 fueron considerados para documentar tanto la DG del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ como la DG del espacio vectorial $\mathbf{R}^3$, quienes además participaron voluntariamente de esta investigación respondiendo dos cuestionarios, uno para el espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y el otro para el espacio vectorial $\mathbf{R}^3$, además de una entrevista para indagar en aquellos aspectos que el cuestionario no permitió evidenciar o bien para ahondar en aquellos aspectos que no quedaron explícitos desde los argumentos que se desplegaron.

Tabla N°8: Distribución de estudiantes según casos de estudio e instrumentos de recogida de datos.

	Caso 1 **U1**	**Caso 2** **U2**	**Caso 3-Caso4** **U3**
	Estudiantes Licenciatura y pedagogía en matemática	Estudiantes de ingeniería en matemática	Estudiantes de pedagogía en matemática y computación
Unidad de Estudio	**E1**, **E2**, **E3**, **E4** y **E5**	**E8** y **E9**	**E6** y **E7**; **E10**, **E11**, **E12**, **E13**, **E14**, **E15**; **E16**, **E17**; **E18**; **E19**, **E20**; **E21**
	Aplicación de Instrumentos: 1 Cuestionario 1 Entrevista	Aplicación de Instrumentos: 1 Cuestionario 1 Entrevista	Estudio exploratorio para $\mathbf{R}^2$ **Caso 3** (**E6** y **E7**) Aplicación de Clases **Caso 4** (**E10** al **E21**)

La selección de los estudiantes del caso 1 y caso 2 como informantes para validar ambas DG, obedeció fundamentalmente a la homogeneidad de estos 7 estudiantes en cuanto a los conocimientos previos necesarios para la construcción cognitiva del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y espacio Vectorial $\mathbf{R}^3$, además del conocimiento de nociones de álgebra y álgebra abstracta, conocimientos que se establecieron a partir de las DG teóricas. También se tomó en cuenta la comparación de los programas de estudio y el desempeño obtenido, por parte de cada uno de ellos, en la asignatura de álgebra lineal. Los antecedentes mencionados para los estudiantes de los casos 1 y 2 pueden ser revisados en el perfil académico que se presentan los anexos de este trabajo.

En relación al caso 3, conformado por **E6** y **E7**, participaron de un curso optativo en el segundo semestre del año 2012, curso que está ubicado en el octavo semestre del plan de estudios de la carrera, quienes ayudaron en la exploración de actividades para ser incluidas en una propuesta didáctica para la enseñanza de los espacios vectoriales en estudio y en la validación de preguntas que permitió estructurar los cuestionarios aplicados a los estudiantes de los casos 1 y 2.

Por otro lado, **E10** al **E21** que con formaron el caso 4 participaron de un curso optativo que está ubicado en el sexto semestre del plan de estudio, curso que fue adaptado al trabajo de los conceptos del plano cartesiano y el espacio vectorial $\mathbf{R}^2$, el cual se trabajó en el segundo semestre del año 2013 y permitió delinear los elementos de la propuesta didáctica y poner a prueba la DG para el espacio vectorial $\mathbf{R}^2$.

En los anexos de este trabajo y en el CD que se adjunta se puede encontrar en extenso las producciones de los estudiantes y las grabaciones de cada sesión y actividades desarrolladas así como la planificación general del curso.

CAPÍTULO IV: DESCOMPOSICIONES GENÉTICAS PARA LOS ESPACIOS VECORIALES $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$, DISEÑO Y VALIDACIÓN DE ESTAS

En este capítulo se dan a conocer en detalle los diseños teóricos de cada una de las DG preliminares que se diseñaron para los espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ y la validación de estas, siguiendo el ciclo de investigación que propone la teoría APOE. Por otro lado, como ya se indicó en el capítulo anterior, para validar las DG preliminares se consideró un estudio de caso múltiple, dado que con este tipo de estudio se puede abordar en profundidad cada uno de los aspectos relacionados con el problema que se persigue; mostrar evidencia empírica de las construcciones mentales que se han dispuestos en las DG como también una descripción detallada y precisa de los mecanismos mentales que dan paso a las construcciones mentales y que intervienen en la construcción de los conceptos en cuestión, todo al alero de los distintos constructos teóricos que la teoría APOE provee.

Una vez diseñadas las DG preliminares a la luz de los antecedentes recopilados del concepto espacio vectorial y los conceptos del álgebra lineal asociados a este desde un análisis histórico epistemológico, además de las concepciones de la enseñanza que tienen profesores universitarios respecto de los conceptos espacio vectorial $\mathbf{R}^2$, espacio vectorial $\mathbf{R}^3$ y sus respectivos cartesianos, las respectivas investigaciones asociadas al concepto de espacio vectorial y, por último, las concepciones del propio investigador respecto de dichos conceptos, se aplicaron cuestionarios y entrevistas, a estudiantes del caso 1 y 2, para recabar evidencia empírica de las construcciones y mecanismos mentales que evidenciaron los estudiantes en la construcción de los conceptos en estudio, analizando si estaban en sintonía con la DG preliminar y así dar cuenta de la viabilidad de ésta.

Una vez validada la DG del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$, se planificó un curso taller para la aplicación de clases a los estudiantes del caso 4, en función de la DG validada. Previo comienzo del curso taller se aplicó un cuestionario a los estudiantes para indagar en sus concepciones respecto del concepto operación binaria. Haciendo uso un árbol de similaridad o dendograma y utilizando el software PAST, se procesó la información recabada en función de los argumentos que evidenciaron los estudiantes en dicho cuestionario, lo cual permitió clasificarlos jerárquicamente (Guisande et al., 2006, Álvarez, 1999) lo que se detalla en el apartado 4.5.1 para luego seguir el ciclo de enseñanza ACE que provee APOE. Finalmente, al término del curso taller, se entrevistó **E13**, según los parámetros establecidos al inicio del curso, la clasificación dada por el árbol de similaridad y su participación en el transcurso del taller. Las actividades distintas actividades que desarrolló en el curso taller **E13** pueden ser consultadas en los anexos de este trabajo.

4.1.- Análisis teórico, una panorámica de los conceptos matemáticos asociados a la construcción cognitiva de los espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$

Con el diagrama de la Figura 9 se pone de relieve el tipo de concepción de los conceptos matemáticos plano cartesiano, espacio cartesiano, cartesiano $\mathbf{R}^2$ y cartesiano $\mathbf{R}^3$ y su relación en la *construcción objeto* del espacio vectoriales $\mathbf{R}^2$ y el espacio vectorial $\mathbf{R}^3$, lo que está en sintonía con los distintos aspectos epistemológicos que se mencionaron en el capítulo I. Cabe señalar que para esta investigación se entenderá por plano cartesiano al plano de la geometría de los griegos provisto de coordenadas como ya se plantea en la geometría de Descartes (Klein, 1992) del mismo modo que para el espacio cartesiano. Por otro lado, entenderemos por cartesiano $\mathbf{R}^2$ al conjunto de pares ordenados provistos de operaciones, análogamente para el cartesiano $\mathbf{R}^3$.

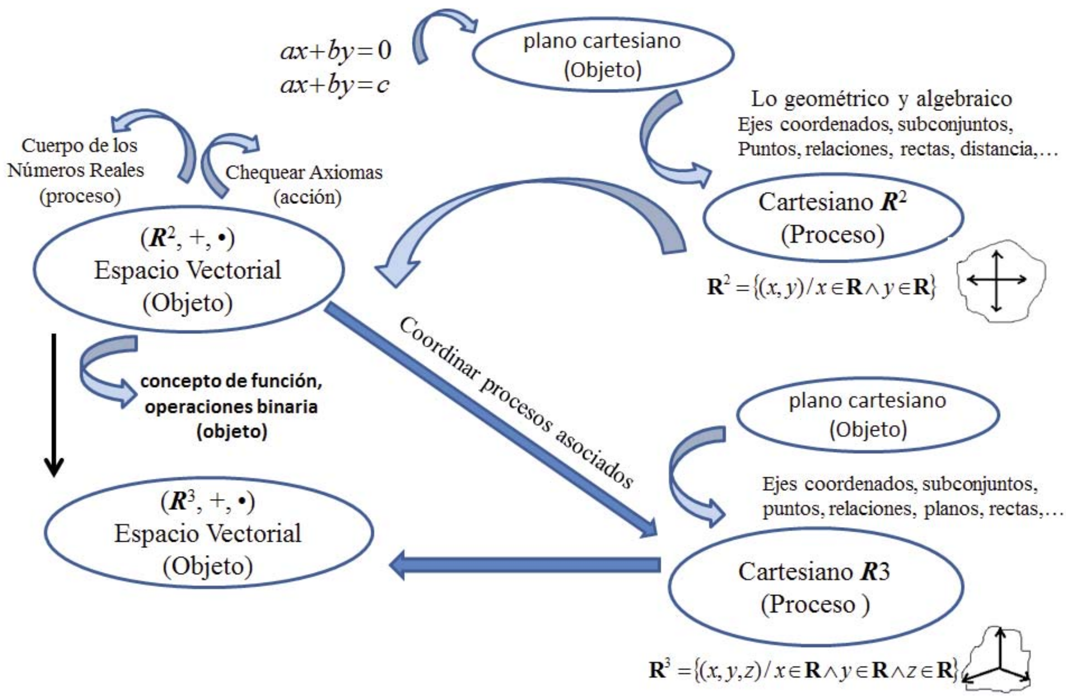


Figura 9: Relación entre los conceptos espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ y el plano y espacio cartesiano desde los objetos matemáticos ELH y ELNH.

En términos generales la idea fuerza, que se ha plasmado en el diagrama de la Figura 9, es que a partir de la manipulación algebraica y geométrica que se le pueda dar a una ELH y ELNH se dé paso a la *construcción proceso* conjunto de todas las soluciones y así avanzar a la *construcción objeto* CSELH. La *coordinación* de la *construcción proceso* conjunto de todas la soluciones con la *construcción proceso* asociada al *objeto* plano cartesiano, procura dar paso a la *construcción proceso* cartesiano $\mathbf{R}^2$ para así *encapsular* dicho proceso en la *construcción objeto* espacio vectorial $\mathbf{R}^2$. Luego, a partir de la *coordinación* del *proceso* que dio origen al *objeto* espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y la construcción proceso cartesiano $\mathbf{R}^3$ se construye el *objeto* espacio vectorial $\mathbf{R}^3$. Para que finalmente se dé el tránsito, cognitivamente hablando, entre ambos espacios vectoriales.

4.1.1.- Hacia una DG para el concepto espacio vectorial $\mathbf{R}^2$

Comencemos con esta tarea de diseñar la DG para el espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ atendiendo a aquellos conceptos que están asociados al plano cartesiano y que estarían incidiendo en la construcción cognitiva del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$. Para ello consideremos algunas ideas que plantea Máltsev en la introducción de su libro, Fundamentos de Álgebra lineal, respecto de los conceptos Ecuación Lineal Homogénea (ELH), función afín y sistemas de ecuaciones lineales (Máltsev, 1978).

Para Máltsev (1978), el problema elemental del álgebra lineal es la solución de una ELH $ax+b=0$. Por otro lado menciona que los métodos de solución de dicha ecuación y las propiedades de la función afín $y=ax+b$ son los modelos de partida sobre los cuales operará el álgebra lineal. Además hace notar que la teoría sobre la solución de los sistemas de ecuaciones lineales con varias incógnitas se aborda con los elementos ya indicados (Máltsev, 1978).

Veamos como las ideas del párrafo anterior están en sintonía con la construcción cognitiva del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ a partir de elementos matemáticos que se desprenden del plano cartesiano, sintonía que ayudará a poner de relieve aquellas construcciones y mecanismos mentales. En esta primera aproximación centremos la atención en algunos aspectos matemáticos que se pueden desplegar al resolver una ELH, lo que se puede apreciar en la ilustración que se ha hecho en el diagrama de la Figura 10.

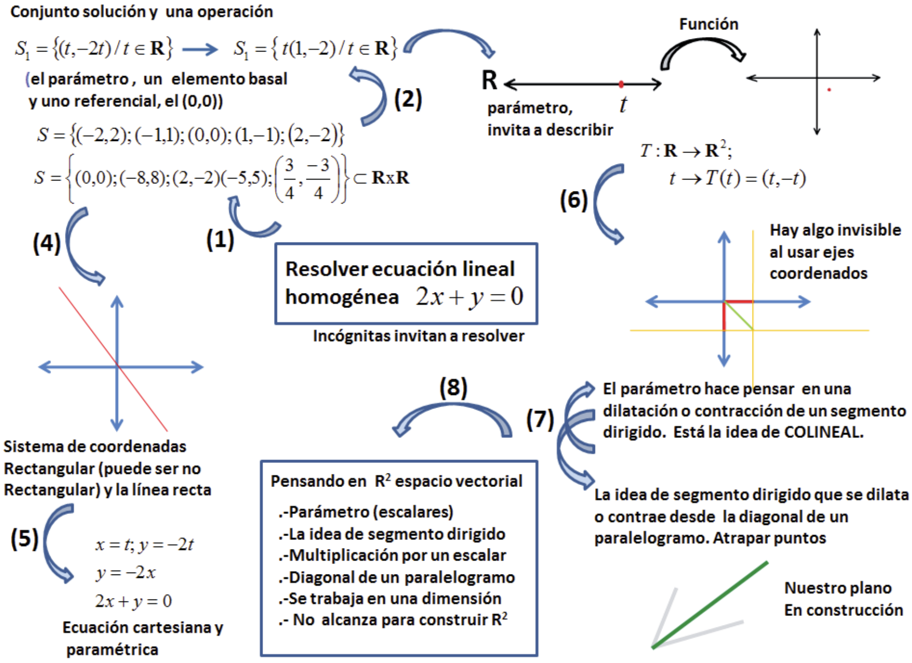


Figura 10: Sobre la incidencia del cartesiano $\mathbf{R}^2$ en la construcción de $\mathbf{R}^2$ espacio vectorial.

El diagrama de la Figura 10 pone de relieve la relación de una ELH con diversos conceptos matemáticos donde destacan la representación geométrica del gráfico de una función lineal. Dicha relación se puede explicitar desde distintos ángulos siguiendo una secuencia lógica, en atención a los números que se han agregado a dicho diagrama, donde el siguiente relato es una de las posibles lecturas generales que se le pueden dar. Así, de la ELH se pasa al conjunto solución de esta en **(1)**. Luego, del CSELH conectar con la idea de operación binaria externa desde el uso de un parámetro en **(2)** o bien, como camino alternativo, el CSELH se relaciona con la idea de representación gráfica de una relación, desde las coordenadas asociadas a los puntos del plano cartesiano, en **(4)** y, conectar así, con las ecuaciones paramétricas, o viceversa, en **(5)**.

Volviendo a **(2)**, la operación binaria se puede pensar desde la idea de función, con el uso de un parámetro en relación a un par ordenado en **(3)** y de la variación del parámetro conectar con la idea de vector anclado al origen desde la dilatación de un segmento dirigido en **(6)** y **(7)**, en un plano con o sin coordenadas. Finalmente, dotar de estructura algebraica al CSELH en **(8)** a través de dos operaciones binarias. En definitiva algunas alternativas plausibles a tener en cuenta para establecer conexiones con conceptos matemáticos desde la resolución de una ELH.

4.1.1.1.- Una indagación a la mirada de expertos en relación a la enseñanza de los espacios vectoriales y sus concepciones del plano cartesiano

En esta sección se dará a conocer en términos generales aquellos aspectos más relevantes del estudio exploratorio con 5 académicos, individualizados en la sección 3.5.1.3 del capítulo 3, que han enseñado álgebra lineal y que en su formación académica cuentan con el grado magister o de doctor en matemática. Para ello se efectuaron dos rondas de entrevistas, la primera para indagar en las concepciones de enseñanza de los espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$, consultando para ello a los profesores **P1** y **P2**. Luego, en una segunda entrevista con los profesores **P3**, **P4** y **P5** se indagó en las concepciones que estos tenían respecto del concepto plano cartesiano y cartesiano $\mathbf{R}^2$ y la importancia que éstos atribuyen a dichos conceptos en la construcción del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$.

4.1.1.1.1.- De la concepción de enseñanza de los espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$

Para indagar en las concepciones de enseñanza que tienen estos dos profesores se elaboró una entrevista con 3 preguntas y sus respectivos apartados que apuntaron fundamentalmente a explorar aquellos aspectos que un académico universitario, con experiencia en la enseñanza del álgebra lineal, considera relevante en relación al espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y el espacio vectorial $\mathbf{R}^3$, sus respectivos cartesianos, el plano euclidiano y el espacio afín.

1.- En relación a los espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$
a) Matemáticamente, ¿qué importancia le asigna a los espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ en un curso de álgebra lineal para pregrado?
b) ¿Cuáles son los énfasis matemáticos que resalta en el tratamiento de dichos espacios vectoriales?
c) ¿Qué destaca de los axiomas que caracterizan al espacio vectorial $\mathbf{R}^2$?
d) ¿Qué elementos matemáticos enfatiza al comparar ambos espacios vectoriales?
e) ¿Qué importancia le asigna a la geometría en el tratamiento de los espacios vectoriales en cuestión?
f) ¿Qué requisitos matemáticos son necesarios para trabajar $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ como espacios vectoriales?

2.- En relación a: plano cartesiano $\mathbf{R}^2$ y espacio Cartesiano $\mathbf{R}^3$
a) ¿Qué elementos matemáticos del plano cartesiano $\mathbf{R}^2$ se deben articular en el aprendizaje del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$? y ¿qué dificultades visualiza en la construcción de dicho espacio?
b) ¿Qué elementos matemáticos debe distinguir un estudiante en relación al plano y al espacio cartesiano $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ respecto de los espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$?
c) En el aprendizaje del espacio vectorial R^3, debe haber una articulación previa entre el espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y el espacio cartesiano $\mathbf{R}^3$?

3.-En relación al plano afín y plano afín
a) ¿Qué diferencias matemáticas entre el plano afín, el plano cartesiano $\mathbf{R}^2$ y el espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ debería manifestar un estudiante al trabajar dichas ideas matemáticas?
b) Matemáticamente qué distingue a un espacio vectorial de un espacio afín y el plano cartesiano?
c) La geometría vectorial, geometría afín y geometría cartesiana, ¿cómo se relacionan con los conceptos aludidos?

4.1.1.1.2.- De la concepción de enseñanza del espacio vectorial R^2 y el espacio vectorial R^3 que manifiesta el P1

En la Tabla N° 9 se presentan extractos de la entrevista que se realizó al **P1** desde los tres focos que se indicaron en el en párrafo anterior para indagar en las concepciones de enseñanza respecto del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y el espacio vectorial $\mathbf{R}^3$. Para estas y las siguientes entrevistas **I** denotará el investigador, **P1** al profesor 1 y así correlativamente hasta **P5**, el profesor 5.

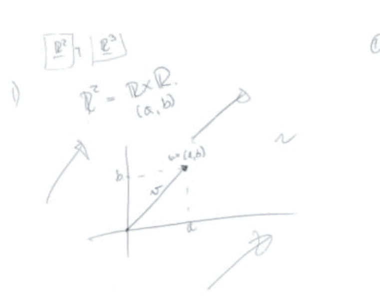
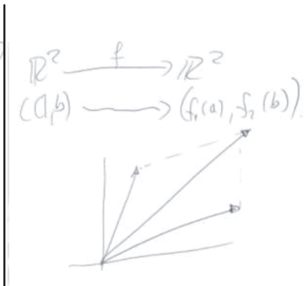
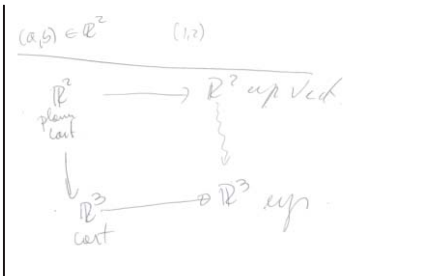
Tabla N° 9: Extracto de la entrevista al **P1**, sobre sus concepciones respecto de la enseñanza de los espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$.

Algunas concepciones sobre la enseñanza de los espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ de parte del P1
I: Pensando en un curso de álgebra lineal en pregrado, ¿qué importancia le asigna Ud. a los espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$? **P1**: Yo creo que son importantes. Los espacios vectoriales en general en el álgebra lineal tienden a ser cuestiones fundamentalmente teóricas. Tomo un vector, hago operatoria con los vectores y luego digo que estos son espacios vectoriales y digo que sus elementos se llaman vectores. **P1**: La importancia de $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ es que ahí se ven los vectores de manera más concreta. Entonces se tienen ejemplos, la ponderación de un vector lo ve en el plano, alarga y encoje el vector, la suma la ve geométricamente y las cosas aparecen naturalmente, la idea de combinación lineal, que sean linealmente independiente y linealmente dependiente, etc, etc. Yo creo que todo esos conceptos básicos dentro de los espacios vectoriales en el plano y en el espacio tienen una cosa más concreta..
I: Cuáles son los énfasis matemáticos que Ud. resalta en el trabajo de dichos espacios vectoriales **P1**: A ver, voy a focalizarme en $\mathbf{R}^2$, entonces si uno mira a $\mathbf{R}^2$ como el producto cartesiano $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ donde viven pares ordenados, puntos, ese es como una primera cosa…entonces yo encuentro que en esta cuestión matemática uno después puede mirar a $\mathbf{R}^2$ mirado como espacio vectorial, por lo tanto como un conjunto de vectores que cumplen con ciertas operaciones y determinadas propiedades, entonces también puede ser considerado como un conjunto de vectores pero si uno lo mira es un conjunto de puntos, es importante enfatizar que si bien hay un punto también hay un vector.
I: ¿Cuál es el rol de los axiomas? **P1**: Si uno lo ve desde el punto de vista geométrico sumo dos vectores, tengo su geometría, y la suma me resulta otro vector, lo cual está establecido geométricamente. Cuando uno tiene una operación siempre está pensando en propiedades y si se cumplen ciertas propiedades se pueden pensar en un álgebra, puedo pensar en un elemento neutro y elemento inverso y entonces me permite avanzar en ese sentido. Entonces uno dice con la suma necesito un grupo abeliano, se cumple una estructura básica. Pero además hay otra operación posible esto de alargar o acortar los vectores…la ponderación por escalar y luego ver la compatibilidad con la otra operación, por ejemplo ¿$2v$ es $v + v$? Entonces de ahí la generalización.

P1 hace notar que es posible comenzar a enseñar los espacios vectoriales desde un punto de vista axiomático y luego recurrir a los espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ para resaltar los conceptos básicos y trabajar las propiedades de un espacio vectorial de manera más concreta, atendiendo a un modelo geométrico asociado a $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ y viceversa. Es decir, por ejemplo, considerando los vectores de $\mathbf{R}^2$ y la estructura que se puede establecer, desde el trabajo de estos vectores geométricos anclados al origen del sistema de coordenadas. Mostrar que es un espacio vectorial, es decir que se satisfacen los axiomas de un espacio vectorial. Hace notar que es importante articular la idea de punto y de vector cuando se piensa en avanzar, por ejemplo, del plano cartesiano al espacio vectorial $\mathbf{R}^2$.

Por otro lado, **P1** hace notar que trabajar con una operación binaria lleva implícita la idea de verificar propiedades y por ende la de reconocer estructura. Además, pone de manifiesto de manera implícita, desde el dilatar y contraer vectores, la acción de un cuerpo sobre un grupo al hacer notar la necesidad de la compatibilidad de dos operaciones, una binaria interna y la otra binaria externa. En la Tabla N°10 se presentan algunas ideas generales manifestadas por **P1**.

Tabla N°10: Algunas ideas de la entrevista al P1 de la U3, sobre sus concepciones respecto de la enseñanza de los espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$.

Algunos comentarios de la entrevista al P1
.-$\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ ayudan a mirar de manera más concreta los aspectos abstractos de la estructura de un espacio vectorial. .- A través de los conjuntos $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ y una mirada geométrica se puede establecer una estructura de espacio vectorial. .-Explicitar una relación de equivalencia en el conjunto de los vectores libres y los vectores anclados al origen para trabajarlos como clases de equivalencia. .-Tener presente que hay dificultad de dibujar en $\mathbf{R}^3$. Pero es necesario articular con la geometría, los cartesianos y los espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$. .- Se debe establecer una diferencia entre punto y vector lo que se distingue de mejor manera al trabajar los campos vectoriales.
  

En general, **P1** indica que lo importante al considerar vectores en el plano cartesiano es definir una relación de equivalencia para relacionar un vector anclado en el origen con vectores libres paralelos a este.

P1: La dificultad está en que un vector de $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ la notación para un punto y un vector es la misma cuando en realidad son cosas diferentes. Allí hay una dificultad. Cuando uno está haciendo la geometría analítica en $\mathbf{R}^2$, no hay problema en la notación entre par ordenado y punto. Tiempo después se está haciendo el álgebra lineal. Esas dos ideas se juntan en un campo vectorial. Al alumno le surge claramente la confusión y uno no sabe si es un punto o un vector.

P1: No se tiene una operatoria con los puntos… tengo el punto (1,2) y el punto (2,3) y cuánto es (1,2) + (2,3), qué puede significar la suma de puntos pero si se mira como vector claramente si tiene sentido.

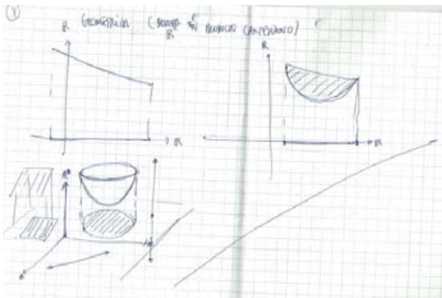
Por último **P1** manifiesta que es importante articular el espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y el espacio vectorial $\mathbf{R}^3$ desde el trabajo de los cartesianos, donde la geometría juega un papel importante aunque explica que hay dificultades al dibujar en el espacio cartesiano y esa es una dificultad que se debe tener en cuenta.

P1: …Los vectores los tengo en el espacio…no los puedo dibujar fácilmente (utiliza la esquina de la oficina para mostrar la dificultad que se tiene para dibujar en $\mathbf{R}^3$ el vector suma)…si se logra pasar del producto cartesiano $\mathbf{R}^2$ al espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y de $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^3$ de lo geométrico podría pasar al espacio vectorial $\mathbf{R}^3$.

4.1.1.1.3.- De la concepción de enseñanza del espacio vectorial R^2 y el espacio vectorial R^3 que manifiesta el P2

P2 hace notar que la asignatura de álgebra lineal, en la institución donde trabaja, fundamentalmente en las carreras de ingeniería su importancia se ve disminuida pues se fomenta la línea del análisis (Cálculo) y el álgebra lineal aparece en matemática 2 (cálculo 2 con algebra lineal). En la Tabla N°11 se resumen algunas ideas que planteó **P2**.

Tabla N° 11: Algunas ideas de la entrevista al **P2**, sobre sus concepciones respecto de la enseñanza de los espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$.

Algunas ideas que se rescatan a la entrevista P2	**Diagrama que elabora el P2**
.-Rescatar el plano y espacio euclidiano asociados a $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$, respectivamente. .-El producto cartesiano puede ayudar a un estudiante a acercarse a los espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ de manera natural. .-La proyección en el plano hacia una recta y en el espacio a un plano puede ayudar a una idea intuitiva de dimensión. .- Es importante trabajar los vectores geométricos y establecer su conexión con la física.	

P2: …los estudiantes ya saben lo que son los volúmenes, los cuerpos …sin embargo se detecta que los alumnos llegan con cierto nivel de confusión y cuando estos conceptos se hacen un poco más abstractos se pierden …la idea es que tienen que conectarlo con las cosas nuevas . Yo partiría haciendo como ese nexo…tomaría $\mathbf{R}^2$ como un producto cartesiano y $\mathbf{R}^3$ como un producto cartesiano…mirar cosas que están en el espacio tridimensional en el plano bidimensional. En el espacio tridimensional se puede dibujar lo que se quiera y se puede proyectar eso en un plano…

P2: …El producto cartesiano es algo natural que el alumno puede comprender y permite ver a $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ como algo familiar y luego se debería centrar en lo que nos interesa, ver estos espacios desde un punto de vista vectorial…entramos así a una noción abstracta pues se va a dar una definición… ser espacio vectorial significa cumplir con estas dos cosas...luego cualquier espacio que cumpla esas dos cosas se denominará espacio vectorial en particular $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ son espacios vectoriales…

En general **P2** manifiesta que es importante que los estudiantes conecten las ideas matemáticas que ya traen con aquellas nuevas ideas que trabajarán, sobre todo en lo que respecta a las ideas geométricas como por ejemplo el concepto de volumen, que desde una concepción más abstracta puede evolucionar, por ejemplo, desde una perspectiva vectorial. Además la importancia que juega el producto cartesiano para avanzar al espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y el espacio vectorial $\mathbf{R}^3$ desde una cuestión más intuitiva, rescatando así la geometría que se asocia a $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$.

4.1.1.1.4.- De la concepción de cartesiano $\mathbf{R}^2$ y su relación con el espacio vectorial $\mathbf{R}^2$

Indagadas las concepciones de dos profesores universitarios, respecto de la enseñanza del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y el espacio vectorial $\mathbf{R}^3$ con sus respectivos cartesianos, se consideraron entrevistas a tres académicos para indagar en sus concepciones de los conceptos cartesiano $\mathbf{R}^2$, espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y la geometría.

1.- ¿Cómo concibe Ud. el cartesiano $\mathbf{R}^2$?
2.- ¿Qué elementos constituyen este cartesiano $\mathbf{R}^2$?
3.- ¿Hay diferencias entre $\mathbf{R}$x$\mathbf{R}$ y el cartesiano $\mathbf{R}^2$?
4.- ¿El cartesiano $\mathbf{R}^2$ se puede concebir como una estructura matemática?
5.- ¿Qué distingue para Ud. lo sintético de lo analítico, desde un punto de vista geométrico?
6.- ¿Ve alguna relación entre el cartesiano $\mathbf{R}^2$ y la(s) geometría (s)?
7.- ¿Cuál es el rol que se le asigna al cartesiano $\mathbf{R}^2$ para llegar a construir el espacio vectorial $\mathbf{R}^2$?
8.- ¿Se podría construir el concepto de espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ sin el cartesiano $\mathbf{R}^2$ pensando en un curso inicial de álgebra lineal para estudiantes de pregrado?

A continuación, en la Tabla N° 12, se presentan algunos de los aspectos más relevantes que se consideraron de las respuestas **P3**, **P4** y **P5**.

Tabla N° 12: Extractos de la entrevista a los **P3**, **P4** y **P5**, sobre sus concepciones de cartesiano $\mathbf{R}^2$.

1. ¿Cómo concibe Ud. el cartesiano $\mathbf{R}^2$?		
P3	**P4**	**P5**
… yo creo que el $\mathbf{R}^2$ mirado como un conjunto cartesiano viene de la geometría de Descartes. La idea es que Descartes tuvo el entusiasmo de algebraizar la geometría para darle sentido a las ecuaciones y para ello necesitó tener sistemas de referencia para *x*, *y*, *z*, etc. Entonces tomo el eje que todos conocemos…como plano cartesiano el XY...que es una situación muy especial de plano. Tiene dos rectas perpendiculares y justamente un sistema de referencia estándar… los números positivos están a la derecha, los negativos están a la izquierda y después para arriba y están abajo los negativos…	…O sea el cartesiano en $\mathbf{R}^2$, lo veo como una representación geométrica del conjunto $\mathbf{R}^2$… el hecho de poner rectas perpendiculares, y no de otra forma, porque el cartesiano se mira con perpendicularidad, dice ya de geometría porque está hablando de perpendicularidad ¿o no?... yo entiendo $\mathbf{R}^2$ como una representación geométrica de $\mathbf{R}^2$ (refiriéndose a $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$).	…yo lo veo como el plano de los griegos vestido de coordenadas por Descartes...o sea el plano coordinatizado. En eso estaría pensando... y ahí parece que es bien crucial la representación que uno tiene de él. Porque conjuntistamente es $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ nomás… pero uno podría calcular a ciegas en $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, ahora cuando uno dice el cartesiano $\mathbf{R}^2$ yo entiendo eso como el plano cartesiano.

Queda de manifiesto en esta primera pregunta que hay diferencias a tener en cuenta, como distinguir entre el conjunto de pares ordenados y los puntos del plano que se asocian con el conjunto producto cartesiano **R**×**R**. Por otro lado, que no se manifiesta mayores distinciones entre $\mathbf{R}^2$, el plano cartesiano y el producto cartesiano, se asume un isomorfismo entre el plano y **R**×**R**.

Tabla N° 13: Extractos a la entrevista a **P3**, **P4** y **P5**, sobre sus concepciones del cartesiano $\mathbf{R}^2$.

¿Qué elementos constituyen este cartesiano $\mathbf{R}^2$?		
P3	**P4**	**P5**
…el plano cartesiano va a corresponder a puntos del plano al cual se le asocia la abscisa y la ordenada… el eje *Y* o la primera proyección del punto, pero proyección perpendicular o sea el plano cartesiano siempre está pensándose una cuestión totalmente simétrica, cuatro cuadrantes… el plano cartesiano pasa a ser un ejemplo de un modelo… cuando se viene a formalizar desde el concepto de función… se establece una correspondencia biunívoca entre los puntos del plano y los pares ordenados.	…yo entiendo que los elementos que constituyen este cartesiano, como es un ente para mí geométrico, son los puntos de los pares (a, b) es una representación geométrica del conjunto $\mathbf{R}^2$ donde están los pares. Entonces hay una biyección entre los pares y los puntos del plano cartesiano, o sea hay una manera de que a cada para (a, b) se le represente en el plano cartesiano como el punto que igual se sigue anotando (a, b),… hay gente que de repente pone una letra *P* mayúscula pero de todas maneras si va hacer un cálculo o algo queda (a, b) …	Me parece que la palabra elementos está tomada desde un punto de vista cognitivo. Como quien dice, los ingredientes o las componentes. Ahora cuando dice qué elementos constituyen, está tomando una postura, una postura idealista, haciendo abstracción del observador…como que está $\mathbf{R}^2$ y hay elementos que lo constituyen y entonces o no hay observador…

En particular el **P3** y **P4** concuerdan en que hay un conjunto de pares ordenados, **R**×**R** que se ponen en correspondencia con los puntos del plano. Está posicionada más la idea de una geometría analítica plana. La idea de biyección, como correspondencia uno a uno, un aspecto a tener en cuenta, pensando en la articulación de los espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$.

Considerando las ideas manifestadas por **P5** y los matices de sus respuestas, a continuación se presentan extractos de las respuestas a las restantes preguntas planteadas en la entrevista.

3.- ¿Hay diferencias entre R×R y el cartesiano $\mathbf{R}^2$?

P5: Algunos matemáticos dirían que $\mathbf{R}^2$ es simplemente **R**×**R**, pero qué es lo que yo hago en **R**×**R** o $\mathbf{R}^2$, puede ser un poco distinto cuando uno dice el cartesiano $\mathbf{R}^2$. Uno está pensando en el plano y las coordenadas cartesianas creo yo...aunque también cartesiano $\mathbf{R}^2$ podría no aludir a Descartes como coordenadas cartesianas sino que al producto cartesiano o a la potencia cartesiana, entonces ahí cartesiano no quiere decir prácticamente nada salvo **R**×**R**…porque uno hace el producto cartesiano de dos conjunto cualquiera sin ninguna intuición o representación geométrica…

P5: Entonces, ahora que me percato, yo haría una crítica lingüística...que la palabra cartesiano es ambigua. Puede querer decir simplemente producto cartesiano que es producto cruz o potencia cartesiana...o bien puede estar aludiendo a la geometría llamada analítica de Descartes. Yo lo tomé como que era una alusión a la geometría cartesiana.

Al analizar los detalles que plantea la respuesta de **P5** a la pregunta 3, este manifiesta una postura algebraica de $\mathbf{R}^2$ al mirarlo como un conjunto de pares ordenados, pensando en el producto cartesiano $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, quedando fuera cualquier "intuición geométrica". Por otro lado esto cambia si se hace alusión, como dice **P5**, al cartesiano $\mathbf{R}^2$ donde en el plano de los griegos se instalan las coordenadas cartesianas.

4.- ¿El cartesiano $\mathbf{R}^2$ lo concibe cómo estructura matemática?...podría comentar al respecto.

P5: Hay gente que lo concibe como un caso particular de una estructura matemática...la estructura no está dada de antemano, no hay una visón estructuralista… mientras yo tengo un $\mathbf{R}^2$ estoy entretenido con el $\mathbf{R}^2$, pero cuando uno dice estructura, uno está pensando en una abstracción, en un concepto abstracto, por ejemplo un espacio vectorial de dimensión dos.

En este punto se puede hacer una interpretación a lo que plantea **P5** atendiendo a esta idea de que la estructura no está dada de antemano, pues si pensamos en manipular algebraicamente una ELH para obtener todas las soluciones del CSELH, se podrían averiguar propiedades del CSELH que ayuden gradualmente a mirar estructura, por ejemplo que el (0,0) siempre pertenece al conjunto, este conjunto es siempre no vacío, o bien se podría conjeturar que si $(a,-b)$ pertenece al conjunto solución $(-a, b)$ también, lo que podría sugerir la idea de pares opuestos respecto al (0,0) y hacer un símil de la recta numérica para luego avanzar a la idea de segmento dirigido en una recta y la idea de vector.

7.- ¿Cuál es el rol que se le asigna al cartesiano $\mathbf{R}^2$ para llegar a construir el espacio vectorial $\mathbf{R}^2$?

P5: Pregunta perversa por qué me da la impresión que si uno está instalado en $\mathbf{R}^2$ no tiene prácticamente casi ninguna motivación de construir el espacio vectorial $\mathbf{R}^2$, el tránsito del plano cartesiano al plano vectorial no tiene un objeto concreto entre manos que es el plano y uno vivía en él o como decir, uno dialogaba con el plano en forma analítica con las coordenadas y estaba feliz ahí.

P5: Yo creo que no tenía, en principio, una motivación para explorar algo más. Un problema en la matemática es ¿cómo ser creativo si se está contento? En vez de espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ yo diría plano vectorial. Se podría ver como trabajo experimental que hay gente que puede trabajar en el plano de manera cartesiana o vectorial.

P5: Por ejemplo, la mediatrices o transversales de gravedad concurren a un mismo punto. Eso es algo que uno puede conjeturar haciendo dibujitos y uno después quiere demostrarlo, convencer a cualquier escéptico y uno lo podría verificar de manera cartesiana lo cual no es lo más hábil quizás pero ese mismo problemas es posible abordarlo vectorialmente uno toma los vectores posición de los vértices que se llaman u, v y w, no necesita coordenadas, y el punto medio es $(u + v)/2$ y uno puede describir ahí paramétricamente la ecuación vectorial de la recta y uno ve instantáneamente una solución común y uno no usa coordenadas, usa la suma vectorial...

P5: Un plano vectorial se puede caracterizar operacionalmente, por ejemplo los puntos se ubican por los vectores posición y construyen puntos haciendo operación con los vectores, con la suma vectorial, entonces por el camino descubren la suma vectorial desde el otro caso estaban sumando pares de puntos pares de componentes, ahora cómo la gente podría transitar de manera natural de una manera a otra, mirarlo como modo más que como estructura; un modus operandi cartesiano y un modus operandi vectorial...

8.- ¿Sin el cartesiano R^2, se podría construir el concepto de espacio vectorial R^2?, pensando en un curso inicial de álgebra lineal

P5: El plano vectorial, avatares del plano.
Primer objetivo aprender a trabajar vectorialmente en el plano. Cómo descubrir trabajar vectorialmente para no ahogarse. Después se puede dar cuenta que puede trabajar de la misma manera en $\mathbf{R}^3$ y a lo mejor en otros ambiente y ahí podría emerger la idea de una estructura abstracta.

P5: Para ello basta tener unas ciertas propiedades básica, el plano cartesiano y plano vectorial son objetos relevantes pues ocurren cosas interesantes pero se tiende a exagerar el rol de $\mathbf{R}^2$.

P5: Para que emerja el álgebra lineal por ejemplo vía estado de sistema, superposición es una idea clave, es como llaman los físicos a la suma vectorial...superposición lineal...

Aspectos que se rescatan de las entrevistas a los profesores y la postura en esta investigación.

Es importante resaltar y rescatar la postura de los profesores entrevistados respecto de sus miradas respecto de los conceptos que son de interés en este estudio y las concepciones de enseñanza de dichos conceptos, considerados relevantes a saber: plano cartesiano, espacio cartesiano, cartesiano $\mathbf{R}^2$, cartesiano $\mathbf{R}^3$, espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y espacio vectorial $\mathbf{R}^3$.

Por ejemplo, destacan planteamientos que manifiesta **P5** con algunos aspectos epistemológicos que se plantearon en el capítulo I apartado 2.1. en la senda de la algebraización de la geometría en el siglo XVII, donde se comienza a trazar, como lo plantea Dorier (1997), un cálculo geométrico que sigue con Wallis en 1673 y su interpretación geométrica de la multiplicación. Luego Möbius en 1827, con su cálculo baricéntrico, pone de relieve la idea de orientación y dirección con la idea de segmento dirigido (vector geométrico) y una especie de álgebra de operaciones para los puntos del espacio geométrico. Que luego, en 1843, presentará como una estructura lineal de vectores en dicho espacio (Dorier, 1997).

En general, tomando en cuenta lo que manifestaron los distintos profesores se puede distinguir posturas y puntos de vista diferentes que es importante tener en cuenta a la hora de diseñar una DG para los conceptos espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y espacio vectorial $\mathbf{R}^3$. A continuación se presenta una DG teórica para el espacio vectorial $\mathbf{R}^2$.

4.1.2.- Una DG teórica para el espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ a partir de elementos del plano cartesiano

En el diagrama de la Figura 11, se han dispuesto aquellas construcciones y mecanismos mentales que configuran una DG preliminar para el concepto espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y que, de manera hipotética, un estudiante universitario construye cognitivamente dicho concepto. A continuación se presenta un relato para explicar, en términos de la teoría APOE, cómo estarían operando en términos hipotéticos mecanismos y construcciones mentales.

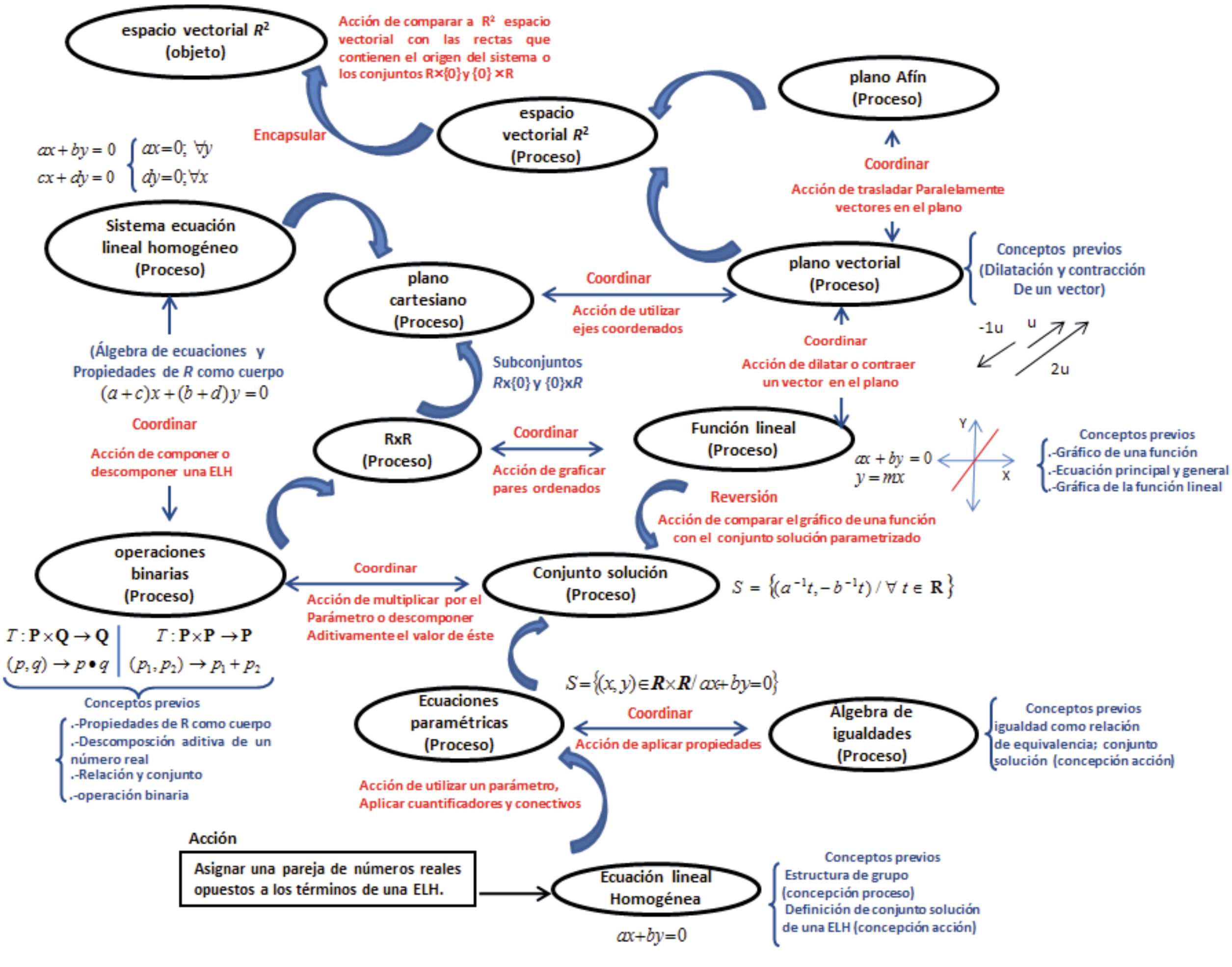


Figura 11: Descomposición genética teórica para la construcción cognitiva del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ a partir del plano cartesiano.

Se hace notar para el resto del escrito que toda vez que se haga mención a los coeficientes de una ELH estos deben ser considerados distintos de cero, dado que en la escritura del CSELH escrito por comprensión se hace uso de los inversos multiplicativos de dichos coeficientes, vistos como parámetros.

4.1.2.1.-Conceptos previos y concepciones de estos conceptos previos

Antes de comenzar a describir la DG teórica que se ha propuesto en el diagrama de la Figura 11, para mostrar en detalle cómo operan las construcciones y mecanismos mentales que intervienen en la construcción del concepto espacio vectorial $\mathbf{R}^2$, se dan a conocer, en la Tabla N°14, el tipo de concepción de los conceptos previos que son necesarios para tal efecto.

Tabla N°14: Concepción de los conceptos previos asociados a la construcción del $\mathbf{R}^2$ espacio vectorial desde el plano cartesiano.

	Concepción del concepto previo			
Conceptos Previos	**Acción**	**proceso**	**Objeto**	**Esquema**
Plano Cartesiano			X	
Paralelismo			X	
Paralelogramo		X		
Función Afín			X	
Operación binaria			X	
Sistema de ecuaciones				X
Los números reales como cuerpo			X	
Conjunto				X

4.1.2.2.- El *objeto* conjunto solución de una ELH a partir de la *construcción acción* asociar un par de números reales a los términos de una ELH

Un punto de partida considerado relevante para que un estudiante comience la construcción cognitiva del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$, es dar paso a la *construcción acción* asociar un par de números reales a los términos de una ELH de dos incógnitas. *Acción* que está en sintonía con el procedimiento de la Tabla N° 15.

Tabla N°15: Procedimiento para determinar un par de pares ordenados del conjunto solución de una ELH que está en sintonía con la *acción* asociar números reales a los términos de una ELH.

Ecuación lineal homogénea: $3x+5y=0$
Consideremos un par de números reales, uno el inverso aditivo del otro. Para simplicidad en los cálculos consideremos 4 y -4. Luego la ecuación lineal homogénea se puede descomponer de la siguiente manera: i) $3x=4 \wedge 5y=-4$, lo que nos lleva a $x=\frac{4}{3} \wedge y=\frac{-4}{5}$, ii) $3x=-4 \wedge 5y=4$, lo que nos lleva a $x=\frac{-4}{3} \wedge y=\frac{4}{5}$ Donde, $\left(\frac{4}{3},\frac{-4}{5}\right)$ y $\left(\frac{-4}{3},\frac{4}{5}\right)$ son dos elementos del conjunto solución de la ELH: $S=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 / 3x+5y=0\}$

La *acción* asociar números reales a los términos de una ELH se *interioriza* en el *proceso* descomponer una ELH en otras dos ecuaciones, donde relacionar la ecuaciones con un conectivo lógico actúa como *mecanismo* de *interiorización*. Lo anterior sugiere determinar cantidades que se asocian con las incógnitas de una ELH desde la *acción* asociar inversos multiplicativos a los coeficientes de una ELH.

La *acción* asignar orden a las cantidades de las incógnitas en función de la relación entre las variables que se puede establecer de manera arbitraria, independiente y dependiente, se *interioriza* en el *proceso* solución de una ELH, donde asociar un par ordenado al par de cantidades que se asocian a las variables de la ELH actúa como *mecanismo* de *interiorización*.

El *proceso* descomponer una ELH se *coordina* con el *proceso* solución de una ELH para obtener el *proceso* todas las soluciones, donde asignar un parámetro a los términos de la ELH actúa como *mecanismo de coordinación*. La *acción* formar un conjunto con todas las soluciones *interioriza* en el *proceso* conjunto de todas las soluciones, donde asociar un cuantificador universal a un parámetro actúa como *mecanismo* de *interiorización*. Dicho *proceso* se *encapsula* en el *objeto* CSELH, donde relacionar todas las soluciones del CSELH con todas las soluciones del conjunto solución de una ecuación lineal no homogénea (CSELNH), actúa como *mecanismo* de *encapsulación*. En la Figura 12 se presentan algunos aspectos matemáticos en relación a lo descrito para la construcción del objeto CSELH.

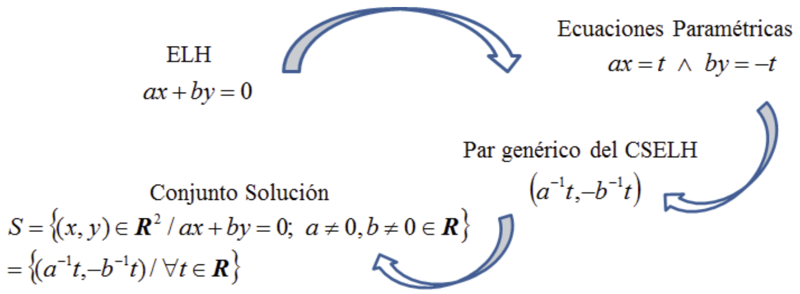


Figura 12: los aspectos matemáticos que están asociados o relacionados con la *encapsulación* del *objeto* conjunto solución de una ELH.

4.1.2.3.- La *desencapsulación* del *Objeto* CSELH

Comparar y relacionar soluciones del CSELH procura *desencapsular* el *objeto* CSELH en el *proceso* todas las soluciones. La *acción* comparar las componentes de pares de soluciones, asociadas a un par de inversos aditivos, se *interioriza* en el *proceso* solución inversa aditiva, donde asociar a cada solución una solución inversa aditiva actúa como *mecanismo* de *interiorización*.

El *proceso* solución inversa aditiva se *coordina* con el *proceso* operación binaria externa para construir el *proceso* ponderación de una solución, donde asociar la ponderación de una solución al CSELH actúa como *mecanismo* de *coordinación*. El *proceso* ponderación de una solución se *encapsula* en el *objeto* ponderación de un par ordenado, al relacionar clausura para la ponderación de una solución en el CSELNH como en $\mathbf{R}^2$.

Relacionar aditivamente las componentes de un par de soluciones inversa aditiva con otra o relacionar aditivamente una solución consigo misma, *desencapsula* el *objeto* ponderación de un par ordenado en el *proceso* ponderación de una solución. La *acción* relacionar aditivamente las componentes de una solución y su inversa aditiva con las componentes del par odenado (0,0) se *interioriza* en el *proceso*, adición de soluciones inversas aditivas, que se *coordina* con el *proceso*, operación binaria interna, para obtener así el *proceso* suma de soluciones, donde asociar la solución suma al CSELH actúa como mecanismo de coordinación. El *proceso* adición de soluciones se *encapsula* en el *objeto* adición de soluciones al relacionar la suma de soluciones con la clausura en el CSELNH y $\mathbf{R}^2$.

Asociar la reducción de una suma de ponderaciones de soluciones al CSELH *desencapsula*, respectivamente, los *objetos* adición de soluciones y ponderación de soluciones en los *procesos* adición de soluciones y ponderación de una solución. La *coordinación* de dichos *procesos* procura construir el *proceso* álgebra de soluciones, donde relacionar suma de ponderaciones con el CSELH actúa como *mecanismo* de *coordinación*. Lo anterior pone de manifiesto la *acción* combinación lineal en el CSELH.

Analizar y comparar las posibilidades de considerar una o dos operaciones binarias, con el menor número de soluciones posibles, para obtener todos los elementos del CSELH y $\mathbf{R}^2$, actúa como *mecanismo* de *encapsulación* para que el *proceso* álgebra de soluciones se *encapsule* en el *objeto* estructura del CSELH. En la Figura 13 se presenta una relación de lo descrito con los aspectos matemáticos que ello conlleva.

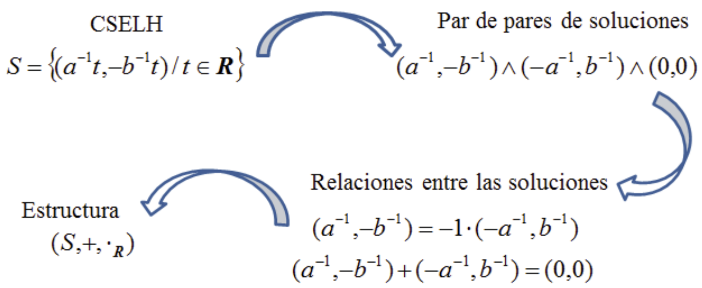


Figura 13: Algunos aspectos matemáticos en la encapsulación del *objeto* estructura del conjunto solución.

4.1.2.4.- La *desencapsulación* de los *objetos* plano cartesiano y plano vectorial y el proceso recta vectorial

Asociar una Ecuación Lineal No Homogénea (ELNH) con una ELH desde un cambio de variable y relacionar ecuaciones de rectas paralelas a los ejes coordenados con el cambio de variable, *desencapsula* el *objeto* plano cartesiano en el *proceso* traslación de ejes coordenados. Dicho *proceso* se *coordina* con el *proceso* CSELH para obtener el *proceso* Conjunto Solución de una ELNH (CSELNH), donde reconocer un vector traslación actúa como mecanismo de coordinación.

Asociar la descomposición aditivamente de todas las soluciones del CSELNH en términos de vector traslación, procura *revertir* el *proceso* CSELNH en el *proceso* ecuación vectorial de una recta afín asociada a la ELNH. Por otro lado, comparar las gráficas de una ELNH y su respectiva ELH procura *revertir* el *proceso* ecuación vectorial de una recta afín asociada a la ELNH en el *proceso* ecuación de la recta vectorial asociada a una ELH. En la Figura 14 los aspectos matemáticos en sintonía con lo descrito.

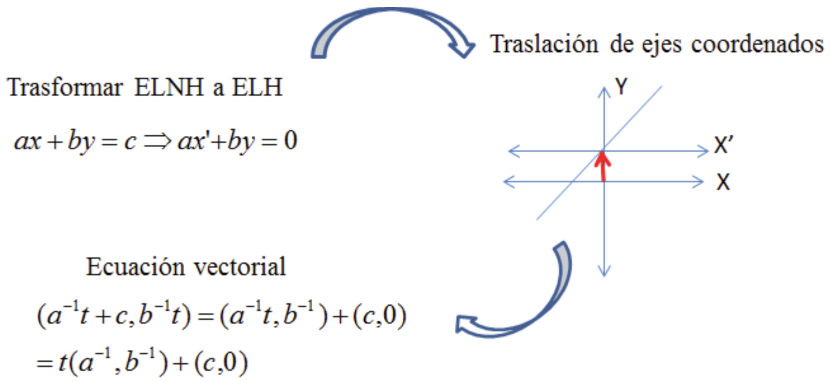


Figura 14: Algunos aspectos matemáticos en la construcción de proceso recta vectorial.

4.1.2.5.- Del *proceso* cartesiano R^2 al *objeto* espacio vectorial R^2

Relacionar la descomposición aditiva de una ELH en otras dos ELH y con la descomposición aditiva de soluciones de los tres CSELH ayuda a *desencapsular* el *objeto* plano vectorial en el *proceso* álgebra de vectores. Dicho *proceso* se *coordina* con el *proceso* álgebra de soluciones para obtener el *proceso* cartesiano $\mathbf{R}^2$, donde relacionar un sistema de ecuaciones lineales homogéneo con las rectas vectoriales que proveen los vectores generadores a $\mathbf{R}^2$ actúa como *mecanismo de coordinación*. Finalmente, relacionar axiomas de un álgebra de vectores en el álgebra de soluciones y comparar estructura vectorial en los distintos subconjuntos del cartesiano $\mathbf{R}^2$, para obtener todos sus elementos desde un mínimo número de estos, *encapsula* el *proceso* cartesiano $\mathbf{R}^2$ en el *objeto* espacio vectorial $\mathbf{R}^2$. En la Figura 15 algunos aspectos matemáticos en sintonía con lo descrito.

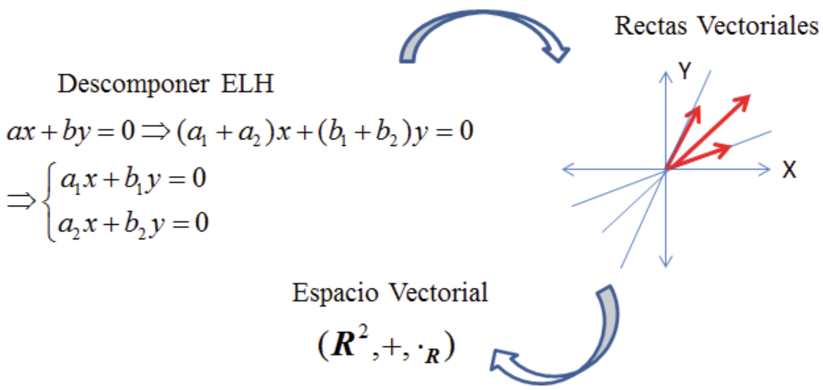


Figura 15: Algunos aspectos matemáticos en la construcción del *objeto* espacio vectorial $\mathbf{R}^2$.

Destaca la descomposición aditiva de un número real y el uso de la propiedad distributiva y asociativa que se ponen manifiesto resaltando la estructura de cuerpo de los números reales, aspecto que está en sintonía con lo que se persigue; dotar de estructura al CSELH para reconstruir a la par el espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y un sub-espacio vectorial, la receta vectorial.

4.1.2.6.-Algunos alcances matemáticos a lo planteado en el apartado anterior

Algunas observaciones a los distintos aspectos que se pueden desprender, al ejecutar el procedimiento de la tabla N°15 considerando una ELH, teniendo en cuenta las siguientes propiedades:

(1) $a \cdot 0 = 0; a \in \mathbf{R}$

(2) la suma de un número real y su inverso aditivo es siempre cero; lo que se puede escribir, desde el uso de cuantificadores, como: $x + (-x) = (-x) + x = 0; x \in \mathbf{R}$

(3) $(a = b \wedge c = d) \Rightarrow a + c = b + d; a, b, c, d \in \mathbf{R}$

Caso1: Analizando un caso particular, sin parámetros[1] asociados a los coeficientes de una ecuación lineal homogénea:

Consideremos la ELH $3x + 2y = 0$ un primer aspecto a resaltar es que por definición $S =: \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} / 3x + 2y = 0\}$ denota el conjunto solución de dicha ecuación. Argumentar desde la propiedad (1) que el par ordenado (0,0) pertenece al conjunto S, CSELH, evidencia una *concepción acción* de **R** y verificar si un par ordenado cualesquiera pertenece a S muestra una *concepción acción* de conjunto solución. Transformar la ELH, aplicando la propiedad (2) y utilizando conectivos lógicos, para escribir dos pares de ecuaciones de primer grado no homogéneas evidencia una *concepción acción* de **R** y aplicar la propiedad (3), para deshacer el procedimiento de la tabla N°15, da cuenta de una *concepción acción* del álgebra de igualdades.

Aplicar la propiedad (2) a las componentes del par (0,0) considerando las componentes de cada par de pares ordenados que se obtienen del procedimiento Tabla N°15, conecta con la idea de operación binaria interna, adición de pares ordenados, dando cuenta de una *concepción acción* de operación binaria, lo que se puede apreciar en la Tabla N°16 .

Tabla N°16: Regularidades entre las componentes de los pares ordenados del conjunto solución de una ELH.

Parejas de pares ordenados		**Relación de par de pares ordenados con par (0,0)**	**Par ordenado $(0,0)$ y su relación con el par de pares ordenados**
$(2,-3)$	$(-2,3)$	$(2,-3) + (-2,3) = (0,0)$	$(2 + (-2), (-3) + 3) = (0,0)$
$\left(\frac{7}{3}, \frac{-7}{2}\right)$	$\left(\frac{-7}{3}, \frac{7}{2}\right)$	$\left(\frac{7}{3}, \frac{-7}{2}\right) + \left(\frac{-7}{3}, \frac{7}{2}\right) = (0,0)$	$\left(\frac{7}{3} + \frac{-7}{3}, \frac{-7}{2} + \frac{7}{2}\right) = (0,0)$

De los aspectos que se configuran en la tabla N°16 se pueden desprender algunas conjeturas:

Conjetura 1: El conjunto solución de la ecuación lineal homogénea es no vacío.

Conjetura 2: Si el par ordenado $(m, -n)$ es solución de $3x + 2y = 0$, entonces $(-m, n)$ también lo es.

[1] Entendido como cualquier número real que varía en un continuo.

Conjetura 3: Si los pares ordenados $(m,-n)$ y $(-m,n)$, son soluciones de la ELH, éstos se relacionan con el par $(0,0)$ sugiriendo una operación binaria interna para S.

Sumar dos soluciones cualesquiera del conjunto S y verificar si la suma pertenece a éste, en atención a la conjetura 3, evidencia una *concepción proceso* del CSELH. Lo anterior lleva a establecer que si $S \subseteq \mathbf{R}\times\mathbf{R}$, entonces hay una estructura para el producto cartesiano, a saber $(\mathbf{R}\times\mathbf{R}, +)$. Donde, el verificar axiomas de grupo en $(\mathbf{R}\times\mathbf{R}, +)$ pone de manifiesto una *concepción proceso* de operación binaria.

***Caso2*:** Generalizando el análisis, desde el uso de parámetros en los coeficientes de la ELH.

Consideremos para este segundo análisis una ELH cuyos coeficientes estén representados por parámetros, es decir representando a cualquier número real. El analizar las posibilidades de que los coeficientes de la ecuación $ax + by = 0$ sean cero,

La Tabla N°17, evidencia una *concepción proceso* de **R**.

Tabla N°17: Análisis del conjunto solución desde los coeficientes de la ecuación lineal como parámetros.

Ecuación	Posibilidades
$ax + by = 0$	(i) Si $a = 0 \wedge b = 0$, entonces $S = \{(x, y) / x \in \mathbf{R} \wedge y \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}\times\mathbf{R}$
	(ii) Si $a \neq 0 \wedge b = 0$, entonces $S = \{(0, y) / y \in \mathbf{R}\} = \{0\}\times\mathbf{R}$
	(iii) Si $a = 0 \wedge b \neq 0$, entonces $S = \{(x,0) / x \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R}\times\{0\}$
	(iv) Si $a \neq 0 \wedge b \neq 0$, entonces $S = \{(x, y) / ax + by = 0\}$

Por otro lado, descomponer el par ordenado (2,3) como (2,0) + (0,3) procura relacionar dos subconjunto propios de **R** y sugerir, por ejemplo que $\mathbf{R}\times\{0\}+\{0\}\times\mathbf{R}$, evidenciando una *concepción objeto* del cartesiano $\mathbf{R}^2$ o una *concepción proceso* del grupo $(\mathbf{R}\times\mathbf{R},+)$. Además, el comparar los conjuntos $\mathbf{R}\times\{0\}$, $\{0\}\times\mathbf{R}$ en términos de las ecuaciones $x = 0; y \in \mathbf{R}$ e $y = 0; x \in \mathbf{R}$ relacionando con la idea de sistema de coordenadas rectangular, evidencia una *concepción objeto* de plano cartesiano.

El procedimiento de la Tabla N°15 pone de relieve al concepto de ecuación paramétrica al asignar parámetros a los términos de la ELH, en la idea de generalizar un par de números reales opuestos. Sustituir, en el conjunto *S*, las variables que definen al par ordenado por las expresiones que resultan de manipular las ecuaciones paramétricas utilizando un cuantificador universal para el parámetro, como se aprecia en la Tabla N°18, procura reescribir el CSELH.

Tabla N°18: Formas equivalentes del conjunto solución desde el uso de un parámetro.

Sea $ax+by=0$ **una ELH y** $S=\{(x,y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}/ax+by=0\}$ **su conjunto solución**
Dados t y $-t$ en ***R***, la ELH se puede separar de dos posibles maneras como: i) $ax=t\wedge by=-t$ Utilizando inversos multiplicativos $\Rightarrow S_1=\{(a^{-1}t,-b^{-1}t)/t\in\mathbf{R}\}$ ii) $ax=-t\wedge by=t$ $\Rightarrow S_2=\{(-a^{-1}t,b^{-1}t)/t\in\boldsymbol{R}\}$ De donde se puede establecer, considerando la variación del parámetro, que $S_1=S_2=S$

Reflexionar respecto de la relación biunívoca entre un valor del parámetro y una solución del CSELH conecta con el concepto de función: $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}\times\mathbf{R};t\to f(\mathrm{t})=(x(t),y(t))$, evidenciando una *concepción proceso* de ésta. Por otro lado, relacionar esta función con una operación binaria externa para *S*, da cuenta de una *concepción proceso* de operación binaria. Descomponer aditivamente el parámetro asociado al CSELH y aplicar las propiedades de **R** como cuerpo, como se sugiere a continuación:

$$(ta^{-1},tb^{-1})=((t_1+t_2)a^{-1},(t_1+t_2)b^{-1})=(t_1a^{-1}+t_2a^{-1},t_1b^{-1}+t_2b^{-1})=(t_1a^{-1},t_1b^{-1})+(t_2a^{-1},t_2b^{-1})$$

procura relacionar dos operaciones binarias asociadas al CSELH además de sugerir la estructura ($\mathbf{R}\times\mathbf{R}$,+,$\cdot_{\mathbf{R}}$) poniendo de manifiesto una *concepción objeto* de **R** como cuerpo.

Reflexionar en torno a la relación de una operación binaria interna y otra externa, a partir del CSELH, para una estructura algebraica como ($\mathbf{R}\times\mathbf{R}$,+, $\cdot_{\mathbf{R}}$), donde ($\mathbf{R}\times\mathbf{R}$,+) es un grupo, evidencia una *concepción objeto* de operación binaria. Por otro lado, descomponer aditivamente los coeficientes de las incógnitas de la ELH $ax+by=0$, aplicando el procedimiento de la tabla N°15, procura establecer un nuevo procedimiento:

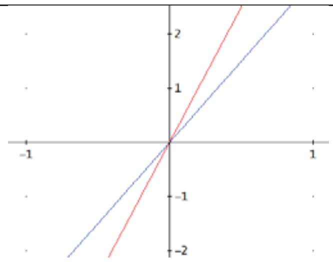
$$ax+by=0\Rightarrow(c+d)x=(e+f)y=0\Rightarrow(cx+ey)+(dx+fy)=0\Rightarrow cx+ey=0\wedge dx+fy=0$$

El descomponer aditivamente una ELH en otras dos ELH's, pone de manifiesto a **R**, como cuerpo ordenado y completo, y procura establecer un sistema de ecuaciones lineales homogéneas. El comparar y relacionar algunos subconjuntos propios de $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, a saber $\mathbf{R}\times\{0\}$ y $\{0\}\times\mathbf{R}$, con las ecuaciones $x=0$, $\forall y\in\mathbf{R}$; $y=0$, $\forall x\in\mathbf{R}$ pone de relieve el plano cartesiano desde el sistema de coordenadas que se establece como una convención en el plano (Klein, 1908, p.6).

Graficar las soluciones del CSELH en términos de un parámetro, considerando un sistema de coordenadas rectangular, procura relacionar la representación gráfica de una función lineal con la dilatación y contracción de un vector geométrico en términos de una operación binaria externa, ponderación de un par ordenado por un número real. Descomponer aditivamente un par ordenado del CSELH en otros dos pares ordenados canónicos, procura relacionar esta descomposición con la suma de vectores geométricos y método del paralelogramo.

En la Tabla N°19, se rescatan algunos de los aspectos mencionados en el párrafo anterior, donde el punto **(a)** pone el énfasis en la representación gráfica del CSELH de una ELH y los puntos **(b)** y **(c),** el tránsito del álgebra de igualdades a la suma de funciones y viceversa. Así la descomposición de una ELH en otras dos ELH's desde la representación gráfica de vectores que se dilatan y contraen pone de relieve una *concepción proceso* del álgebra de vectores.

Tabla N°19: Sobre los distintos aspectos asociados a un sistema de ecuaciones

Sistema de dos ecuaciones lineales homogéneas $\left.\begin{array}{l} ax+by \quad =0 \\ cx+dy \quad =0 \end{array}\right\}$ Con $a,b,c,d \in \mathbf{R}^{+}$ podemos, por ejemplo, representar dos ecuaciones lineales desde la derecha pensando en la intersección.	 **(a)**
Así podemos escribir funciones parámetro: $f_1:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}^2; t\rightarrow f_1(t)=(t,k_1\cdot t)$ con $k_1 \in \mathbf{R}$ $f_2:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}^2; s\rightarrow f_2(t)=(s,k_2\cdot s)$ con $k_2 \in \mathbf{R}$ **(b)**	Por otro lado es importante atender al álgebra de igualdades $\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y \quad =0 \\ a_2x+b_2y \quad =0 \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} a_3x+b_3y=0$ **(c)**

La suma de vectores geométricos, anclados a un sistema de coordenadas, se relaciona así con suma de ecuaciones lineales homogéneas y suma de funciones lineales. Geométricamente, un barrido del plano, en este sentido destaca el papel de dos vectores anclados y no alineados del plano vectorial desde un sistema de coordenadas rectangular, donde el plano afín, desde la relación de paralelismo y la ecuación lineal no homogénea permitirá poner de relieve la importancia del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$. En la

Figura 16, se puede apreciar la idea de generar vectores en el plano cartesiano, a partir de dos vectores geométricos anclados y no alineados. También es posible reparar en la idea de combinación lineal: $v = \alpha \bullet v_1 + \beta \bullet v_2$ con $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ y $v_1, v_2 \in \mathbf{R}^2$.

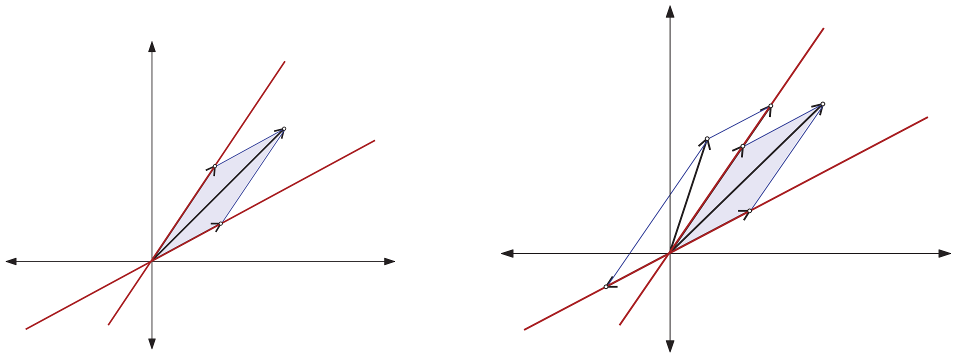


Figura 16: La idea de base de vectores geométricos desde la adición de vectores y múltiplos escalares.

4.1.2.7.- Una mirada unificadora desde los elementos matemáticos para destacar el papel unificador de la DG que se ha propuesto para su documentación

Por último en el diagrama en la Figura 17 se aprecia como a través del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas, se desprenden los elementos necesarios que dan cuenta, por un lado, de la construcción de la estructura de espacio vectorial **(9), (10)** y **(13)** con una carga algebraica y geométrica **(11)**, **(12)** y **(13)** y, por otro, desde el concepto de función y de parámetro, avanzar en la riqueza que brinda la estructura de espacio vectorial desde los endomorfismos **(14)**, **(15)** y **(16)** y así, la aparición de otra estructura, la estructura de álgebra lineal **(17)** , que apuntará no tan sólo a dar cuenta de la importancia del papel unificador de la estructura espacio vectorial sino que además sienta las bases para avanzar en nuevas estructuras como los grupos lineales **(18)** que permiten entender el sentido de la unificación de las geometrías **(18)** y **(19)** desde el programa Erlangen propuesto por Klein (Klein, 1872).

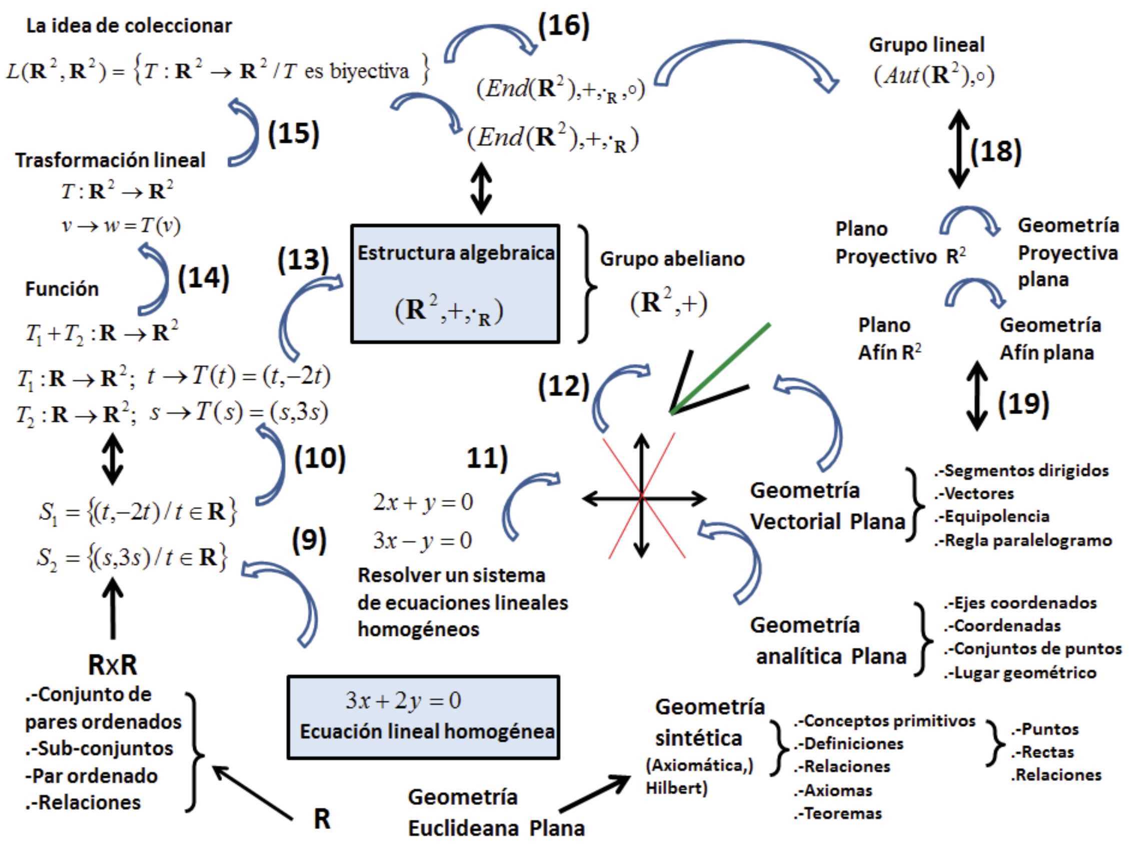


Figura 17: Una mirada del papel unificador y generalizador del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$.

4.2.- Diseño y aplicación de instrumentos: El diseño de un cuestionario para el espacio vectorial $\mathbf{R}^2$

A continuación se dará a conocer el análisis a priori de las 6 preguntas del cuestionario que se elaboró, en función de la DG, para indagar en las construcciones y mecanismos mentales que estudiantes universitarios ponen de manifiesto en la construcción cognitiva del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$, fundamentalmente para indagar en la *concepción proceso* de espacio vectorial $\mathbf{R}^2$. Se deja en claro que "acción" denotará lo que ejecuta matemáticamente un estudiante y *acción* denota la construcción mental de APOE, tomando en cuenta las consideraciones que se han hecho recientemente respecto a lo que es una DG y lo que es y no es una construcción mental (Arnon et al., 2014)

4.2.1.- Análisis de las preguntas del cuestionario para indagar en las construcciones y mecanismos mentales en la construcción del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$

En el diagrama de la Figura 18 se muestra la relación de las 6 preguntas del cuestionario y sus respectivos apartados con las construcciones y mecanismos mentales dispuestos en la DG preliminar para el espacio vectorial $\mathbf{R}^2$.

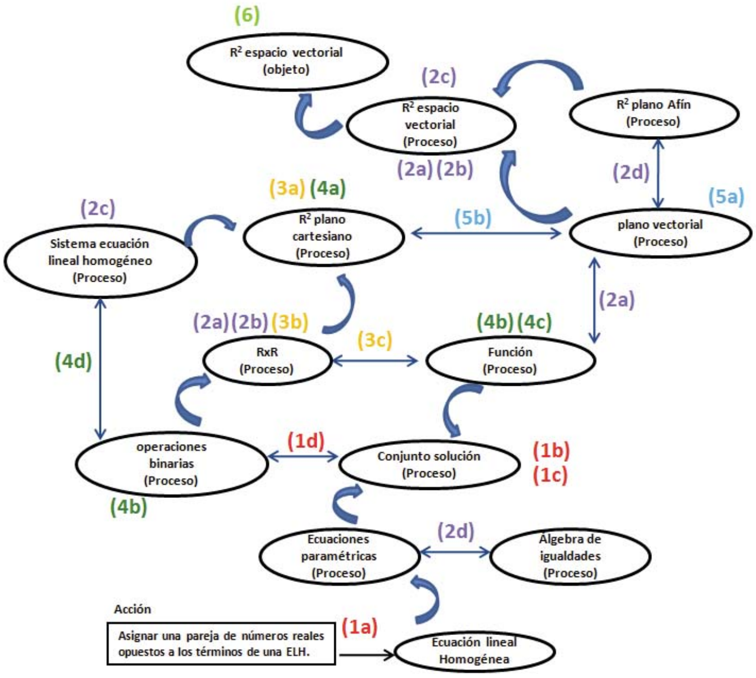


Figura 18: Relación de las preguntas del cuestionario con la DG para la construcción del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$.

A continuación el análisis a priori de cada una de las 6 preguntas del cuestionario, considerando para ello los siguientes puntos:

- **Propósito de la pregunta**: Explicitar los conceptos matemáticos que están involucrados en la pregunta y que han sido considerados relevantes en la construcción cognitiva del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$.

- **Objetivo de la pregunta**: Establecer las *concepciones* de los conceptos matemáticos que están involucrados en la pregunta que se espera se manifiesten.

- **Apartados de cada pregunta**: Explicitar, en términos hipotéticos, las construcciones y los mecanismos mentales que intervienen en función de los argumentos de un estudiante.

Finalmente, configurar una lista con un conjunto de argumentos representativos de cada pregunta en sintonía con las construcciones y los mecanismos mentales.

1) Dada la Ecuación Lineal Homogénea (ELH) $3x+5y=0$, responda las siguientes preguntas:

a) Determine, utilizando el procedimiento de la tabla 1, cinco pares ordenados que pertenezcan al conjunto solución de la ELH.
b) Considerando el apartado **a)**, reescriba el conjunto solución de la ELH.
c) ¿Existirá una ELH de dos incógnitas cuyo conjunto solución sea el conjunto vacío? Explique.
d) Considerando los pares ordenados del apartado **a)**, y el conjunto solución de apartado, ¿qué operaciones binarias se sugieren para el conjunto *S*? Explique.

Propósito de la pregunta 1:

El propósito de esta pregunta es situar al estudiante en el CSELH para que se pronuncie respecto de la estructura algebraica que se puede explicitar al resolver una ELH desde el procedimiento dado en la Tabla N°15.

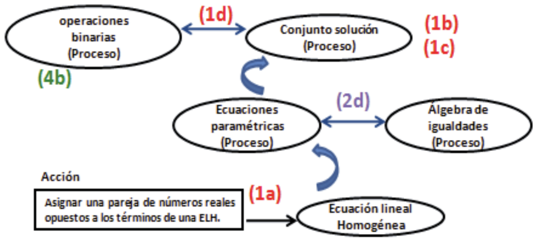


Figura 19: preguntas asociadas a la DG

Objetivo pregunta 1, en su globalidad evidenciar qué tipo de *concepción*: *construcción acción*, *construcción proceso* o *construcción objeto* muestra un estudiante del CSELH y el tipo de *concepción*: *construcción acción*, *construcción proceso* o *construcción objeto* que muestra de una operación binaria. Además, explicitar aquellos mecanismos que se vinculan a estas construcciones mentales.

Inciso 1a): Reproducir el procedimiento de la tabla N° 15 evidencia una *concepción acción* del concepto solución de una ELH o una *concepción proceso* cuando relaciona, multiplicativamente, el recíproco de los coeficientes de una ELH con un par de inversos aditivos para escribir una solución de esta, lo que su vez da cuenta de una *concepción acción* de **R** como grupo. Por otro lado, el escribir un conjunto con las soluciones que se obtienen del procedimiento tabla N°15 evidencia una *concepción acción* de CSELH.

Inciso 1b): Asignar un parámetro a la acción asociar un par de números reales a los términos de una ELH, para reescribir un conjunto por comprensión, *interioriza* en *proceso*, separar una ecuación, que permite escribir ecuaciones asociadas a un parámetro, donde este actúa como mecanismo de *interiorización*.

Inciso 1c): Determinar una solución particular desde una ELH específica para argumentar que el CSELH es no vacío evidencia una *concepción acción* de conjunto solución o bien una *concepción proceso* del CSELH cuando se hace referencia al procedimiento de la tabla N°15 para indicar que siempre será posible asignar un par de números reales a los términos de la ELH atendiendo a propiedades de los números reales, como por ejemplo, que la suma de un número real y su inverso aditivo es siempre cero o a la propiedad absorvente del cero, para dar cuenta que la solución (0,0) siempre pertenece al CSELH; lo que indica además una *concepción proceso* de **R** como grupo.

Inciso 1d): Si se dan ejemplos de trasformaciones específicas entre dos soluciones o entre un número real con una solución, esto da cuenta de una *concepción acción* de operación binaria; si por el contrario se caracterizan operaciones considerando el o los conjuntos sobre los cuales actúan, verificando propiedades, evidencia una *concepción proceso* de una operación binaria, lo que además muestra una *concepción objeto* de CSELH.

En la Tabla N° 20 se presenta, en función del análisis anterior, una lista de acciones que son representativas de las concepciones asociadas a las construcciones mentales que un estudiante muestra de un concepto matemático y aquellos mecanismos mentales que permiten su construcción. Por ejemplo, la acción escribir un conjunto con las soluciones de una ELH se considera relevante para dar cuenta de una concepción *acción* de CSELH.

Tabla N°20: Acciones que están en sintonía con construcciones y mecanismos mentales.

Acción ligada a la concepción de un concepto			**Construcción Mental**			**Mecanismo Mental**				
Quehacer de un estudiante asociado a la pregunta 1	**Rótulo**	**Concepto asociado**	**A**	**P**	**O**	**I**	**C**	**R**	**E**	**D**
Escribir un conjunto con algunas soluciones de una ELH	**FCS**	.-CSELH	X							
Asignar cantidades con un parámetro	**DCP**	.-Descomponer ecuación		X		X				
Escribir una operación binaria relacionando elementos del CSELH	**EOB**	.-Operación binaria	X							
		.-CSELH		X						
Identificar estructura para el CSELH	**REC**	.-Cartesiano $\mathbf{R}^2$		X					X	
		.-CSELH			X				X	
		.-Sub-espacio Vectorial	X							
Aplicar inversos al resolver una ELH	**AIE**	**.-R** como grupo	X							
Argumentar procedimientos referenciando propiedades de los números reales.	**AEP**	**.-R** como cuerpo		X						
		.-CSELH		X			X		X	
		.-Sub-espacio vectorial		X			X			

2) Sean S_1, S_2 y S_3, los conjuntos solución de tres ELH´s distintas. Cada uno de los siguientes pares ordenados (-4,3), (-3,1) y (-1,2) pertenecen a S_1, S_2 y S_3, respectivamente.

a) ¿Cómo interpreta geométricamente la ecuación: (-4,3) = -1(3,-1) + 1(-1,2)? Explique en la Figura 1.

b) Determine otro elemento de S_2 y de S_3 y luego escriba, de acuerdo a lo explicitado en el inciso **a)**, una nueva ecuación para (-4,3). Comente lo realizado.

c) Considerando dos pares ordenados de S_1, escriba una ecuación para el par ordenado (0,0).

d) Repita el inciso **c)** pero considerando un par ordenados de S_2 y otro de S_3. ¿Qué puede conjeturar? Explique.

e) Determine las ELH asociadas a S_1, S_2 y S_3, respectivamente, y establezca una relación entre ellas. Explique.

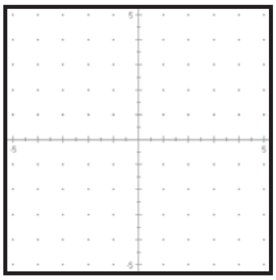
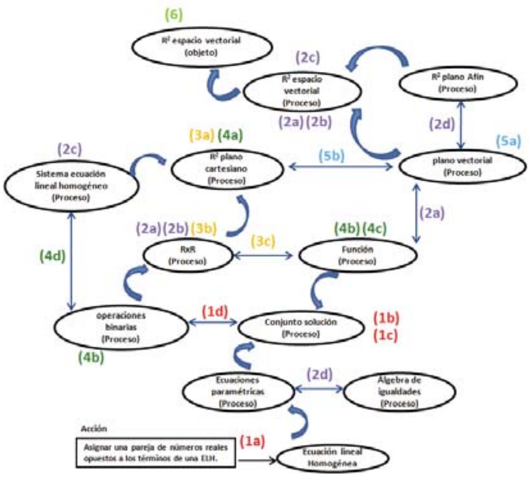


Figura1

Propósito de la pregunta 2:

Esta pregunta tiene como propósito situar al estudiante en una estructura de $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ y en su relación con el plano cartesiano, donde las ecuaciones paramétricas articulan el CSELH con el gráfico de una función lineal desde un sistema de coordenadas rectangular; así proyectar el álgebra de soluciones a un espacio vectorial $\mathbf{R}^2$, donde el concepto de combinación lineal se articula con el método del paralelogramo, desde la suma de vectores geométricos.



Objetivo de la pregunta 2, en su globalidad permite indagar en el tipo de *concepción*, *acción* o *proceso*, que muestra un estudiante universitario respecto del cartesiano $\mathbf{R}^2$ y la *concepción*, *acción*, *proceso* u *objeto*, que este muestra de plano cartesiano.

Inciso 2a): Verificar la igualdad, resolviendo la operatoria que plantea la ecuación dada, muestra una *concepción acción* del cartesiano $\mathbf{R}^2$ y el graficar puntos o vectores en un sistema de coordenadas denota una *concepción acción* de plano cartesiano o plano vectorial. Por otro lado, relacionar la ponderación de una solución por un número real con la dilatación de un segmento dirigido denota una *concepción proceso* del plano cartesiano. Recurrir al método del paralelogramo para representar la ecuación da cuenta de una *concepción proceso* álgebra de vectores.

Inciso 2b): Recurrir a la definición de ELH para determinar otra solución de una ELH, evidencia una *concepción acción* de CSELH o bien, si se define una operación binaria en el CSELH denota una *concepción proceso* de operación binaria. Por otro lado, el escribir una nueva ecuación determinando escalares desde un sistema de ecuaciones evidencia *una concepción acción* de ecuación vectorial no homogénea o si determina escalares aludiendo a una contracción o dilatación desde el método del paralelogramo, da cuenta de una *concepción proceso* de álgebra de vectores.

Inciso 2c): Escribir una ecuación en términos de una solución y su inversa aditiva o bien ponderar con el escalar cero a dos soluciones del CSELH, evidencia una *concepción proceso* de cartesiano $\mathbf{R}^2$ y *una concepción acción* de ecuación vectorial homogénea.

Inciso 2d): Escribir una ecuación vectorial homogénea en términos de dos parámetros para resolver un sistema de ecuaciones evidencia una *concepción proceso* de cartesiano $\mathbf{R}^2$.

Inciso 2e): Escribir ecuaciones paramétricas para determinar una ELH, evidencia una *concepción proceso* de conjunto solución y una *concepción acción* de **R** como grupo

En la Tabla N°21, se presenta, en función del análisis anterior, una lista de acciones que son representativas de las concepciones asociadas a las construcciones mentales.

Tabla N°21: Acciones que están en sintonía con construcciones y mecanismos mentales.

Acción ligada a la concepción de un concepto			**Construcción Mental**			**Mecanismo Mental**				
Acción asociada al quehacer de un estudiante	**Rótulo**	**Concepto asociado**	**A**	**P**	**O**	**I**	**C**	**R**	**E**	**D**
Representa geométricamente una ecuación de pares ordenados	**RGE**	.-Paralelogramo		X			X			
Escribe una ecuación de pares ordenados.	**EEPO**	.-Operación binaria		X			X			
		.-Combinación lineal	X							
Clasifica elementos de **R**×**R** en función del elemento (0,0)	**CPO**	.-Cartesiano $\mathbf{R}^2$		X						
		.-Conjunto linealmente independiente.	X							
Relaciona la composición aditiva de soluciones con composición aditiva de las respectivas ELH's	**RCA**	.-Operación Binaria			X					
Relaciona la descomposición aditiva de soluciones con la descomposición aditiva de las respectivas ELH's	**RDA**	.-Espacio vectorial	X							
		.-Operación binaria			X					

3) Dada la ecuación lineal homogénea $ax + by = 0$. Responda a las siguientes preguntas:

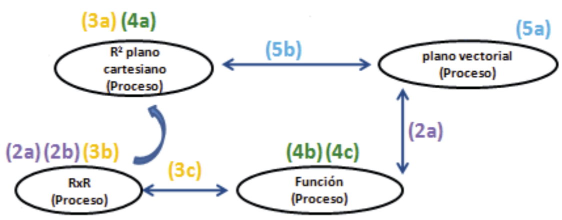
a) ¿Cuál es el conjunto solución para dicha ecuación en función de los parámetros *a* y *b*? Explique

b) ¿Cómo explica, en términos de una estructura algebraica para **R**×**R**, $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1,0) + b(0,1)$; $\forall (a, b) \in$ **R**×**R**? Explique

c) ¿Qué está planteando la función biyectiva $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \times \{0\};\ a \to f(a) = (a, 0)$ en términos de **R** y **R**×{0}? Explique

Propósito de la pregunta 3:

El propósito de esta pregunta es situar al estudiante en subconjuntos propios del cartesiano **R**×**R**, desde el CSELH, para que articule con el cartesiano $\mathbf{R}^2$ desde una estructura algebraica; reconociendo subconjuntos de **R**×**R** que son isomorfos a **R**, desde una biyección.



Objetivo de la pregunta 3, en su globalidad procura evidenciar si un estudiante universitario muestra de una *concepción proceso* de cartesiano $\mathbf{R}^2$ y una *concepción objeto* de operación binaria.

Inciso 3a): Mostrar todas las posibilidades que tiene el CSELH en términos de los coeficientes nulos de una ELH y su relación con subconjuntos propios de $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, evidencia una concepción proceso de CSELH y cartesiano $\mathbf{R}^2$.

Inciso 3b): Argumentar que cualquier elemento de $\mathbf{R}^2$ es combinación lineal de elementos de los subconjuntos propios $\mathbf{R}\times\{0\}$ y $\{0\}\times\mathbf{R}$, da cuenta de una *concepción acción* del conjunto generador y una *concepción proceso* de cartesiano $\mathbf{R}^2$.

Inciso 3c): Identificar, desde una biyección entre $\mathbf{R}$ y $\mathbf{R}\times\{0\}$, que $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ tiene subconjuntos isomorfos a $\mathbf{R}$, evidencia una concepción objeto de *operación binaria* y una *concepción proceso* de función. En la Tabla N°22, se presenta, en función del análisis anterior, una lista de acciones que son representativas de las concepciones asociadas a las construcciones mentales.

Tabla N°22: Acciones que están en sintonía con construcciones y mecanismos mentales.

Acción ligada a la concepción de un concepto			**Construcción Mental**			**Mecanismo Mental**				
***Acción* asociada al quehacer de un estudiante**	**Rótulo**	**Concepto asociado**	**A**	**P**	**O**	**I**	**C**	**R**	**E**	**D**
Asociar subconjuntos propios de $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ con el CSELH	**SPCS**	.-Cartesiano $\mathbf{R}^2$		X			X		X	
Reconocer que cualquier elemento de $\mathbf{R}^2$ se descompone aditivamente en otros dos.	**DAPO**	.-Operación binaria		X			X			
		.-Combinación lineal	X							
		.-Conjunto generador	X							
Reconocer desde una biyección que hay subconjuntos de $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ isomorfos a $\mathbf{R}$	**RCI**	.-Función		X						
		.-Operación binaria			X					

4) Considere la Figura 1 para responder

a) Determine 5 pares ordenados asociados a la gráfica de la Figura 2.

b) ¿Qué relación puede establecer entre $f:\mathbf{R}\times\{(1,-3)\}\to\mathbf{R}^2\ ;\ t\bullet(1,-3)=(t,-3t)$ y la gráfica en la Figura 2? Explique

c) ¿Cómo interpreta el recorrido de la función f ?

d) Geométricamente, ¿cómo interpreta el hecho que de la ecuación $3x+2y=0$ se puedan desprender las ecuaciones homogéneas $x+y=0$ y $2x+y=0$.

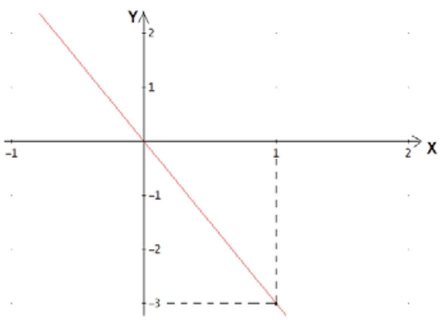
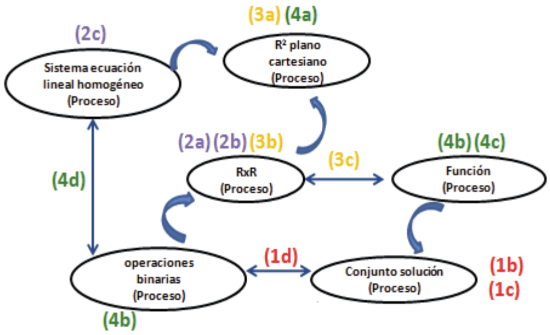


Figura 2

Propósito de la pregunta 4:

Esta pregunta tiene por propósito situar al estudiante en los conceptos plano cartesiano, cartesiano $\mathbf{R}^2$, operación binaria y gráfico de función para establecer una relación entre dichos conceptos desde el CSELH. Donde el componer o descomponer aditivamente una ELH se trasfiere a pares ordenados y funciones lineales.



Objetivo de la pregunta 4, en su globalidad procura evidenciar si un estudiante universitario muestra una *concepción objeto* de función.

Inciso 4a): Determinar pares ordenados de la gráfica de una función y atender a la definición formal de función para obtener otros pares ordenados, da cuenta de una *concepción acción* de gráfico de una función lineal y de plano cartesiano. Si determina, desde la ponderación por escalar, otros elementos del gráfico de la función lineal evidencia una *concepción proceso* de gráfico y la construcción proceso cartesiano $\mathbf{R}^2$ desde la coordinación de los procesos CSELH y gráfico de una función lineal.

Inciso 4b): Relacionar el recorrido de la función dada con el gráfico de una función lineal, da cuenta de una *concepción proceso* de función.

Inciso 4c): Relacionar el recorrido de la función con la dilatación de un segmento dirigido y la ponderación de un par ordenado con un escalar, evidencia una *concepción de proceso* de función.

Inciso 4d): Relacionar la descomposición aditiva de una ELH en otras dos ELH con el método del paralelogramo, evidencia una *concepción esquema* espacio vectorial. En la Tabla N°23, se presenta, en función del análisis anterior, una lista de acciones que son representativas de las concepciones asociadas a las construcciones mentales.

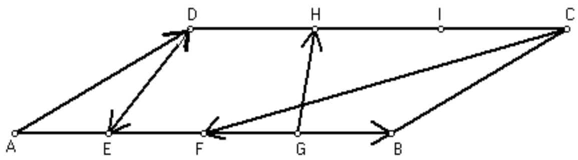
Tabla N°23: Acciones que están en sintonía con construcciones y mecanismos mentales.

Acción ligada a la concepción de un concepto			**Construcción Mental**			**Mecanismo Mental**				
***Acción* asociada al quehacer de un estudiante**	**Rótulo**	**Concepto asociado**	**A**	**P**	**O**	**I**	**C**	**R**	**E**	**D**
Determinar pares ordenados de una gráfica.	**DPG**	.-Plano cartesiano	X							
		.-Función		X						
		.-CSELH		X			X			
		.-Operación binaria		X			X			
Reconocer el conjunto de las imágenes de la función con la ponderación por escalar.	**RRFP**	.-Operación binaria		X						
		.-Función			X					
Relacionar la dilatación de un segmento dirigido con la ponderación por escalar.	**PESD**	.-Función afín		X			X			
		.-Conjunto generador	X							
		.-Recta vectorial		X			X			
Asociar la descomposición aditiva de una ELH en otras dos con otros objetos matemáticos asociados.	**DAE**	.-Espacio vectorial		X						
		.-Operación binaria		X						

5) En la Figura 3, A, B, C y D son los vértices de un paralelogramo. El lado $\overline{AB}$ se divide en cuatro partes iguales y el lado $\overline{DC}$ en tres partes iguales.

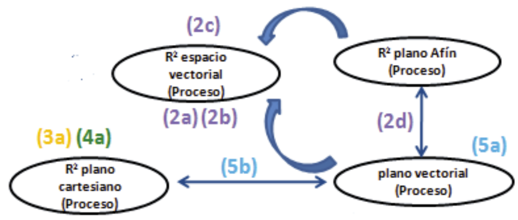
a) Siendo $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{DE}=\vec{u}$, $\overrightarrow{CF}=\vec{v}$ y $\overrightarrow{GH}=\vec{w}$. Escriba cada uno de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ en función de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

b) Escriba $\vec{w}$ en términos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$



Propósito de la pregunta 5:

Esta pregunta tiene por objetivo situarnos en el álgebra de vectores geométricos desde el método del paralelogramo para establecer una relación entre dos operaciones binaras, una interna y la otra externa.



Objetivo de la pregunta 5, en su globalidad procura evidenciar si un estudiante universitario muestra una *concepción acción* o *concepción proceso* de álgebra de vectores geométricos.

Inciso 1a): Aplicar el método del paralelogramo considerando la dirección y sentido de los vectores geométricos permite evidenciar una concepción *acción* de álgebra de vectores geométricos.

Inciso 1b): Relacionar las ecuaciones que se desprenden de aplicar el método del paralelogramo aplicando un álgebra de igualdades evidencia una *concepción proceso* de álgebra de vectores. En la Tabla N°24 se presenta, en función del análisis anterior, una lista de *acciones* que son representativas de las concepciones asociadas a las construcciones mentales.

Tabla N°24: Acciones que están en sintonía con construcciones y mecanismos mentales.

Acción ligada a la concepción de un concepto			**Construcción Mental**			**Mecanismo Mental**			
***Acción* asociada al quehacer de un estudiante**	**Rótulo**	**Concepto asociado**	**A**	**P**	**O**	**I**	**C**	**R**	**E**	**D**
Relacionar vectores geométricos, desde la regla del paralelogramo, atendiendo a la dirección y sentido de vectores	**RVRP**	.-Combinación lineal	X			X				
		.-Regla Paralelogramo	X			X				
Relacionar igualdades entre vectores para escribir combinaciones lineales.	**CERP**	.-Combinación lineal		X			X			
		.-álgebra de vectores								
		.-Operación binaria		X X			X X			

6) Sea $V=\{(a,b)/a,b\in \mathbf{R}^{+}\}$. Se define**:** $(a,b)+(a_1,b_1)=(aa_1,bb_1)$ y $p(a,b)=(a^{p},b^{p})$, $p\in \mathbf{R}$. Determine si V , con las operaciones definidas, es o no un espacio vectorial sobre $\mathbf{R}$.

Propósito de la pregunta 6:

Esta pregunta tiene por objetivo situarnos en la estructura de espacio vectorial considerando operaciones no usuales.

La pregunta 6, en su globalidad procura evidenciar si un estudiante universitario evidencia una *concepción proceso* espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ cuando relaciona propiedades de un espacio vectorial en el conjunto V o una *concepción acción* cuando verifica axiomas de espacio vectorial en el conjunto dado con operaciones no usuales. En la Tabla N°25, se presenta, en función del análisis anterior, una lista de *acciones* que son representativas de las concepciones asociadas a las construcciones mentales.

Tabla N°25: Acciones que están en sintonía con construcciones y mecanismos mentales.

Acción ligada a la concepción de un concepto			**Construcción Mental**			**Mecanismo Mental**			
***Acción* asociada al quehacer de un estudiante**	**Rótulo**	**Concepto asociado**	**A**	**P**	**O**	**I**	**C**	**R**	**E**	**D**
Relacionar propiedades de un espacio vectorial.	**VPEV**	.-Axiomas de espacio vectorial		X						
Asociar un elemento neutro aditivo e inversos aditivos.	**VEI**	.-Grupo		X						

4.3.- Análisis y verificación de datos: Análisis a las respuestas del cuestionario de la DG para el espacio vectorial R^2

Una vez realizado el análisis a priori de las preguntas del cuestionario que se presentó en el apartado anterior y, habiéndose establecido hipotéticamente aquellas *acciones* que son relevantes para dar cuenta de las construcciones y mecanismos mentales a la luz de la DG, se aplicó por separado el cuestionario a los estudiantes del caso 1 y caso 2. A continuación un análisis en detalle de cada una de las respuestas dadas por los estudiantes de cada caso.

El cuadernillo de trabajo, que se les entregó a los estudiantes, incluía una tabla con el procedimiento para obtener un par de soluciones de una ELH y las propiedades de espacio vectorial, lo que se puede apreciar en la Figura 20, además de las 6 preguntas.

Cuadernillo de Trabajo:

Nombre: ____________________ Fecha: __________

Instrucciones: Considere la siguiente información, que a continuación se presenta, para responder algunas de las preguntas del cuestionario que le precede.

a).-Debe usar lápiz pasta para desarrollar el cuestionario
b).-No un hay tiempo límite para trabajar el cuestionario.

I) Procedimiento para obtener pares ordenados del conjunto solución de una ecuación lineal homogénea.

Tabla1: Procedimiento para obtener elementos del conjunto solución de una ELH.

Ecuación lineal homogénea: $3x+2y=0$
Procedimiento
Consideremos un par de números reales, uno el inverso aditivo del otro. Para simplicidad en los cálculos consideremos 5 y -5. Luego la ecuación lineal homogénea se puede descomponer de la siguiente manera: $3x=5 \wedge 2y=-5 \Rightarrow x=\frac{5}{3} \wedge y=\frac{-5}{2} \quad \vee \quad 3x=-5 \wedge 3y=5 \Rightarrow x=\frac{-5}{3} \wedge y=\frac{5}{2}$ Donde, $\left(\frac{5}{3},\frac{-5}{2}\right)$ y $\left(\frac{-5}{3},\frac{5}{2}\right)$ son dos elementos del conjunto solución de la ELH: $S=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}\times \boldsymbol{R} / 3x+2y=0\}$

II) Dado un conjunto G no vacío y un cuerpo K=$\boldsymbol{R}$. Si $(G,+)$ es un grupo y además, dada una operación $\bullet : K\times G \rightarrow G$, $(p,v)\rightarrow p\bullet v$ que cumple con las siguientes propiedades:

(i) $(pq)\bullet v = p\bullet(q\bullet v)$; $p,q\in K; v\in G$
(ii) $(p+q)\bullet v = p\bullet v + q\bullet v$; $p,q\in K; v\in G$
(iii) $1\bullet v = v$; $1\in K; v\in G$
(iv) $p\bullet(v+w) = p\bullet v + p\bullet w$; $p\in K; v,w\in G$

G, con las operaciones dadas, es un espacio vectorial.

Figura 20: Procedimiento para determinar un par de soluciones de una ELH y propiedades de un espacio vectorial como punto de partida para comenzar el cuestionario.

4.3.1.-Análisis a las respuestas de los estudiantes caso 1

En las tablas N°26, N°27, N°28 y N°29 se presenta un análisis a las respuestas de los **E1** a **E5**, caso 1, a la pregunta 1 del cuestionario 1, en términos de las construcciones y mecanismos mentales que se pueden evidenciar desde los argumentos que manifiestan estos estudiantes. Estudiantes de pedagogía y licenciatura en matemática de U1. Para simplificar algunas palabras que se usarán de manera recurrente en los relatos, se conviene en escribir por Estudiante 1 a **E1,** y así sucesivamente, de manera correlativa como ya se estipuló al final del capítulo III. Por otro lado, en relación a los argumentos que despliegan los estudiantes, designaremos por **Ar1E1P1a** al argumento 1 del estudiante 1 en la pregunta 1 apartado a) y, de manera correlativa, los demás argumentos en función del estudiante y la pregunta que se analiza.

Tabla N°26: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 1, apartado 1a), y su relación con las construcciones y mecanismos mentales de los conceptos asociados a la pregunta.

Pregunta 1: apartado 1a)		
Estudiante	**Argumentos que manifiestan los estudiantes.**	**Construcciones y mecanismos mentales que se asocian al argumento observado.**
E1	Según la Figura 21: **Ar1E1P1a**: Asigna parejas de números reales, uno el inverso aditivo del otro, a los términos de la ELH; según procedimiento dado en la Tabla 15. **Ar2E1P1a**: Escribe ecuaciones de primer grado que se desprenden de aplicar el procedimiento dado a la ELH. **Ar3E1P1a**: Escribe las soluciones de las ecuaciones que desprende de la ELH. **Ar4E1P1a**: Escribe un conjunto con las parejas de pares ordenados asociados a las soluciones de las ecuaciones; estableciendo una relación con el CSELH de la ELH, aunque equivoca la relación entre ambos conjuntos.	**Ar1E1P1a**, **Ar2E1P1a** y **Ar3E1P1a** muestran una *concepción proceso* de **R** como grupo y el **Ar4E1P1a** da cuenta de una *concepción acción* de CSELH.

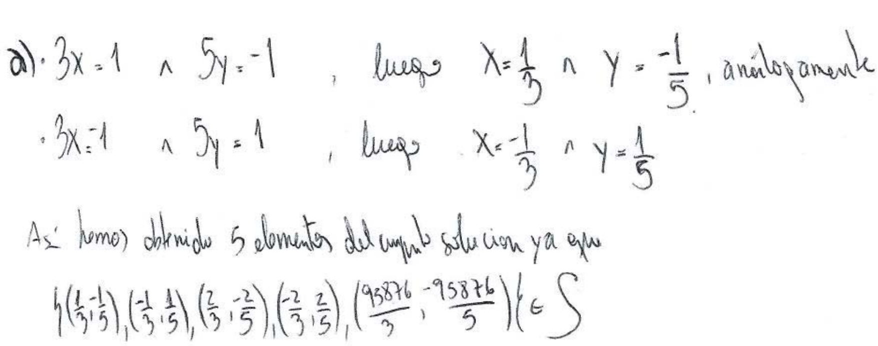


Figura 21: Parte de la respuesta **E1** a la pregunta 1a).

<table>
<tr>
<td>E2</td>
<td>Según la Figura 22:
Ar1E2P1a: Asigna parejas de números reales, uno el inverso aditivo del otro, a los términos de la ELH; según procedimiento dado en la Tabla N°15.

Ar2E2P1a: Escribe ecuaciones de primer grado que se desprenden de aplicar el procedimiento dado a la ELH.

Ar3E2P1a: Escribe las soluciones de las ecuaciones que desprenden de la ELH.

Ar4E2P1a: Escribe y lista las parejas de pares ordenados que determina con las soluciones de las ecuaciones asociadas a la ELH.</td>
<td>Ar1E2P1a, Ar2E2P1a y Ar3E2P1a muestran una concepción acción de R como grupo y el Ar4E2P1a muestra una concepción acción de CSELH.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">

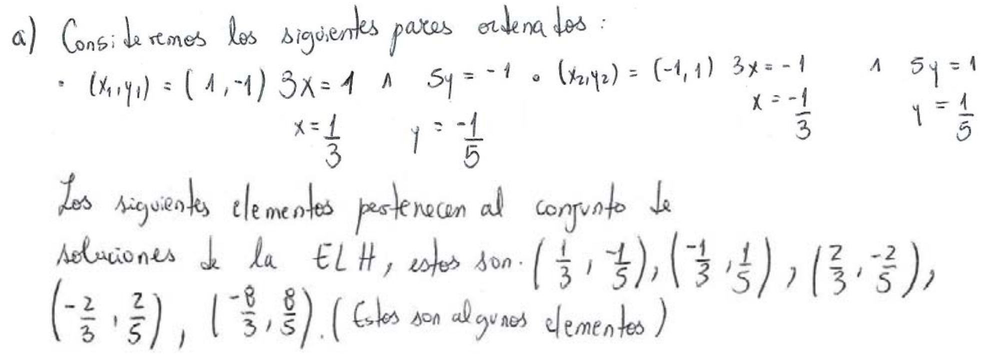


Figura 22: Parte de la respuesta **E2** a la pregunta 1a).
</td>
</tr>
<tr>
<td>E3</td>
<td>Según Figura 23:
Ar1E3P1a: Asigna parejas de números reales, uno el inverso aditivo del otro, a los términos de la ELH; según procedimiento dado en la Tabla N°15.

Ar2E3P1a: Escribe ecuaciones de primer grado que se desprenden de aplicar el procedimiento dado a la ELH.

Ar3E3P1a: Escribe las soluciones de las ecuaciones que desprenden de la ELH.

Ar4E3P1a: Escribe parejas de pares ordenados con las soluciones de las ecuaciones asociadas a la ELH.</td>
<td>Ar1E3P1a, Ar2E3P1a y Ar3E3P1a muestran una concepción proceso de R como cuerpo y Ar4E3P1a muestra una concepción proceso de solución de una ELH.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">

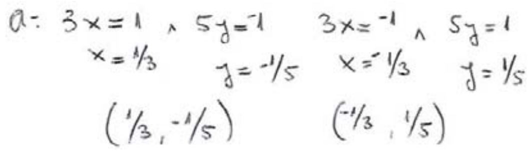


Figura 23: Parte de la respuesta **E3** a la pregunta 1a).
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>E4</td>
<td>Según Figura 24:
Ar1E4P1a: Asigna parejas de números reales, uno el inverso aditivo del otro, a los términos de la ELH; según procedimiento dado en la Tabla N°15.

Ar2E4P1a: Escribe ecuaciones de primer grado que se desprenden de aplicar el procedimiento dado a la ELH.

Ar3E4P1a: Escribe las soluciones de las ecuaciones que desprenden de la ELH.

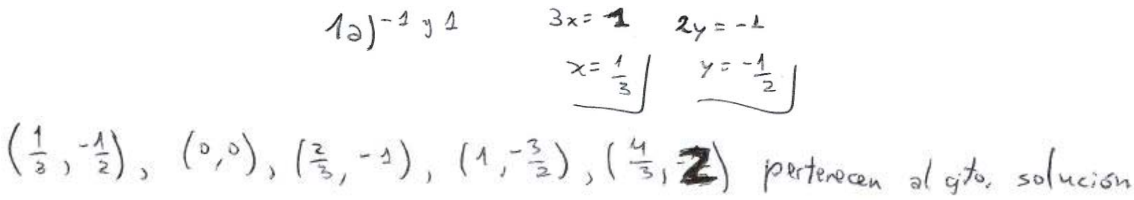
Ar4E4P1a: Lista parejas de pares ordenados con las soluciones de las ecuaciones asociadas a la ELH.</td>
<td>Ar1E4P1a, Ar2E4P1a y Ar3E4P1a muestran una concepción proceso de R como cuerpo y Ar4E4P1a muestra una concepción acción de conjunto solución de una ELH.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">

Figura N°24: Parte de la respuesta E4 a la pregunta 1a).</td>
</tr>
<tr>
<td>E5</td>
<td>Según Figura 25:
Ar1E5P1a: Asigna parejas de números reales, uno el inverso aditivo del otro, a los términos de la ELH; según procedimiento dado en la Tabla N°15.

Ar2E5P1a: Escribe ecuaciones de primer grado que se desprenden de aplicar el procedimiento dado a la ELH.

Ar3E5P1a: Escribe las soluciones de las ecuaciones que desprenden de la ELH.

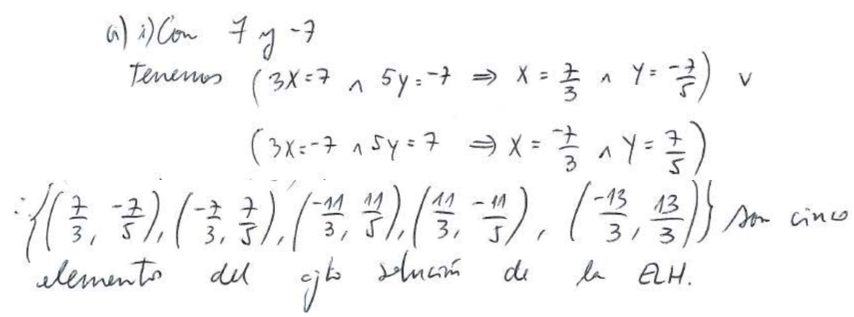
Ar4E5P1a: Escribe un conjunto con parejas de pares ordenados con las soluciones de las ecuaciones asociadas a la ELH.</td>
<td>Ar1E5P1a, Ar2E5P1a y Ar3E5P1a muestran una concepción proceso de R como cuerpo y Ar4E5P1a muestra una concepción acción del conjunto solución de la ELH.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">

Figura 25: Parte de la respuesta E5 a la pregunta 1a).</td>
</tr>
</table>

Comentarios a lo planteado por los E1, E2, E3, E4 y E5 Pregunta 1, apartado 1a)

En primer lugar se puede apreciar que la *acción* asociar un par de números reales a los términos de una ELH se evidencia desde las respuestas que dan los 5 estudiantes en el apartado 1a). Se hace notar que el **E3**, utiliza la ELH que ilustra el procedimiento dado en el cuadernillo de trabajo lo que justifica su respuesta en términos de otra ecuación. En general, en atención a los argumentos que se dan en la Tabla N°26, se manifiesta una *concepción acción* de CSELH por parte de los cinco estudiantes.

Tabla N°27: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 1, apartado 1b), y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

Pregunta 1: apartado 1b)		
Estudiante	**Argumentos que manifiestan los estudiantes.**	**Construcciones y mecanismos mentales que se asocian al argumento observado.**
E1	Según la Figura 26 **Ar5E1P1b**: Utiliza un parámetro para reescribir el CSELH en términos de dos ecuaciones paramétricas asociadas a la ELH. **Ar6E1P1b**: Indica que la variación del parámetro se da en ***R***.	**Ar5E1P1b** evidencia que la *acción* asociar un par de números reales *interioriza* en el *proceso* separar ecuaciones, donde asociar un parámetro y un conectivo lógico a los términos de una ELH actúa como un mecanismo de *interiorización*.
b) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 3x+5y=0\}$ $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = \frac{a}{3} \wedge y = \frac{-a}{5}$ tq $a \in \mathbb{R}\}$ *Figura 26*: Respuesta **E1** a la pregunta 1b).		
E2	Según Figura 27: **Ar5E2P1b**: Utiliza un parámetro para reescribir un subconjunto del conjunto solución, en términos de dos ecuaciones paramétricas asociadas a la ELH. **Ar6E2P1b**: Indica que la variación del parámetro se da en ***Z*** (conjunto de los números enteros).	**Ar5E2P1b** evidencia que la *acción* asociar un par de números reales, uno inverso aditivo del otro, *interioriza* en el *proceso* separar ecuaciones, donde asociar un parámetro y un conectivo lógico a los términos de la ELH actúa como *mecanismo* de *interiorización*.
b) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / 3x+5y=0\} \rightarrow$ Infinitas soluciones. Pero mis soluciones se obtienen de lo siguiente. $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = \frac{n}{3} \wedge y = \frac{-n}{5} / n \in \mathbb{Z}.\}$ $S_1 \subset S$ *Figura 27*: Respuesta **E2** a la pregunta 1b)		

<table>
<tr><td>E3</td><td>Según la Figura 28:
Ar5E3P1b: Utiliza un parámetro para reescribir el CSELH en términos de dos ecuaciones paramétricas asociadas a la ELH.

Ar6E3P1b: Indica la variación del parámetro en R.</td><td>Ar5E3P1b evidencia que la acción asociar un par de números reales, se interioriza en el proceso separar una ecuación, donde asociar un parámetro a los términos de una ELH actúa como un mecanismo de interiorización.</td></tr>
<tr><td colspan="3">b: Sea $x=a$ e $y=-a$
$3x=a$ $5y=-a$
$x=a/3$ $y=-a/5$
$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x=a/3 \wedge y=-a/5 , a\in\mathbb{R}\}$
Figura 28: Respuesta E3 a la pregunta 1b).</td></tr>
<tr><td>E4</td><td>Según la Figura 29:
Ar5E4P1b: Determina un vector generador del CSELH.

Ar6E4P1b: Reescribe el conjunto solución de la ELH definiendo la multiplicación de un par ordenado específico por un escalar en R.</td><td>Ar5E4P1b y Ar5E4P1b dan cuenta que multiplicar un vector del CSELH por un escalar cualesquiera en R, evidencia una concepción proceso de operación binaria externa y una concepción proceso del CSELH.</td></tr>
<tr><td colspan="3">1b) Sea $A=(\frac{1}{3},-\frac{1}{2})$, $B=(0,0)$, $\overrightarrow{AB}=(-\frac{1}{3},\frac{1}{2})$
$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / (x,y)=t(-\frac{1}{3},\frac{1}{2}) , t\in\mathbb{R}\}$
Figura 29: Respuesta E4 a la pregunta 1b).</td></tr>
<tr><td>E5</td><td>Según Figura 30:
Ar5E5P1b: Escribe el conjunto solución atendiendo a la definición que se dio en el procedimiento de la Tabla N°15.</td><td>Ar5E5P1b, escribir la definición de CSELH en atención al procedimiento de la Tabla N°15, evidencia una concepción acción del CSELH.</td></tr>
<tr><td colspan="3">b) $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} / 3x+5y=0\}$
Figura 30: Respuesta E5 a la pregunta 1b).</td></tr>
</table>

Comentarios a lo planteado por los E1, E2, E3, E4 y E5 a la pregunta 1, apartado 1b)

Se puede apreciar que **E5** se limita solo a escribir la definición del CSELH que fue dada en el procedimiento del cuadernillo de trabajo. Además **E2** define un subconjunto del

CSELH al considerar la variación del parámetro en ***Z***, conjunto de los números enteros. Los **E1**y **E3** reescriben el conjunto solución utilizando un parámetro y escribiendo ecuaciones paramétricas asociadas a la ELH. Luego, se puede plantear que el uso de un parámetro permite *interiorizar* la *construcción acción*, asociar un par de números reales a los términos de la ELH, en la *construcción proceso* separar una ecuación. Por otro lado **E4** evidencia una *concepción proceso* de cartesiano $\mathbf{R}^2$ cuando pondera un vector específico al CSELH desde el uso de un parámetro; además da cuenta de una *concepción proceso* de conjunto generador, al definir un vector generador para el CSELH.

Tabla N°28: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 1, apartado 1c), y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

Pregunta 1: apartado 1c)		
Estudiante	**Argumentos que manifiestan los estudiantes.**	**Construcciones y mecanismos mentales que se manifiestan desde las acciones.**
E1	Según la Figura 31: **Ar7E1P1c**: Identifica la solución trivial, como elemento invariante del conjunto solución de una ELH, para afirmar que el CSELH es no vacío.	**Ar7E1P1c** evidencia que el identificar el par (0,0) como elemento invariante en el CSELH, muestra una *concepción proceso* de conjunto solución.

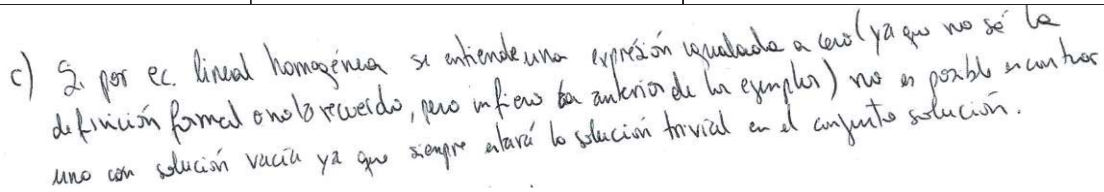

c) Si por ec. lineal homogénea se entiende una expresión igualada a cero (ya que no sé la definición formal o no lo recuerdo, pero infiero por anterior de los ejemplos) no es posible encontrar uno con solución vacía ya que siempre estará la solución trivial en el conjunto solución.

Figura 31: Respuesta **E1** a la pregunta 1c.

E2	Según la Figura 32: **Ar7E2P1c**: Manifiesta que el CSELH es no vacío sin dar una razón fundada.	**Ar7E2P1c** evidencia que asumir la posibilidad de obtener siempre soluciones de una ELH muestra una *concepción acción* de CSELH.

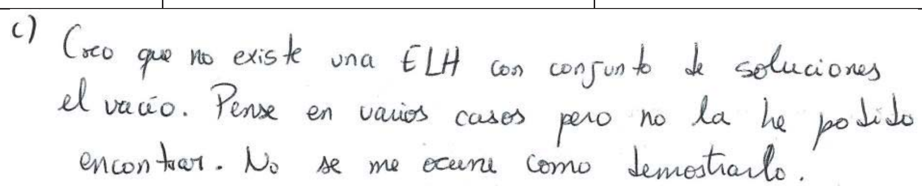

c) Creo que no existe una ELH con conjunto de soluciones el vacío. Pense en varios casos pero no la he podido encontrar. No se me ocurre como demostrarlo.

Figura 32: Respuesta **E2** a la pregunta 1c).

E3	Según Figura 33: **Ar7E3P1c**: Identifica la solución trivial como invariante en el conjunto solución de una ELH, para afirmar que éste es no vacío.	**Ar7E3P1c** muestra que la acción identificar el par (0,0) como un elemento invariante en el CSELH, evidencia una *concepción proceso* de dicho conjunto.

<table>
<tr><td colspan="3">C: No, ya que toda ecuación lineal tiene por lo menos la solución trivial (0,0).
Figura 33: Respuesta E3 a la pregunta 1c).</td></tr>
<tr><td>E4</td><td>Según Figura 34:
Ar7E4P1c: Compara la función lineal con la ecuación lineal homogénea.

Ar8E4P1c: sugiere que ver el gráfico de la función lineal como el CSELH, permite plantear que el CSELH es no vacío.</td><td>Ar7E4P1c y Ar8E4P1c muestran que el comparar el CSELH con la gráfica de la función lineal evidencia la reversión del proceso CSELH en el proceso, gráfico de una función lineal.</td></tr>
<tr><td colspan="3">1c) No es posible que el conjunto solución sea vacío.
Si consideramos la ecuación como función, tenemos:
$f(x) = -\frac{3}{5}x$, donde Dom f = ~~Rec~~ f = $\mathbb{R}$.
no se indefine.
Figura 34: Respuesta E4 a la pregunta 1c).</td></tr>
<tr><td>E5</td><td>Según la Figura 35:
Ar6E5P1c: Enuncia una propiedad de R como grupo para establecer que siempre es posible obtener un elemento del CSELH, sin explicitar el procedimiento tabla N°15.</td><td>Ar6E5P1c muestra que asignar parejas de números reales, uno el inverso aditivo del otro, a los términos de la ELH da cuenta de una concepción proceso de R como grupo.</td></tr>
<tr><td colspan="3">c) No, puesto que en $\mathbb{R}$ ~~para~~ todo número tiene inverso aditivo; luego, basta tomar x e y apropiados para obtener un par ordenado del cjto solución.
Figura 35: Respuesta E5 a la pregunta 1c).</td></tr>
</table>

Comentarios a lo planteado por los E1, E2, E3, E4 y E5 a la Pregunta 1, apartado 1c)

Se observa que **E2** manifiesta que el CSELH es no vacío, pero no logra dar con un argumento que sustente este hecho. Por otro lado **E4** compara elementos de la función lineal asociando la ELH; esto muestra que el *proceso* CSELH se revierte en otro *proceso*, gráfico de una función lineal. Por último, **E1**, **E3** y **E5** argumentan según lo esperado, atendiendo al elemento (0,0) y la propiedad absorvente del cero o al hecho de que siempre es posible asignar un par de inversos aditivos a los términos de la ELH, dando cuenta de una *concepción proceso* de **R** como grupo aditivo.

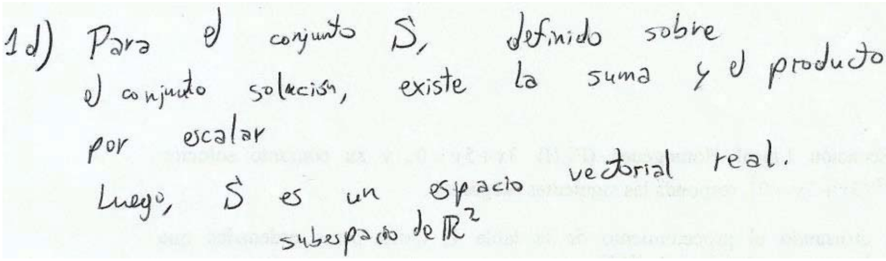
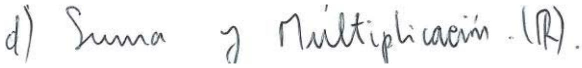
Tabla N° 29: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 1, apartado 1c), y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

<table>
<tr><th colspan="3">Pregunta 1: apartado 1d)</th></tr>
<tr><th>Estudiante</th><th>Argumentos que manifiestan los estudiantes.</th><th>Construcciones y mecanismos mentales que se manifiestan desde las acciones.</th></tr>
<tr><td>E1</td><td>Según la Figura 36:
Ar8E1P1d: Suma pares específicos del CSELH.

Ar9E1P1d: Verifica que la suma de pares ordenados es una operación binaria.</td><td>Ar8E1P1d y Ar9E1P1d muestran que sumar dos pares ordenados evidencia una concepción proceso de operación binaria y una concepción proceso de CSELH.</td></tr>
<tr><td colspan="3">especificos, particulares
d) tomaré dos pares ordenados que pertenecen a $S \neq \emptyset$ y provaré, mas bien conjeturaré si sumandose y/o multiplicandose aún pertenecen a S (resultado)
$\left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{5}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{-2}{5}\right)\right\} \in S$
• $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{2}{3}, \frac{-2}{5}\right) = \left(\frac{3}{3}, \frac{-3}{5}\right)$, luego $3\left(\frac{3}{3}\right) + 5\left(\frac{-3}{5}\right) = 0$ $\therefore$ $\left(\frac{3}{3}, \frac{-3}{5}\right) \in S$
• la suma de dos pares ordenados, comúnmente definido como la suma término a término para ser una operación binaria en S.
Figura 36: Respuesta E1 a la pregunta 1d).</td></tr>
<tr><td>E2</td><td>Según la Figura 37:
.-No hay una respuesta precisa</td><td>Solo escribir soluciones de la ELH manifiesta una concepción acción de CSELH.</td></tr>
<tr><td colspan="3">d) Podemos hacer todas las operaciones porque si tomo un punto y se lo sumo al vacío, en el vacío no hay puntos, entonces quedaría el punto inicial
Figura 37: Respuesta E2 a la pregunta 1d).</td></tr>
<tr><td>E3</td><td>Según Figura 38:
Ar8E3P1d: Define formalmente una operación binaria externa sobre el conjunto solución.

Ar9E3P1d: Explica que toda solución del CSELH se puede generar a partir un par ordenado y un escalar en R.</td><td>Ar8E3P1d y Ar9E3P1d muestra que ponderar una solución por un escalar procura coordinar dos procesos, el CSELH y la operación binaria, en un nuevo proceso, el (S, $\cdot_{\mathbf{R}}$).</td></tr>
<tr><td colspan="3">d: $(S, \cdot t)$, $\cdot: \mathbb{R} \times S \to S$, $(a,b) \in S$
$t \cdot (a,b) \rightsquigarrow (ta, tb)$, ya que al tener una solución, se pueden ir calculando las demás sólo al multiplicarla por algún escalar
Figura 38: Respuesta E3 a la pregunta 1d)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>E4</td><td>Según Figura 39:
Ar9E4P1d: Define, en términos de una función, la multiplicación por escalar.

Ar10E4P1d: Describe el rol de un vector generador en el CSELH.</td><td>Ar9E4P1d y Ar10E4P1d muestran que reconocer estructura de espacio vectorial de un subconjunto de $\mathbf{R}^2$, evidencia una concepción proceso de $\mathbf{R}^2$ espacio vectorial y una concepción objeto de CSELH y una concepción objeto de operación binaria.</td></tr>
<tr><td colspan="3">
1d) Para el conjunto S, definido sobre el conjunto solución, existe la suma y el producto por escalar
Luego, S es un espacio vectorial real.
subespacio de $\mathbb{R}^2$
Figura 39: Respuesta E4 a la pregunta 1d).</td></tr>
<tr><td>E5</td><td>Según Figura 40:
Ar7E5P1d: Reconoce que la suma y la multiplicación por escalar, son las operaciones que se pueden asociar al conjunto solución.</td><td>Ar7E5P1d muestra que reconocer estructura para el conjunto solución evidencia una concepción proceso de CSELH y una concepción objeto de operación binaria.</td></tr>
<tr><td colspan="3">
d) Suma y Multiplicación $(\mathbb{R})$.
Figura 40: Respuesta E5 a la pregunta 1d).</td></tr>
</table>

Comentarios a lo planteado por los E1, E2, E3, E4 y E5 a la Pregunta 1, apartado 1d)

De los planteamientos desplegados en la Tabla N° 29, se observa que **E4** manifiesta una *concepción proceso* del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$, cuando reconoce al CSELH como un espacio vectorial y a la vez un sub-espacio vectorial del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$; teniendo en cuenta además que en el apartado 1b) reescribe el CSELH en términos de una ponderación por un escalar. Por otro lado, **E1** define la adición de pares ordenados, **E4** define formalmente la multiplicación por escalar y **E5** hace notar que en el conjunto solución se puede definir la adición y multiplicación por escalar, lo anterior evidencia una *concepción proceso* de operación binaria y una *concepción proceso* del CSELH. Aunque **E4** manifiesta, desde sus argumentos, una *concepción objeto* de CSELH.

En la Tabla N°30, Tabla N°31, Tabla N°32 y Tabla N°33 se presenta un análisis a las respuestas **E1**a **E5** a la pregunta 2, del cuestionario 1.

Tabla N°30: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 2, apartado 2a), y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

Pregunta 2: apartado 2a)		
Estudiante	**Argumentos que manifiestan los estudiantes.**	**Construcciones y mecanismos mentales que se asocian a las acciones indicadas.**
E1	Según la Figura 41: **Ar1E1P2a**: Representa un par ordenado como el extremo de un vector geométrico anclado al origen. **Ar2E1P2a**: Interpreta la combinación lineal de dos pares ordenados como la diagonal de un paralelogramo.	**Ar1E1P2a** y **Ar1E1P2a** evidencian una concepción *proceso* de operación binaria. Además, muestran que representar geométricamente una suma de ponderaciones de soluciones, utilizando vectores geométricos en un sistema de coordenadas, da cuenta de la *coordinación* de las *construcciones proceso*, álgebra de soluciones y suma de vectores, en la *construcción proceso* álgebra de pares ordenados.

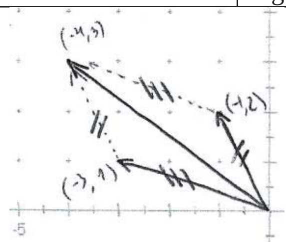


Figura 41: Respuesta **E1** a la pegunta 2a).

E2	Según la Figura 42: **Ar1E2P2a**: Representa un par ordenado a través de un vector geométrico anclado al origen. **Ar2E2P2a**: Reconoce en la ponderación por el escalar -1 un vector con sentido opuesto al vector anclado al origen, ambos colineales. **Ar3E2P2a**: Interpreta la combinación lineal de dos pares ordenados como la diagonal de un paralelogramo.	**Ar1E2P2a**, **Ar2E2P2a** y **Ar3E2P2a** evidencian una *concepción proceso* de operación binaria. Además, muestran que representar geométricamente una suma de ponderaciones de soluciones, utilizando vectores geométricos en un sistema de coordenadas, da cuenta de la *coordinación* de las *construcciones proceso*, álgebra de soluciones y suma de vectores, en la *construcción proceso* álgebra de pares ordenados.

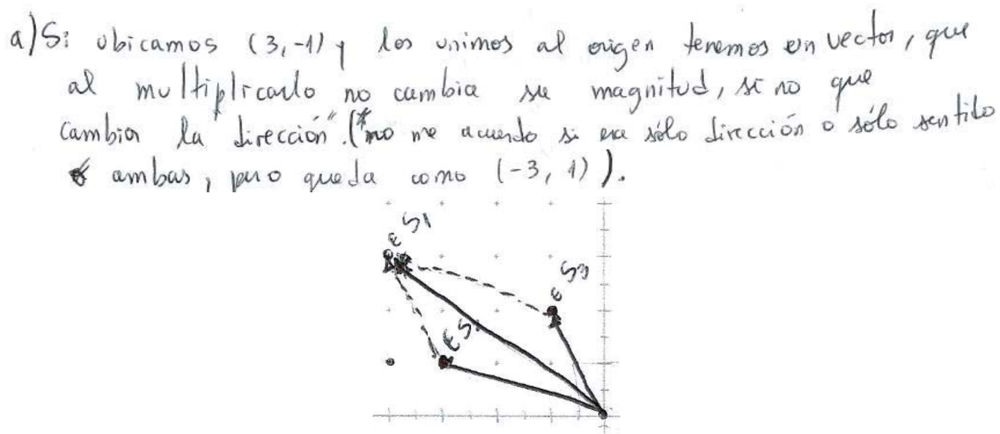


Figura 42: Respuesta **E2** a la pegunta 2a).

<table>
<tr>
<td>E3</td>
<td>Según Figura 43:
Ar1E3P2a: Representa un par ordenado como un vector geométrico anclado al origen.

Ar2E3P2a: Reconoce en la multiplicación de un par ordenado por el escalar -1 determina un vector con sentido opuesto a otro vector anclado al origen, ambos colineales.

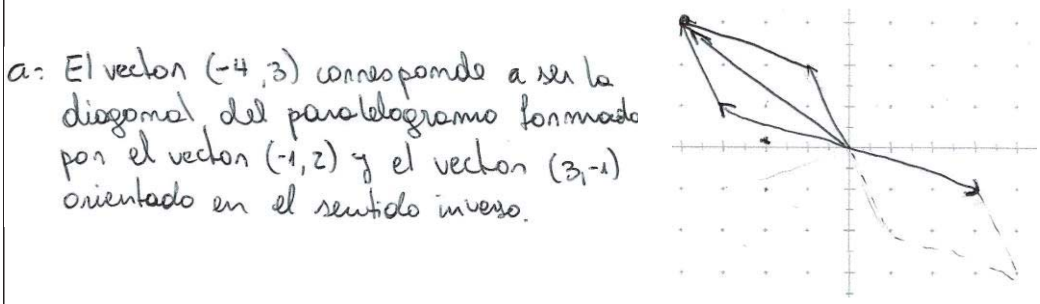
Ar3E3P2a: Interpreta la combinación lineal de dos soluciones como la diagonal de un paralelogramo.</td>
<td>Ar1E3P2a, Ar2E3P2a y Ar3E3P2a evidencian una concepción proceso de operación binaria. Además, evidencian que representar geométricamente una suma de ponderaciones de soluciones, utilizando vectores geométricos en un sistema de coordenadas, da cuenta de la coordinación de las construcciones proceso, álgebra de soluciones y suma de vectores, en la construcción proceso álgebra de pares ordenados. ArE3P2a, da cuenta de una concepción proceso de álgebra de vectores.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">

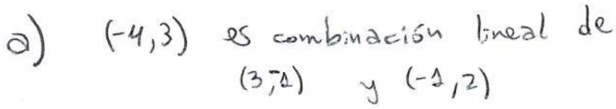
Figura 43: Respuesta E3 a la pegunta 2a).</td>
</tr>
<tr>
<td>E4</td>
<td>Según Figura 44:
Ar1E4P2a: Reconoce la ecuación de pares ordenados como una combinación lineal de vectores de $\mathbf{R}^2$ espacio vectorial.</td>
<td>Ar1E4P2a muestra que relacionar una ecuación de pares ordenados con una combinación lineal de vectores muestra una concepción proceso del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">

Figura 44: Respuesta E4 a la pegunta 2a).</td>
</tr>
<tr>
<td>E5</td>
<td>Según Figura 45:
Ar1E5P2a: Representa un par ordenado como un vector geométrico anclado al origen.

Ar2E5P2a: Reconoce en la multiplicación de un par ordenado por el escalar -1 determina un vector con sentido opuesto a otro vector anclado al origen, ambos colineales.

Ar3E5P2a: Interpreta la combinación lineal de dos pares ordenados como la diagonal de un paralelogramo.</td>
<td>Ar1E5P2a, Ar2E5P2a y Ar3E5P2a evidencian una concepción proceso de operación binaria. Además, evidencian que representar geométricamente una suma de ponderaciones de soluciones, utilizando vectores geométricos en un sistema de coordenadas, da cuenta de la coordinación de las construcciones proceso, álgebra de soluciones y suma de vectores, en la construcción proceso álgebra de pares ordenados.</td>
</tr>
</table>

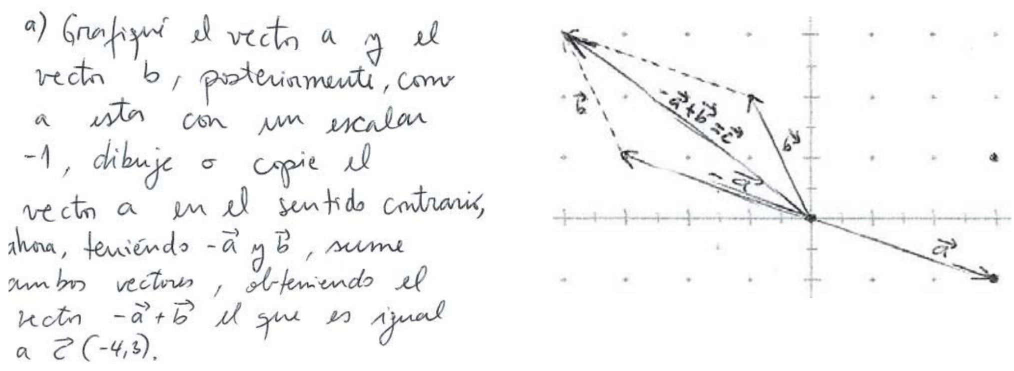


Figura 45: Respuesta **E5** a la pegunta 2a).

Comentarios a lo planteado por E1, E2, E3, E4 y E5 en la Pregunta 2, apartado 2a)

En primer lugar se puede apreciar que **E1**, **E2**, **E3** y **E5**, muestran una *concepción proceso* del álgebra de vectores al considerar el método del paralelogramo para explicar la relación que muestra la ecuación (-4,3) = -1(3,-1) +1(-1,2). En particular **E3** y **E5** indican que la ponderación de un par vector por el escalar -1 determina un vector opuesto al vector dado, esto evidencia una *concepción proceso* de ($\mathbf{R}^2$, $\cdot_{\mathbf{R}}$). **E4** interpreta la ecuación dada como una combinación lineal de un vector en términos de otros dos, lo que pone de manifiesto una *concepción proceso* del cartesiano $\mathbf{R}^2$.

Tabla N°31: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 2, apartado 2b), y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

Pregunta 2: apartado 2b)		
Estudiante	**Argumentos que manifiestan los estudiantes.**	**Construcciones y mecanismos mentales que se manifiestan desde las acciones.**
E1	Según Figura 46: **Ar3E1P2b**: Conjetura la existencia de un par ordenado inverso aditivo para cada SELH. **Ar4E1P2b**: Obtiene pares ordenados del CSELH considerando la conjetura planteada. **Ar5E1P2b**: Escribe una nueva ecuación de pares ordenados.	**Ar3E1P2b** muestra una *concepción acción* del grupo (*S*, +). A su vez **Ar4E1P2b** y **Ar4E1P2b** evidencia una *concepción proceso* de álgebra de pares ordenados.

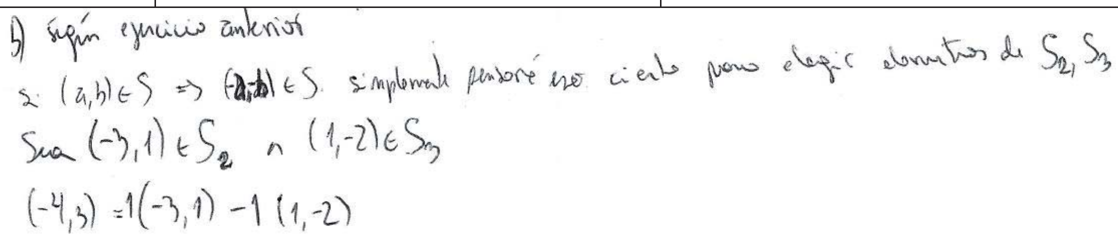
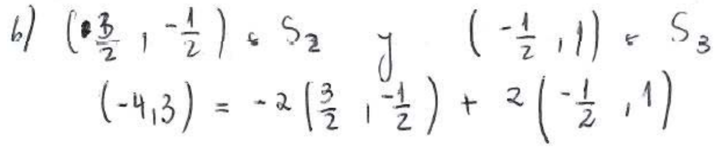
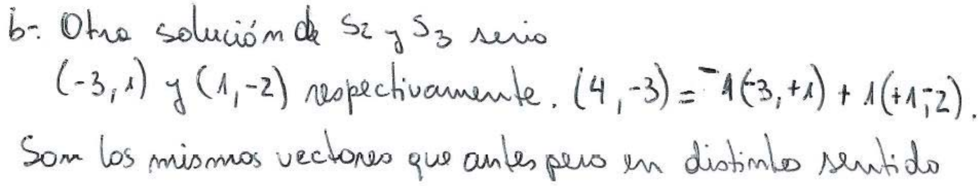
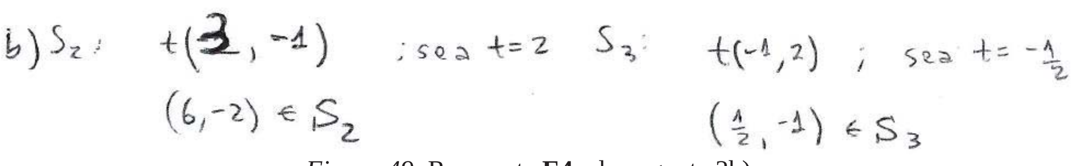


Figura 46: Respuesta **E1** a la pegunta 2b).

<table>
<tr><td>E2</td><td>Según Figura 47:
Ar4E2P2b: Pondera un vector específico del CSELH por un escalar para obtener otro.

Ar5E2P2b: Escribe una nueva ecuación de pares ordenados.</td><td>Ar4E2P2b muestra que la multiplicar un vector específico por un escalar evidencia una concepción acción de operación binaria. El Ar5E2P2b muestra una concepción acción de álgebra de pares ordenados.</td></tr>
<tr><td colspan="3">
b) $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) \in S_2$ y $(-\frac{1}{2}, 1) \in S_3$
$(-4,3) = -2(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}) + 2(-\frac{1}{2}, 1)$
Figura 47: Respuesta E2 a la pegunta 2b)</td></tr>
<tr><td>E3</td><td>Según Figura 48:
Ar4E3P2b: Aplica la propiedad de la existencia de un par ordenado inverso para obtener otro elemento del CSELH.

Ar5E3P2b: Escribe una nueva ecuación de pares ordenados.</td><td>Ar4E3P2b y Ar5E3P2b muestran una concepción proceso de álgebra de vectores y una concepción objeto de conjunto solución.</td></tr>
<tr><td colspan="3">
b- Otra solución de S_2 y S_3 sería
$(-3,1)$ y $(1,-2)$ respectivamente. $(4,-3) = -1(-3,+1) + 1(+1,-2)$.
Son los mismos vectores que antes pero en distinto sentido
Figura 48: Respuesta E3 a la pegunta 2b)</td></tr>
<tr><td>E4</td><td>Según Figura 49:
Ar2E4P2b: Multiplica un vector específico del CSELH por un escalar real para obtener otros elementos de éste.</td><td>Ar2E4P2b muestra que la acción ponderar un par ordenado específico por un escalar, evidencia una concepción acción de una operación binaria externa.</td></tr>
<tr><td colspan="3">
b) S_2: $t(3,-1)$; sea $t=2$ S_3: $t(-1,2)$; sea $t=-\frac{1}{2}$
$(6,-2) \in S_2$ $(\frac{1}{2},-1) \in S_3$
Figura 49: Respuesta E4 a la pegunta 2b).</td></tr>
<tr><td>E5</td><td>Según Figura 50:
Ar4E5P2b: Multiplica un vector específico por un escalar real para obtener elementos del CSELH.

Ar5E5P2b: Utiliza dos parámetros para escribir una nueva ecuación de pares ordenados.

Ar6E5P2b: Utiliza un sistema de ecuaciones para determinar escalares de la combinación lineal.</td><td>Ar4E5P2b muestra que ponderar un par ordenado por un escalar cualesquiera evidencia una construcción proceso de una operación binaria externa. Por otro lado, Ar5E5P2b y Ar6E5P2b evidencia que escribir combinaciones lineales de pares ordenados evidencia una concepción acción de espacio vectorial $\mathbf{R}^2$.</td></tr>
</table>

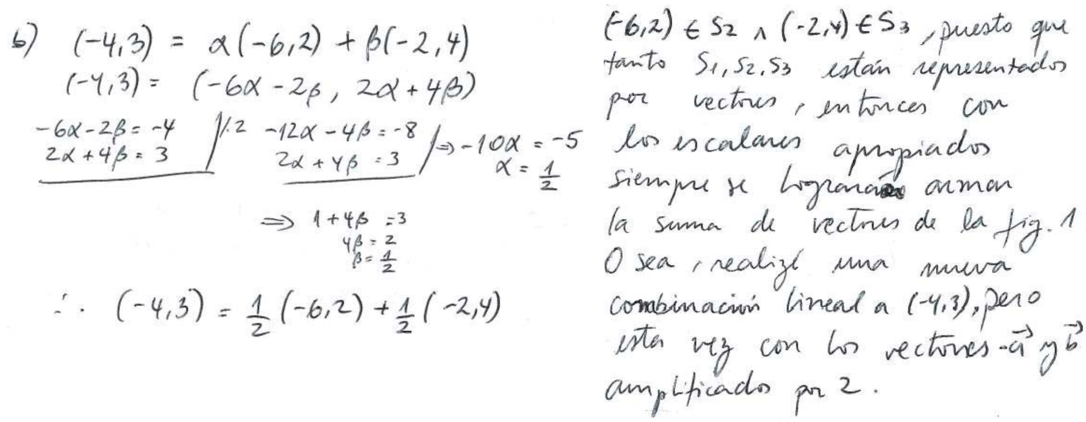


Figura 50: Respuesta **E5** a la pegunta 2b).

Comentarios a lo planteado por los Estudiantes E1, E2, E3, E4 y E5 a la pregunta 2, apartado 2b)

Los **E1**, **E2** y **E3** utilizan en sus argumentos, pares ordenados inversos aditivos, lo que evidencia una *concepción proceso* de (*S*,+) como grupo; además asocian dichas soluciones con el escalar 1, lo que da cuenta de una *concepción acción* de la ponderación de un vector por un escalar. Por otro lado **E4** se focaliza en el hecho que el CSELH es un sub-espacio vectorial de $\mathbf{R}^2$ para determinar otras soluciones desde el conjunto generador y poder escribir finalmente una ecuación de pares ordenados, lo que evidencia una *concepción proceso* de combinación lineal de vectores de $\mathbf{R}^2$.

Tabla N°32: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 2, apartado 2c) y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

Pregunta 2: apartado 2c)		
Estudiante	**Argumentos que se manifiestan los estudiantes.**	**Construcciones y mecanismos mentales que se manifiestan desde las acciones.**
E1	Según la Figura 51: **Ar6E1P2c**: Asocia aditivamente un par ordenado y su inverso aditivo con el par (0,0). **Ar7E1P2c**: Utiliza el escalar 1 como neutro multiplicativo en la ponderación de un par ordenado por un escalar.	**Ar6E1P2c** y **Ar7E1P2c** muestran que asociar aditivamente un par de pares ordenados con el par ordenado (0,0) evidencia una *concepción acción* de operación binaria y la acción escribir dos pares ordenados, uno el inverso aditivo del otro, evidencia una *concepción proceso* de (*S*, +) como grupo aditivo.

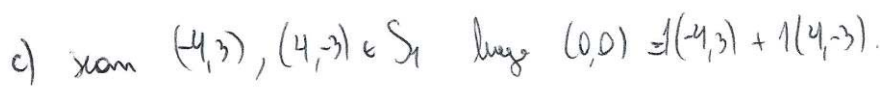


Figura 51: Respuesta **E1** a la pegunta 2c).

<table>
<tr><td>E2</td><td>Según Figura 52:
Ar6E2P2c: Asocia aditivamente un par ordenado y su inverso con el par (0,0).

Ar7E2P2c: Utiliza el escalar 1 como neutro multiplicativo para un par ordenado.</td><td>Ar6E2P2c y Ar7E2P2c muestran que la acción escribir una ecuación homogénea con pares ordenados y la acción escribir dos pares ordenados, evidencia una concepción proceso de estructura de pares ordenados.</td></tr>
<tr><td colspan="3">c) $(-4,3) \in S_1$. y $(4,-3) \in S_1$
$1(-4,3) + 1(4,-3) = (0,0)$.
Figura 52: Respuesta E2 a la pegunta 2c).</td></tr>
<tr><td>E3</td><td>Según la Figura 53:
Ar6E3P2c: Asocia aditivamente un par ordenado y su inverso con el par (0,0).

Ar7E3P2c: Utiliza el escalar 1 como neutro multiplicativo para un par ordenado.</td><td>Ar6E3P2c y Ar7E3P2c muestran que escribir una ecuación con el par (0,0) y la acción escribir dos pares ordenados, uno el inverso aditivo del otro, evidencia una concepción proceso (S, +, $\cdot_{\mathbf{R}}$) donde (S, +) es un grupo.</td></tr>
<tr><td colspan="3">c: $(0,0) = 1(-4,3) + 1(4,-3)$
Figura 53: Respuesta E3 a la pegunta 2c).</td></tr>
<tr><td>E4</td><td>Según la Figura 54:
Ar3E4P2c: Asocia aditivamente un par ordenado y su inverso con el par (0,0).

Ar4E4P2c: Utiliza el escalar 1 como neutro multiplicativo para un par ordenado.</td><td>Ar3E4P2c y Ar4E4P2c muestran que escribir una ecuación con el par (0,0) y escribir dos pares ordenados, uno el inverso aditivo del otro, evidencia una concepción proceso, (S, +, $\cdot_{\mathbf{R}}$) donde (S, +) es un grupo.</td></tr>
<tr><td colspan="3">c) $S_1 : t\cdot(-4,3)$; sea $t=1$ $(4,-3) \in S_1$
$0 = 1(4,-3) + 1(-4,3)$
Figura 54: Respuesta E4 a la pegunta 2c).</td></tr>
<tr><td>E5</td><td>Según la Figura 55:
Ar7E5P2c: Escribe una combinación lineal de dos pares ordenados, utilizando dos parámetros, en términos del par ordenado (0,0).
Ar8E5P2c: Utiliza un sistema de ecuaciones para determinar los escalares asociados a la combinación lineal.</td><td>Ar7E5P2c y Ar8E5P2c muestran que escribir una ecuación con el par (0,0), se interioriza en proceso, (S, +, $\cdot_{\mathbf{R}}$).</td></tr>
<tr><td colspan="3">c) $(0,0) = \alpha(-8,6) + \beta(-4,3)$
con $\alpha = 1$ y $\beta = -2$
Figura 55: Respuesta E5 a la pegunta 2c).</td></tr>
</table>

Comentarios a lo planteado por los E1, E2, E3, E4 y E5 a la Pregunta 2, apartado 2c)

Se observa, en general, que **E1**, **E2**, **E3**, **E4** utilizan un par ordenado y su inverso aditivo para escribir una ecuación en términos del par (0,0). En particular **E5**, obtiene dos pares ordenados del conjunto solución ponderando una solución por un escalar y determinando los escalares a través de un sistema de ecuaciones, lo que evidencia una *concepción proceso* de cartesiano $\mathbf{R}^2$.

En relación a la pregunta 2, apartado 2d, se esperaba que los estudiantes del caso 1 obtuvieran un par ordenado de S_1 y otro de S_2 y luego escribieran una combinación lineal en términos del par ordenado (0,0). Esto no ocurrió, al parecer se entendió que se debía replicar el aparatado 2c tanto para S_1 como para S_2, lo cual se grafica en la Figura 56, con la respuesta **E1**, el cual establece que una pareja de soluciones inversas aditivas son linealmente dependientes, evidencia de una *concepción acción* de vectores linealmente dependientes.

d) · sean $(-3,1), (3,-1) \in S_2$ luego $(0,0) = 1(-3,1) + 1(3,-1)$

· sean $(-1,2), (1,-2) \in S_3$ luego $(0,0) = 1(-1,2) + 1(1,-2)$.

Que dados dos elementos del conjunto solución de una ELH de dos incognitas ~~estos~~ estos son LD. linealmente dependiente, pues son proporcionales.

Figura 56: Respuesta de **E1** al apartado 2d).

Por otro lado **E4**, Figura 57, hace otra lectura del apartado 2d, evidenciando una *concepción proceso* de cartesiano $\mathbf{R}^2$ cuando combina elementos del CSELH en términos de combinaciones lineales.

d) S_2, $t=3 \Rightarrow (9,-3) \in S_2$

S_3, $t=3 \Rightarrow (-3,6) \in S_3$

$S_2 \rightarrow \quad (3,-1) = -1(6,-2) + (9,-3)$

$S_3 \rightarrow \quad (-1,2) = 4(\frac{1}{2},-1) + 1\cdot(-3,6)$

Se conjetura que todo par ordenado dentro del conjunto solución se puede escribir como combinación lineal de otros dos. → Entonces, el producto por escalar y la suma de dos elementos nos da un tercer elemento que siempre está dentro del conjunto,

Figura 57: Respuesta **E3** al apartado 2d.

Finalmente se rescata parte de la respuesta **E2**, pues relaciona el segmento dirigido, que forma con el origen del sistema de coordenadas y el punto P_1, con el CSELH desde la gráfica de una función lineal como modelo, Figura 58.

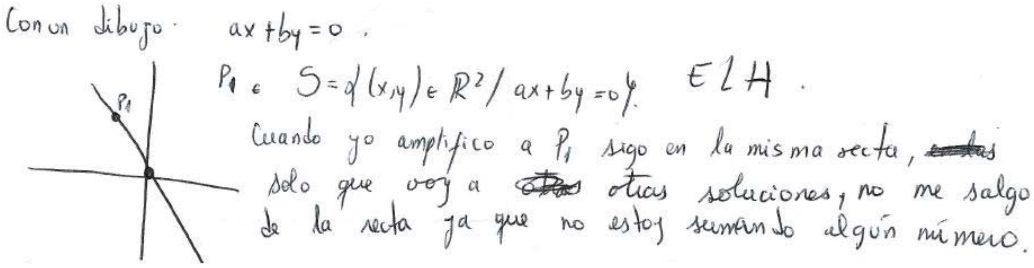


Figura 58: Respuesta **E2** al apartado 2d).

Es importante destacar que si bien **E2** en la pregunta 1d) no logra definir operaciones para el CSELH, evidenciando una *concepción acción* de CSELH, con el argumento de la pregunta 2e), da cuenta que escribir una ELH con elementos del CSELH procura *coordinar* las *construcciones proceso* segmento dirigido y ponderación por escalar en la *construcción proceso* dilatación de un segmento dirigido.

Tabla N°33: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 2, apartado 2e), y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

Pregunta 2: apartado 2e)		
Estudiante	**Argumentos que manifiestan los estudiantes,**	**Construcciones y mecanismos mentales que se manifiestan desde las acciones.**
E1	Según Figura 59: **Ar8E1P2e**: Escribe la ELH utilizando propiedades de **R** como grupo. **Ar9E1P2e**: Establece una relación entre las ecuaciones que escribe. **Ar10E1P2e**: Compara la estructura aditiva de las ecuaciones con la estructura asociada al CSELH.	El **Ar8E1P2e** y **Ar9E1P2e** muestra que escribir una ELH a partir de un elemento del CSELH evidencia una *concepción proceso* de CSELH. Por otro lado **Ar8E1P2e** evidencia una *concepción objeto* de una operación binaria cuando relaciona la estructura del CSELH desde la relación que establece con las ecuaciones asociadas a éstos.
e) $\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}y=0 \leftarrow ELH(S_1) \rightarrow 3x+4y=0$ 1 $\frac{1}{3}x+y=0 \leftarrow ELH(S_2) \rightarrow x+3y=0$ 2 $x+\frac{1}{2}y=0 \leftarrow ELH(S_3) \rightarrow 2x+y=0$ 3		

<table>
<tr><td colspan="3">que puedo sumar ② y ③ para obtener ①.
en realidad hacer "combinaciones lineales" entre ellas para obtener la otra
al igual que con las soluciones

Figura 59: Respuesta E1 al apartado 2e).</td></tr>
<tr><td>E2</td><td>Según Figura 60:
Ar8E2P2e: Define una ELH en términos de parámetros.

Ar9E2P2e: Aplica la definición del CSELH y determina los coeficientes de la ELH.</td><td>Ar8E2P2e y Ar9E2P2e muestran que escribir una ecuación lineal homogénea a partir de una solución de la ELH evidencia una concepción proceso de R como grupo y una concepción objeto de SELH.</td></tr>
<tr><td colspan="3">e) Tengo que encontrar las ELH
$ax + by = 0$ se que $(-4,3) \in S_1$, reemplazo en la ec.
$-4a + 3b = 0 \Rightarrow -4a = -3b$
$\boxed{a = \frac{3b}{4}}$, vuelvo a reemplazar
$\frac{3b}{4}x + by = 0$ // con $b = 1$
$\boxed{\frac{3}{4}x + y = 0}$ ELH de S_1.
De la misma manera calculo las otras ecuaciones:
ELH de S_2 =: $\frac{1}{3}x + y = 0$
ELH de S_3 =: $\frac{2x}{[illegible]} + y = 0$
Hay yo hice mis ecuaciones con $b=1$, pero $b \in \mathbb{R}/\{0\}$. Vamos a obtener muchas ecuaciones equivalentes.

Figura 60: Respuesta E2 al apartado 2e).</td></tr>
<tr><td>E3</td><td>Según Figura 61:
Ar8E3P2e: Escribe una ELH considerando los inversos multiplicativos de las componentes de un par ordenado específico del CSELH.</td><td>Ar8E3P2e muestra que escribir una ecuación lineal homogénea desde una solución de la ELH evidencia una concepción proceso de R como grupo y una concepción objeto de SELH.</td></tr>
<tr><td colspan="3">e: S_1: $\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y = 0$ S_2: $1/3\,x + y = 0$ S_3: $x + \frac{1}{2}y = 0$
Figura 61: Respuesta E3 al apartado 2e).</td></tr>
<tr><td>E4</td><td>Según Figura 62:
Ar5E4P2e: Escribe un CSELH en términos de un parámetro y vector específico.

Ar6E4P2e: Escribe la ELH a partir de las ecuaciones paramétricas asociadas a ésta.</td><td>Ar5E4P2e y Ar5E4P2e muestra que escribir el CSELH en términos de la ponderación de una solución y un parámetro evidencia que una concepción objeto de CSELH y a la vez da cuenta de una concepción proceso del cartesiano $\mathbf{R}^2$.</td></tr>
</table>

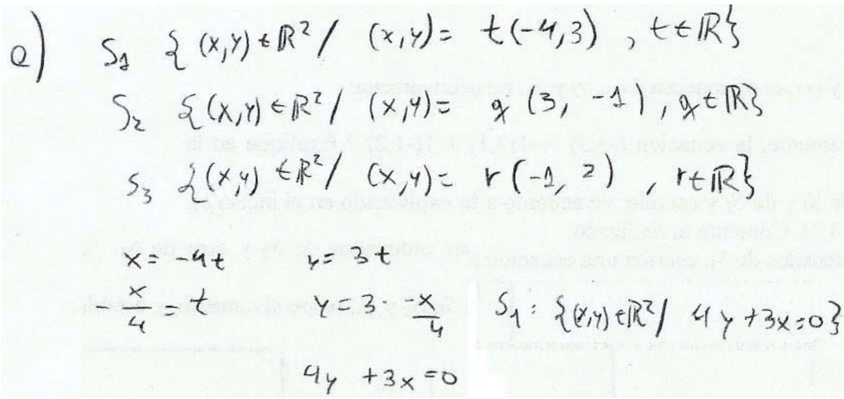


Figura 62: Respuesta **E4** al apartado 2e).

E5	Según Figura 63: **Ar9E5P2e**: Escribe la pendiente de una recta considerando el par ordenado (0,0) y l solución dada.	**Ar9E5P2e** muestra que determinar la pendiente de una recta desde la SELH da cuenta de *una concepción objeto* de SELH y una *concepción acción* de vector geométrico.

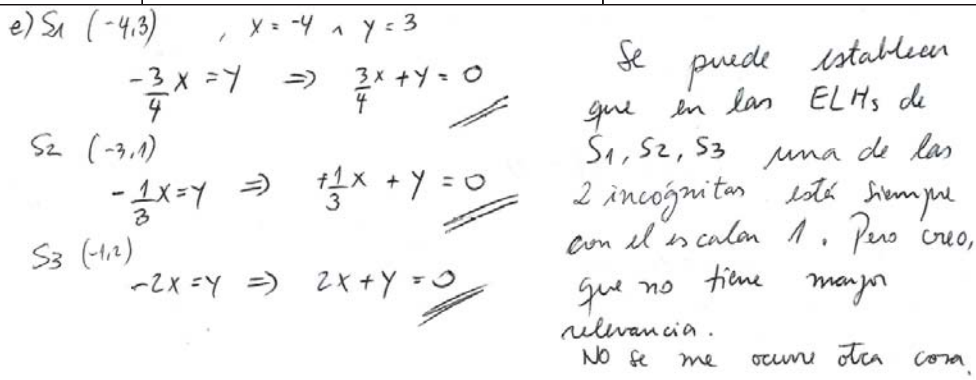


Figura 63: Respuesta **E5** al apartado 2e).

Comentarios a lo planteado por E1, E2, E3, E4 y E5 a la Pregunta 2, apartado 2e)

Destaca la respuesta de **E1** que vincula la estructura el álgebra de soluciones con la relación aditiva entre las ELH's que se determina a partir de una solución asociada a cada una de ellas, lo que evidencia una *concepción proceso* de cartesiano $\mathbf{R}^2$. Además **E4**, al definir el CSELH desde la ponderación de una solución y un parámetro da cuenta de una *concepción proceso* de cartesiano $\mathbf{R}^2$ y una concepción de objeto de CSELH.

En las Tablas N°34, N°35 y N°36 se presenta un análisis a las respuestas **E1** a **E5** a la pregunta 3 del cuestionario 1.

Tabla N°34: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 3, apartado 3a), y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

Pregunta 3: apartado 3a)		
Estudiante	**Argumentos que manifiestan los estudiantes.**	**Construcciones y mecanismos mentales que se asocian a las acciones indicadas.**
E1	Según la Figura 64: **Ar1E1P3a**: Reescribe el CSELH utilizando un parámetro para los términos de la ELH; escribiendo ecuaciones paramétricas asociadas a la ELH y estableciendo restricciones a los parámetros de los coeficientes de la ELH. **Ar2E1P3a**: Enuncia otra posibilidad para el CSELH en función de la restricción establecida.	**Ar1E1P3a** y **Ar2E1P3a** y muestra que analizar las restricciones a los coeficientes de la ELH evidencian una *concepción proceso* de CSELH.

a) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; ax+by=0 \quad \forall a,b \in \mathbb{R}\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x = \frac{t}{a} \wedge b = \frac{-t}{b}$, con $t \in \mathbb{R} \wedge a,b \neq 0\}$

si: $a,b=0 \Rightarrow S = \mathbb{R}^2$.

Figura 64: Respuesta **E1** a la pegunta 3a).

E2	Según la Figura 65: **Ar1E2P3a**: define subconjuntos del CSELH	**Ar1E2P3a** evidencia una concepción proceso del CSELH.

a) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; ax+by=0\}$. Esta claro que cualquier punto de $\mathbb{R}^2$ que cumpla la ecuación lineal homogénea, va a pertenecer al conjunto de soluciones. Son infinitos pares los que cumplen, pero todos los puntos de ~~esta~~ las siguientes formas van a cumplir:

$S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x = \frac{n}{a} \wedge y = \frac{-n}{b}, n \in \mathbb{N}\}$.

$S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x = \frac{-n}{a} \wedge y = \frac{n}{b}, n \in \mathbb{N}\}$, $\boxed{a,b \neq 0}$

Donde $S_1 \in S \wedge S_2 \in S$

Figura 65: Respuesta **E2** a la pegunta 2a).

E3	Según Figura 66: **Ar1E3P3a**: Reescribe el conjunto solución utilizando un parámetro y escribiendo ecuaciones paramétricas.	**Ar1E3P3a**, evidencia asociar un par de número reales a los términos de una ELH se *interioriza* en el *proceso* separar ecuaciones; donde asociar un parámetro a los términos de la ELH, actúa como *mecanismo* de *interiorización*.

<table>
<tr><td colspan="3">

a: $S:\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / ax=d \ , \ by=-d \ , \ a,b,d\in\mathbb{R}\}$

Figura 66: Respuesta **E3** a la pegunta 3a)

</td></tr>
<tr><td>**E4**</td><td>

Según Figura 67:
Ar1E4P3a: Reescribe la ELH.

Ar2E4P3a: Reescribe el CSELH utilizando **AR1E4P3a**.

AR3E4P3a: Escribe el conjunto generador del CSELH.

</td><td>

Ar1E4P3a y **Ar2E4P3a** muestra que reescribir la ELH estableciendo una dependencia entre incógnitas, evidencia que la *construcción proceso* CSELH se *revierte* en la *construcción proceso* gráfico de una función lineal. **AR3E4P3a** evidencia una *concepción proceso* de espacio vectorial, al considerar el conjunto generador y una base para el CSELH.

</td></tr>
<tr><td colspan="3">

a) $ax+by=0$

$y=-\frac{ax}{b}$

luego, el conjunto solución son los pares:

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \ y=-\frac{ax}{b}\}$

o también:

$\{(x, -\frac{a}{b}\cdot x) / x\in\mathbb{R}\} = \langle(1,-\frac{a}{b})\rangle = \langle(b,-a)\rangle$

Figura 67: Respuesta **E4** a la pegunta 3a)

</td></tr>
<tr><td>**E5**</td><td>

Según Figura 68:
Ar1E5P3a: Reescribe la ELH.

Ar2E5P3a: Reescribe el CSELH utilizando **AR1E5P3a**.

</td><td>

Ar1E5P2a y **Ar2E5P2a** muestran que reescribir la ELH estableciendo una incógnita en función de la otra, evidencia que la *construcción proceso* CSELH se *revierte* en la *construcción proceso* gráfico de una función lineal, cuando establece la relación de variables vinculadas a la ELH.

</td></tr>
<tr><td colspan="3">

a) Sea $a,b\neq 0$

$ax+by=0 \Leftrightarrow ax=-by \Leftrightarrow x=-\frac{by}{a}$

$S=\{(\frac{-by}{a}, y)\in\mathbb{R}^2 / ax+by=0\}$

Como tiene dos variables siempre una va a depender de la otra, en este caso x depende de y.

Figura 68: Respuesta **E5** a la pegunta 3a).

</td></tr>
</table>

Comentarios a lo planteado por E1, E2, E3, E4 y E5 en la Pregunta 3, apartado 3a)

E1, **E2** y **E3** reescriben el conjunto solución de una ELH utilizando un parámetro desde la *acción* asociar una pareja de inversos aditivos a los términos de una ELH. Los argumentos que se manifiestan evidencia que dicha *acción* se *interioriza* en el *proceso* separar una ecuación, donde el uso de un parámetro es un mecanismo de *interiorización*. **E1** logra establecer una restricción a los parámetros que definen los coeficientes de la ELH y caracterizar la solución asociada a dicha restricción. Por otro lado **E4** y **E5** reescriben el conjunto solución expresando una de las incógnitas en función de la otra, donde **E4** transita al conjunto generador pero no explicita las posibilidades que tendría el CSELH, lo que deja de manifiesto una *concepción proceso* de plano cartesiano.

Tabla N°35: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 3, apartado 3b), y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

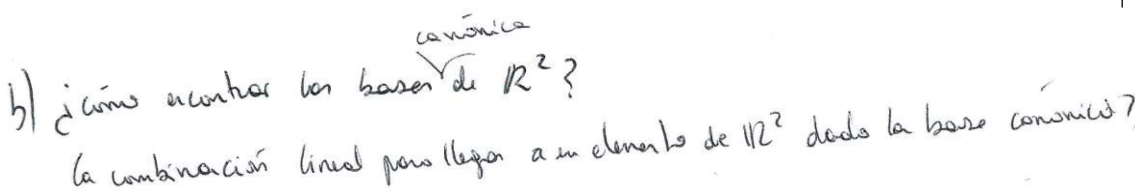
<table>
<tr><th colspan="3">Pregunta 3: apartado 3b)</th></tr>
<tr><th>Estudiante</th><th>Argumentos que manifiestan los estudiantes.</th><th>Construcciones y mecanismos mentales que se manifiestan desde las acciones.</th></tr>
<tr><td>E1</td><td>Según Figura 69:
Ar3E1P3b: Reconoce que todo vector de $\mathbf{R}^2$ se puede escribir según la base canónica.</td><td>Ar3E1P3b muestra una concepción acción de espacio vectorial $\mathbf{R}^2$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">

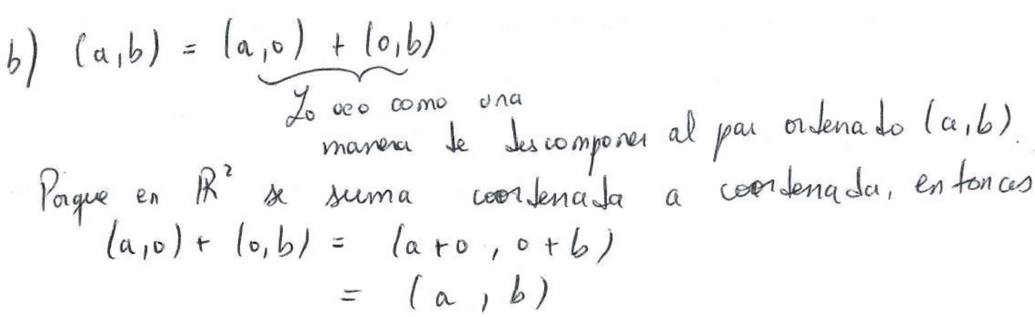
Figura N°69: Respuesta E1 a la pegunta 3b)</td></tr>
<tr><td>E2</td><td>Según Figura 70:
Ar2E2P3b: Verifica con las operaciones usuales de $\mathbf{R}^2$ las igualdades planteadas.</td><td>El Ar3E2P3b muestra una concepción acción espacio vectorial.</td></tr>
<tr><td colspan="3">

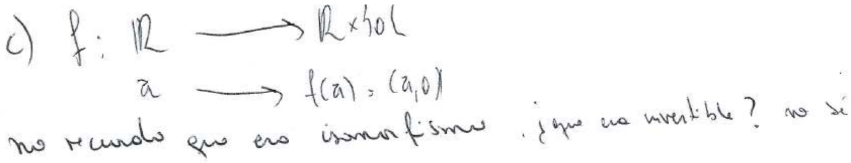
Figura 70: Respuesta E2 a la pegunta 3b)</td></tr>
</table>

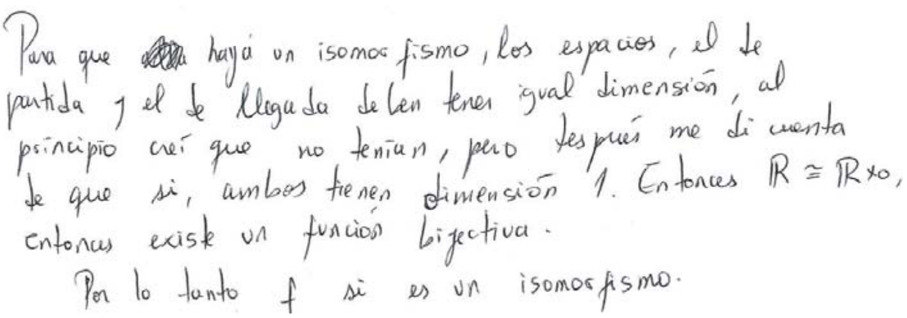
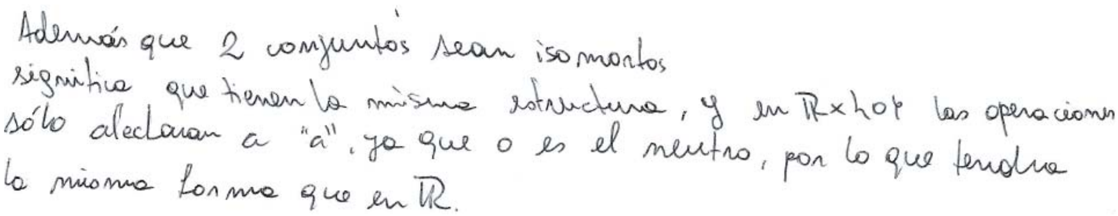
<table>
<tr><td>E3</td><td>Según Figura 71:
Ar2E3P3b: Reconoce que todo vector de R^2 se puede escribir según la base canónica.</td><td>Ar3E3P3b muestra una concepción proceso de R^2 espacio vectorial.</td></tr>
<tr><td colspan="3">b: que el vector (a,b) es una combinación lineal de la base canónica
Figura 71: Respuesta E3 a la pegunta 3b)</td></tr>
<tr><td>E4</td><td>Según Figura 72:
Ar4E4P3b: Reconoce que todo vector de R^2 se puede escribir según la base canónica.</td><td>Ar4E3P3b muestra una concepción objeto de plano cartesiano.</td></tr>
<tr><td colspan="3">b) esta ecuación describe al conjunto (a,b) como
combinacion lineal de (1,0) y (0,1).
Como a y b son parámetros independientes,
el conjunto a(1,0) + b(0,1) es igual a
$\langle (1,0),(0,1) \rangle$, es decir, el conjunto describe
a todo el plano $\mathbb{R}^2$
Figura 72: Respuesta E4 a la pegunta 3b)</td></tr>
<tr><td>E5</td><td>Según Figura 73:
Ar3E5P3b: Reconoce que todo vector de R^2 se puede escribir según la base canónica.</td><td>Ar3E5P3b muestra una concepción acción de R^2 espacio vectorial.</td></tr>
<tr><td colspan="3">b) 1) Describe una ecuación con pasos
2) Describe las propiedades de los vectores
3) Describe que geométricamente el vector (a,b) se puede obtener de la suma de (a,0) + (0,b).
4) Describe que el vector (a,b) siempre se puede escribir en combinación lineal con la base canónica de $\mathbb{R}^2$.
Figura 73: Respuesta E5 a la pegunta 3b)</td></tr>
</table>

Comentarios a lo planteado por E1, E2, E3, E4 y E5 a la pregunta 3, apartado 3b)

En general, considerando los argumentos que despliegan los estudiantes **E1**, **E2**, **E3**, **E4** y **E5** se evidencia una *concepción proceso* combinación lineal al reconocer que un par cualesquiera de **R**^{2} se puede escribir como combinación lineal de los vectores (1,0) y (0,1).

Tabla N°36: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 3, apartado 3c), y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

<table>
<tr><th colspan="3">Pregunta 3: apartado 3c)</th></tr>
<tr><th>Estudiante</th><th>Argumentos que se manifiestan los estudiantes.</th><th>Construcciones y mecanismos mentales que se manifiestan desde las acciones.</th></tr>
<tr><td>E1</td><td>Según la Figura 74:
No recuerda que es un isomorfismo.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">
c) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\times\{0\}$
$a \longrightarrow f(a) = (a,0)$
no recuerdo que era isomorfismo. ¿que era invertible? no sé
Figura 74: Respuesta E1 a la pegunta 3c).</td></tr>
<tr><td>E2</td><td>Según Figura 75:
Ar3E2P3c: Compara la dimensión de dos espacios vectoriales R y R×{0} para decir que son isomorfos.

Ar4E2P3c: Reconoce una función biyectiva es necesaria para establecer un isomorfismo entre dos espacios vectoriales.</td><td>Ar3E2P3c muestra que la acción comparar la dimensión de un sub-espacio vectorial propio de $\mathbf{R}^2$ con R, evidencia una concepción proceso de espacio vectorial $\mathbf{R}^2$. Por otro lado el Ar4E2P3c evidencia una concepción objeto del concepto de función.</td></tr>
<tr><td colspan="3">
Para que hayá un isomorfismo, los espacios, el de partida y el de llegada deben tener igual dimensión, al principio creí que no tenían, pero después me di cuenta de que sí, ambos tienen dimensión 1. Entonces $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}\times 0$, entonces existe una función biyectiva.
Por lo tanto f sí es un isomorfismo.
Figura 75: Respuesta E2 a la pegunta 3c)</td></tr>
<tr><td>E3</td><td>Según la Figura 76:
Ar3E3P3c: Reconoce que dos conjuntos son isomorfos si existe una función biyectiva relaciona los elementos de ambos conjuntos.</td><td>Ar3E3P3c muestra una concepción objeto biyección.</td></tr>
<tr><td colspan="3">
Además que 2 conjuntos sean isomorfos significa que tienen la misma estructura, y en $\mathbb{R}\times\{0\}$ las operaciones sólo afectarían a "a", ya que 0 es el neutro, por lo que tendría la misma forma que en $\mathbb{R}$.
Figura 76: Respuesta E3 a la pegunta 3c)</td></tr>
</table>

E4	Según la Figura 78: **Ar4E4P3c** Establece que la función no es un isomorfismo al reconocer una función constante en la función que se le presenta.	**Ar4E4P3c** evidencia una *concepción proceso* de función.

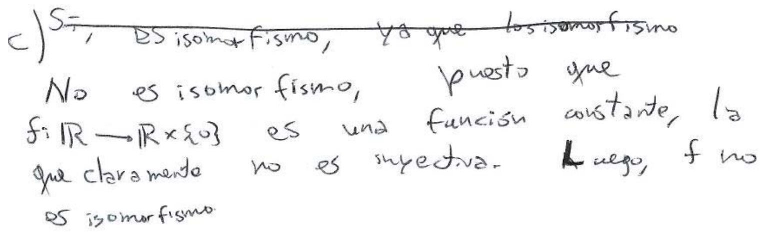


Figura 78: Respuesta del **E4** a la pegunta 3c)

E5	Según la Figura 79: No recuerda la definición de isomorfismo.	

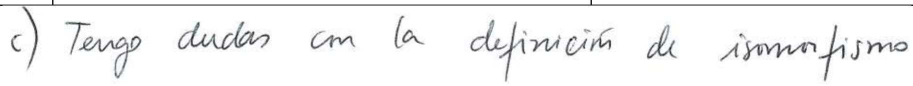


Figura 79: Respuesta **E5** a la pegunta 3c)

Comentarios a lo planteado por E1, E2, E3, E4 y E5 a la Pregunta 3, apartado 3c)

Se observa en las respuestas de la Tabla 36, que solo **E2** y **E3** reconocen que **R** y **R**×{0} son isomorfos. **E2** se basa en el hecho de que ambos espacios tienen la misma dimensión, lo que evidencia una *concepción objeto* de espacio vectorial. **E3** hace notar que para que ambos conjuntos sean isomorfos debe haber una biyección entre sus elementos y ambos conjuntos deben tener la misma estructura, lo que corrobora al comparar la forma de los elementos de ambos conjuntos, lo que pone de manifiesto una *concepción objeto* de función.

En la Tabla N°37, N°38, N°39 y N°40 se presenta un análisis a las respuestas **E1** a **E5** a la pregunta 4, del cuestionario 1.

Tabla N°37: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 4, apartado 4a), y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

Pregunta 4: apartado 4a)		
Estudiante	**Argumentos que manifiestan los estudiantes.**	**Construcciones y mecanismos mentales que se asocian a las acciones indicadas.**
E1	Según la Figura 80: **Ar1E1P4a**: Lista pares ordenados utilizando la gráfica de la función lineal y la multiplicación por escalar.	E**Ar1E1P4a** evidencia una *concepción objeto* de CSELH.

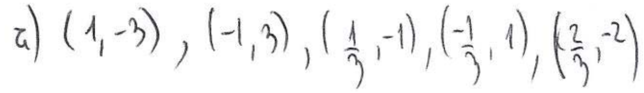
<table>
<tr><td colspan="3">

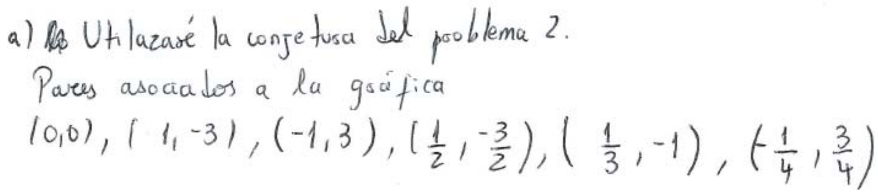
Figura 80: Respuesta E1 a la pegunta 4a)</td></tr>
<tr><td>E2</td><td>Según la Figura 80:
Ar1E2P4a: Lista pares ordenados utilizando la gráfica de la función lineal y la multiplicación por escalar.</td><td>Ar1E2P4a evidencia una concepción objeto de CSELH.</td></tr>
<tr><td colspan="3">

Figura 80: Respuesta E2 a la pegunta 4a)</td></tr>
<tr><td>E3</td><td>Según Figura 81:
Ar1E3P4a: Lista pares ordenados utilizando la gráfica de la función lineal y la ponderación por escalar.

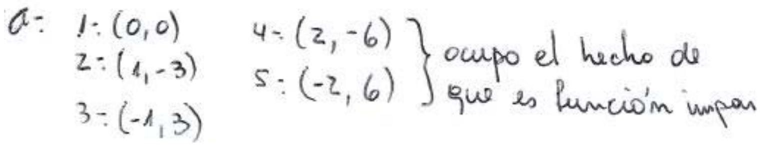
Ar2E3P4a: Reconoce desde los pares simétricos una función impar.</td><td>Ar1E3P4a, evidencia una concepción objeto del CSELH. Ar2E3P4a evidencia una concepción objeto de función.</td></tr>
<tr><td colspan="3">

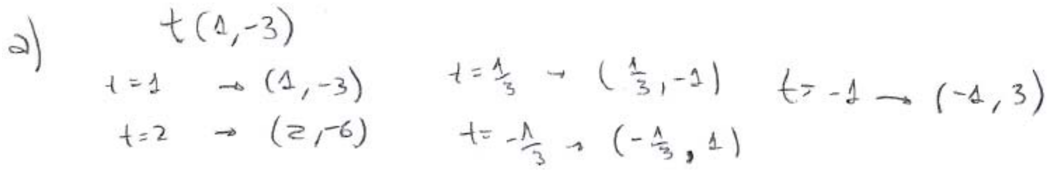
Figura 81: Respuesta E3 a la pegunta 4a)</td></tr>
<tr><td>E4</td><td>Según Figura 82:
Ar1E4P4a: Lista pares ordenados utilizando la gráfica de la función lineal y la multiplicación por escalar.</td><td>Ar1E4P4a evidencia una concepción objeto de CSELH.</td></tr>
<tr><td colspan="3">

Figura 82: Respuesta E4 a la pegunta 4a)</td></tr>
<tr><td>E5</td><td>Según Figura 83:
Ar1E5P4a: Lista pares ordenados utilizando la gráfica de la función lineal y la multiplicación por escalar.</td><td>Ar1E5P4a evidencia una concepción objeto de CSELH.</td></tr>
</table>

$a)\ \{(-3,1), (6,-2), (3,-1), (-6,2), (5,\frac{-5}{3})\}$

Figura 83: Respuesta **E5** a la pegunta 4a)

Comentarios a lo planteado por E1, E2, E3, E4 y E5 en la Pregunta 4, apartado 4a)

E1, **E2**, **E3**, **E4** y **E5**, dados los argumentos que manifiestan, dejan en evidencia una *concepción objeto* del CSELH al relacionar el gráfico de la función lineal con el CSELH.

Tabla 38: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 4, apartado 4b), y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

<table>
<tr><th colspan="3">Pregunta 4: apartado 4b)</th></tr>
<tr><th>Estudiante</th><th>Argumentos que manifiestan los estudiantes.</th><th>Construcciones y mecanismos mentales que se manifiestan desde las acciones.</th></tr>
<tr><td>E1</td><td>Según Figura 84:
Ar2E1P4b: Asocia la gráfica con la función dada, en términos de un vector, que se dilata o contrae, generando la línea recta.</td><td>Ar2E1P4b muestra una concepción proceso de plano cartesiano.</td></tr>
<tr><td colspan="3">b) la gráfica corresponde a la de f, pues (1,-3) pertenece a la gráfica y t es un escalar que amplifica o reduce este vector, generando la recta.

Figura 84: Respuesta E1 a la pegunta 4b)</td></tr>
<tr><td>E2</td><td>Según Figura 85:
Ar2E2P4b: Relaciona a f con el conjunto solución de la ELH.</td><td>Ar2E2P4b muestra una concepción proceso del plano cartesiano.</td></tr>
<tr><td colspan="3">b) $f: \mathbb{R} \times \{(1,-3)\} \to \mathbb{R}^2$
$t\cdot(1,-3) = (t,-3t)$ → Me da el conjunto todas las soluciones de la ELH, con $t \in \mathbb{R}$. Idea de la conjetura del problema 2.

Figura 85: Respuesta E2 a la pegunta 4b)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>E3</td><td>Según Figura 86:
Ar3E3P4b: Reconoce que la función dada es la parametrización de la gráfica dada.

Ar4E3P4b: Reconoce en la expresión analítica de f la ecuación vectorial de la recta que contiene al origen del sistema de coordenadas.</td><td>Ar3E3P4b muestra una concepción proceso de plano cartesiano. Por otro lado, Ar4E3P4b evidencia que comparar rectas vectoriales, procura coordinar dos construcciones proceso; plano cartesiano y plano vectorial, en un nueva construcción proceso, el Cartesiano $\mathbf{R}^2$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">b- La relación $f: \mathbb{R}\setminus\{(1,-3)\} \to \mathbb{R}^2$, $t\cdot(1,-3) \mapsto (t,-3t)$ es una parametrización de la recta asociada ~~al~~ ~~para~~ la figura 2.
además describe la ecuación vectorial de la recta que tiene como vector soporte el (1,-3) y el vector director (0,0)

Figura 86: Respuesta E3 a la pegunta 4b)</td></tr>
<tr><td>E4</td><td>Según Figura 87:
Ar2E4P4b: Relaciona la gráfica con la función f.

Ar3E4P4b: Compara la imagen de la función f con los elementos del CSELH.</td><td>Ar2E4P4b y Ar3E4P4b muestra una concepción objeto de plano vectorial.</td></tr>
<tr><td colspan="3">b) f corresponde a la
función graficada en la figura 2.
$\{t(-1,3)=(x,y) \,/\, t\in\mathbb{R}\} = \{(x,y)\in\mathbb{R} \,/\, 3x+y=0\}$

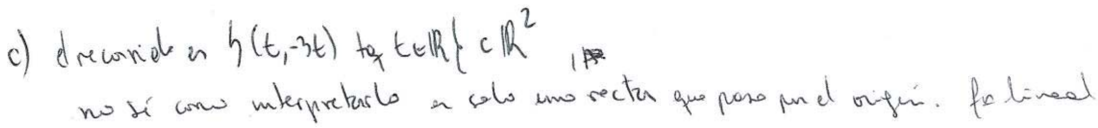
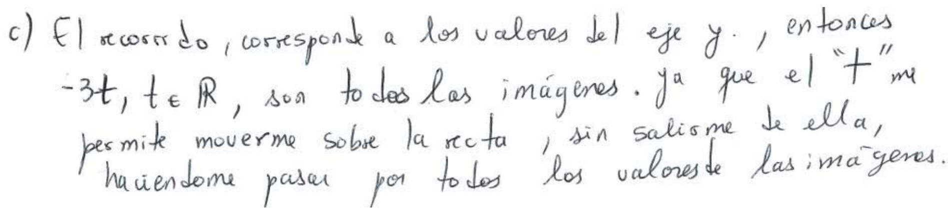
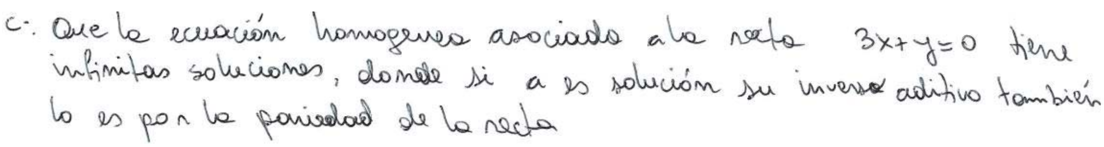
Figura 87: Respuesta E4 a la pegunta 4b)</td></tr>
<tr><td>E5</td><td>Según Figura 88:
Ar2E5P4b: Reconoce en la expresión analítica de f la ecuación vectorial de la recta que contiene al origen del sistema de coordenadas.</td><td>Ar2E5P4b muestra una concepción proceso de plano cartesiano.</td></tr>
<tr><td colspan="3">b) La función presentada permite
encontrar todos los vectores de
la recta de la fig 2, mostrando
en este caso que y depende
de x, ya que la ecuación
de la recta es $-\frac{1}{3}x=y$.

Figura 88: Respuesta E5 a la pegunta 4b)</td></tr>
</table>

Comentarios a lo planteado por E1a E5 a la pregunta 4, apartado 4b)

En general, considerando los argumentos que despliegan **E1**, **E2**, **E3**, **E4** y **E5** se evidencia una *concepción proceso* del plano cartesiano. Por otro lado el hecho que relacionen la ponderación por un par ordenado con la dilatación o contracción de un vector, como lo manifiestan **E1** y **E3**, muestra una *concepción objeto* del plano cartesiano.

Tabla N°39: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 4, apartado 4c), y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

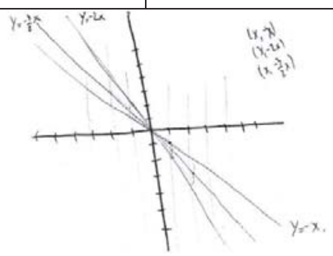
<table>
<tr><th colspan="3">Pregunta 4: apartado 4c)</th></tr>
<tr><th>Estudiante</th><th>Argumentos que se manifiestan los estudiantes.</th><th>Construcciones y mecanismos mentales que se manifiestan desde las acciones.</th></tr>
<tr><td>E1</td><td>Según la Figura 89:
Ar3E1P4c: Escribe el recorrido de f en notación conjuntista y lo relaciona con el gráfico de la función lineal.</td><td>Ar3E1P4c evidencia una concepción objeto función lineal.</td></tr>
<tr><td colspan="3">
c) el recorrido es {(t,-3t) tq t∈ℝ} ⊂ ℝ²
no sé como interpretarlo es solo una recta que pasa por el origen. f: lineal
Figura 89: Respuesta E1 a la pegunta 4c)</td></tr>
<tr><td>E2</td><td>Según Figura 90:
Ar3E2P4c: Reconoce en el recorrido de la función a la función lineal.</td><td>Ar3E2P4c evidencia una concepción objeto función lineal.</td></tr>
<tr><td colspan="3">
c) El recorrido, corresponde a los valores del eje y, entonces
-3t, t ∈ ℝ, son todas las imágenes. ya que el "t" me
permite moverme sobre la recta, sin salirme de ella,
haciendome pasar por todos los valores de las imágenes.
Figura 90: Respuesta E2 a la pegunta 4c)</td></tr>
<tr><td>E3</td><td>Según la Figura 91:
Ar5E3P4c: Alude a una propiedad simétrica de la gráfica y la relaciona con la cardinalidad del CSELH.</td><td>Ar5E3P4c muestra una concepción proceso del concepto función lineal.</td></tr>
<tr><td colspan="3">
c: Que la ecuación homogenea asociada a la recta 3x+y=0 tiene
infinitas soluciones, donde si a es solución su inverso aditivo también
lo es por la paridad de la recta
Figura 91: Respuesta E3 a la pegunta 4c)</td></tr>
</table>

E4	Según la Figura 92: **Ar5E4P4c**: Diferencia la función *f* de la función asociada a la gráfica. .	**Ar5E4P4c** evidencia una concepción *objeto* de plano cartesiano y una concepción objeto de función.
c) El recorrido de f son todos los pares ordenados descritos. Notar que f no es una función definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, más bien, asocia al escalar $t \in \mathbb{R}$ un punto en el plano (gráfico de la función) *Figura 92*: Respuesta **E4** a la pegunta 4c)		
E5	Según la Figura 93: **Ar3E5P4c**: Compara el recorrido de la función *f* con el gráfico de la función lineal.	El **Ar3E5P4c** evidencia una *concepción objeto* del concepto de función y una concepción *objeto* de plano cartesiano.
c) $rec f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, -\frac{1}{3}x = y\}$ *Figura 93*: Respuesta **E5** a la pegunta 4c)		

Comentarios a lo planteado por E1 a E5 a la Pregunta 4, apartado 4c)

Se observa, en las respuestas de la Tabla N°39, que **E1**, **E4** y **E5** evidencian una *concepción proceso* de función; además **E1** y **E5** explicitan la relación entre el recorrido de *f* y la función lineal dando cuenta de una *concepción objeto* de plano cartesiano.

Tabla N°40: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 4, apartado 4d), y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

Pregunta 4: apartado 4d)		
Estudiante	**Argumentos que se manifiestan los estudiantes.**	**Construcciones y mecanismos mentales que se manifiestan desde las acciones.**
E1	Según la Figura 94: **Ar4E1P4d**: Dibuja las gráficas asociadas a cada una de las ELH.	**Ar4E1P4d** evidencia una *concepción proceso* de plano cartesiano.
d) $3x+2y=0 \Rightarrow y=-\frac{3}{2}x$ $x+y=0 \Rightarrow x=-y$. $2x+y=0 \Rightarrow y=-2x$.  *Figura 94*: Respuesta **E1** a la pegunta 4d)		

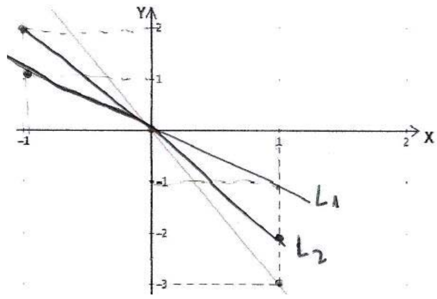
<table>
<tr><td>E2</td><td>Según Figura 95:
Ar4E2P4d: Dibuja las gráficas asociadas a cada una de las ELH.</td><td>Ar4E2P4d evidencia una concepción proceso de plano cartesiano.</td></tr>
<tr><td colspan="3">

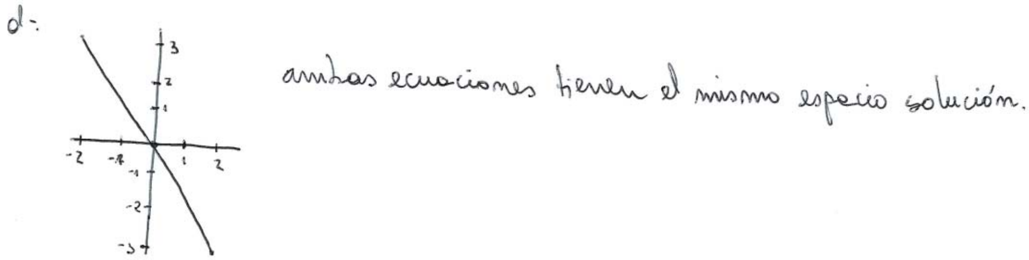
Figura 95: Respuesta E2 a la pegunta 4d)</td></tr>
<tr><td>E3</td><td>Según la Figura 96:
Ar6E3P4d: Manifiesta que las ecuaciones tienen el mismo espacio solución. No queda claro lo que se quiere plantear.</td><td>Ar6E3P4d evidencia una concepción proceso de una función lineal.</td></tr>
<tr><td colspan="3">

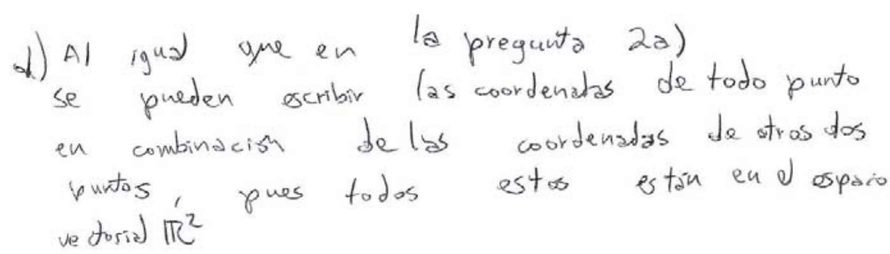
Figura 96: Respuesta E3 a la pegunta 4d)</td></tr>
<tr><td>E4</td><td>Según la Figura 97:
Ar5E4P4d: Compara el álgebra de las ELH con el álgebra de los pares ordenados.</td><td>Ar5E4P4d muestra que comparar la estructura asociada a los pares ordenados del CSELH con el álgebra asociada a las ELH, evidencia una coordinaciones proceso, plano cartesiano y cartesiano $\mathbf{R}^2$, en un nuevo proceso, el $\mathbf{R}^2$ espacio vectorial.</td></tr>
<tr><td colspan="3">

Figura 97: Respuesta E4 a la pegunta 4d)</td></tr>
<tr><td>E5</td><td>Según la Figura 98:
Ar4E5P4d: Compara el álgebra de las ELH con el álgebra de los pares ordenados.</td><td>Ar4E5P4d evidencia una concepción proceso del concepto de función y una concepción proceso de cartesiano $\mathbf{R}^2$.</td></tr>
</table>

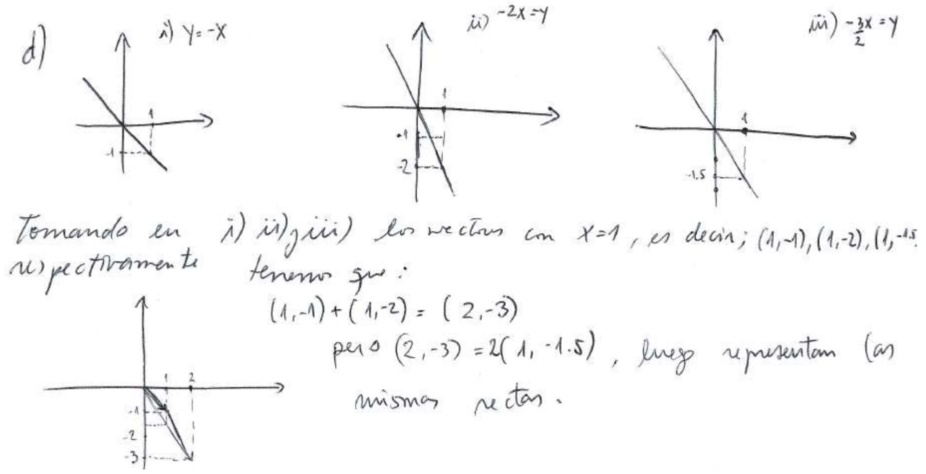


Figura 98: Respuesta **E5** a la pegunta 4d)

Comentarios a lo planteado por E1a E5 a la Pregunta 4, apartado 4d)

Se observa en las respuestas de la Tabla N°40, que **E1** y **E2** evidencian una *concepción proceso* del plano cartesiano; además **E5** explicitan la relación entre la estructura entre el CSELH y la relación aditiva de las ELH lo que pone de manifiesto la coordinación de la *construcción proceso* plano cartesiano y la *construcción proceso* cartesiano $\mathbf{R}^2$ en la nueva *construcción proceso*, el espacio vectorial $\mathbf{R}^2$.

En la Tabla N°41 se presenta un análisis a las respuestas de **E1** a **E5** a la pregunta 5, del cuestionario 1.

Tabla N°41: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 5, apartado 5a), y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

Pregunta 5: apartado 5a)		
Estudiante	**Argumentos que manifiestan los estudiantes.**	**Construcciones y mecanismos mentales que se asocian a las acciones indicadas.**
E1	Según la Figura 99: **Ar1E1P5a**: Escribe ecuaciones con los vectores asociados a la Figura del problema, desde las relaciones que establece utilizando el método del triángulo.	**Ar1E1P5a** evidencia una *concepción proceso* del plano vectorial.

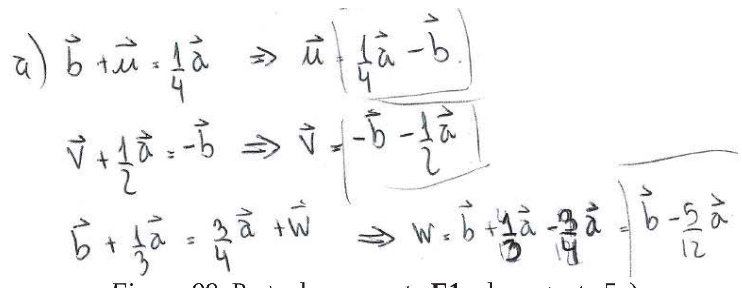


Figura 99: Parte de respuesta **E1** a la pegunta 5a)

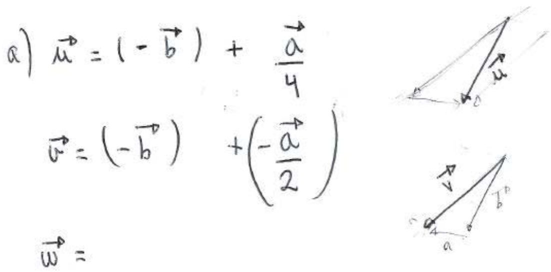
<table>
<tr><td>E2</td><td>Según la Figura 100:
Ar1E2P5a: Escribe ecuaciones con los vectores asociados a la Figura del problema, desde las relaciones que establece utilizando el método del triángulo.</td><td>Ar1E2P5a evidencia una concepción proceso del plano vectorial.</td></tr>
<tr><td colspan="3">

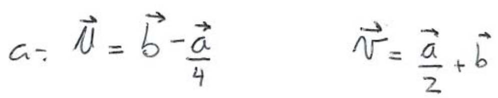
Figura 100: Respuesta E2 a la pegunta 5a)</td></tr>
<tr><td>E3</td><td>Según Figura 101:
Ar1E3P5a: Escribe ecuaciones con los vectores asociados a la Figura del problema, desde las relaciones que establece utilizando el método del triángulo.</td><td>Ar1E3P5a, evidencia una concepción proceso del plano vectorial.</td></tr>
<tr><td colspan="3">

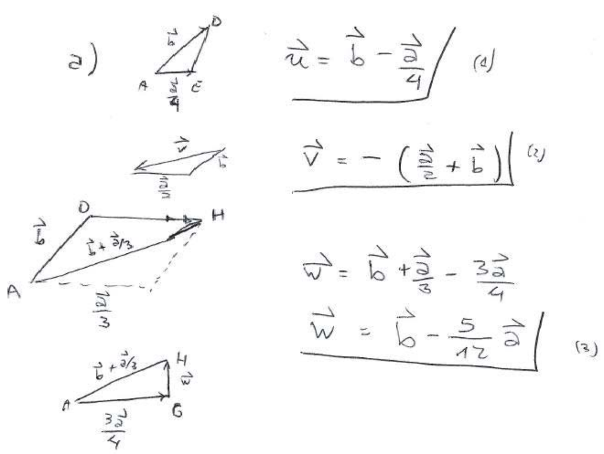
Figura 101: Respuesta del estudiante E3 a la pegunta 5a)</td></tr>
<tr><td>E4</td><td>Según Figura 102:
Ar1E4P5a: Escribe ecuaciones con los vectores asociados a la Figura del problema, desde las relaciones que establece utilizando el método del triángulo.</td><td>El Ar1E4P5a evidencia una concepción proceso del plano vectorial.</td></tr>
<tr><td colspan="3">

Figura 102: Respuesta E4 a la pegunta 5a)</td></tr>
</table>

E5	Según Figura 103: **Ar1E5P4a**: Escribe ecuaciones con los vectores asociados a la Figura del problema, desde las relaciones que establece utilizando el método del triángulo.	**Ar1E5P4a** evidencia una *concepción proceso* del plano vectorial.

a) $\vec{u} = (-1)\vec{b} + \left(\frac{1}{4}\right)\vec{a}$ $\quad$ $\vec{w} = \left(-\frac{3}{4}\right)\vec{a} + \vec{b} + \left(\frac{1}{3}\right)\vec{a}$

$\vec{v} = (-1)\vec{b} + \left(-\frac{1}{2}\right)\vec{a}$ $\quad$ $\vec{w} = \left(\frac{-5}{12}\right)\vec{a} + \vec{b}$

Figura 103: Respuesta **E5** a la pegunta 5a)

Comentarios a lo planteado por E1a E5 en la Pregunta 5, apartado 5a)

Los **E1 a E5**, dados los argumentos que manifiestan, evidencian una *concepción proceso* del plano vectorial. Además utilizan, en general, el método del triángulo para obtener la suma de dos vectores. Una vez establecida la relación fundamental entre los vectores, establecer igualdades entre vectores, se opera algebraicamente con las igualdades manipulando y combinando expresiones según las reglas establecidas para un álgebra de igualdades desde los números reales y el álgebra de igualdades.

En la pregunta 5b, según se aprecia en la Figura 104 destaca la respuesta **E4** quién utiliza las ecuaciones del apartado 5a) para establecer la relación que se pide, ello da cuenta de una concepción *proceso* de ecuaciones vectoriales.

b) de (A) $\vec{b} = \frac{\vec{a}}{4} + \vec{u}$

Reemplazo en (3)

$\vec{w} = \frac{\vec{a}}{4} + \vec{u} - \frac{5}{12}\vec{a}$

$= \frac{-\vec{a}}{6} + \vec{u}$ $\quad (*)$

Sumo (1) y (2)

$\vec{u}+\vec{v} = \frac{-\vec{a}}{4} - \frac{\vec{a}}{2} = \frac{-3\vec{a}}{4}$

$-\frac{4}{3}(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{a}$ $\quad (\#)$

Reemplazo (#) en (*)

$\vec{w} = -\frac{\left(-\frac{4}{3}(\vec{u}+\vec{v})\right)}{6} + \vec{u} = \frac{4}{18}(\vec{u}+\vec{v}) + \vec{u} = \frac{2}{9}\vec{v} + \frac{2}{9}\vec{u} + \vec{u}$

$\vec{w} = \frac{2}{9}\vec{v} + \frac{11}{9}\vec{u}$

Figura 104: Sobre la manipulación de ecuaciones vectoriales por **E4** en la pregunta 5b)

En la tabla N°42 se presenta un análisis a las respuestas **E1** a **E5** a la pregunta 6, del cuestionario 1.

Tabla N°42: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 6 y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

Pregunta 6		
Estudiante	**Argumentos que manifiestan los estudiantes.**	**Construcciones y mecanismos mentales que se asocian a las acciones indicadas.**
E1	Según la Figura 105: **Ar1E1P6**: Identifica elemento neutro. **Ar2E1P6:** Prueba las propiedades asociadas a la operación binara externa.	**Ar1E1P6 y Ar2E1P6** evidencia una *concepción proceso* de espacio vectorial $\mathbf{R}^2$.

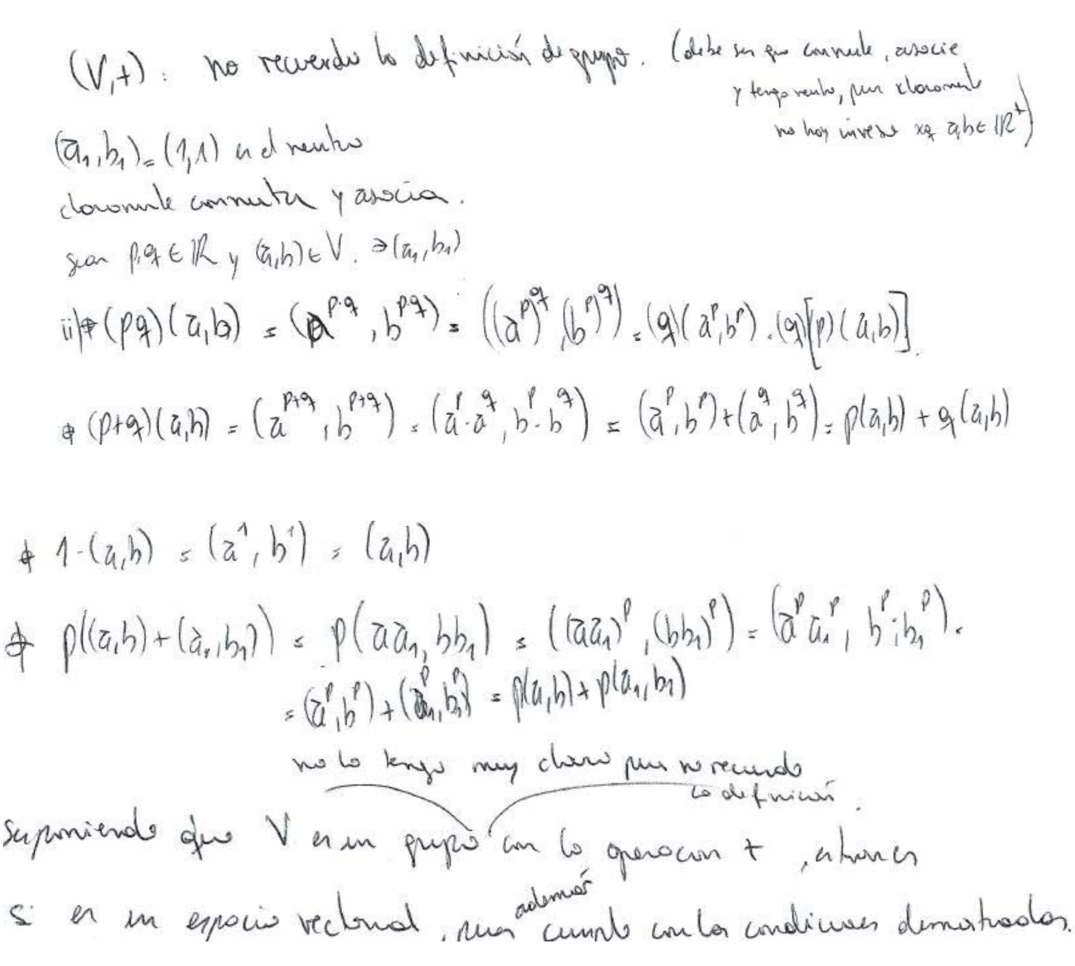


Figura 105: Respuesta **E1** a la pegunta 6).

E2	Según la Figura 106: **Ar1E2P6**: Identifica elemento neutro. **Ar2E2P6:** Prueba las propiedades asociadas a la operación binara externa.	**Ar1E2P6 y Ar2E2P6** evidencia una *concepción proceso* de espacio vectorial $\mathbf{R}^2$.

A) PD:

i) $[(a,b) + (a_1,b_1)] + (a_2,b_2) = (a,b) + [(a_1,b_1) + (a_2,b_2)]$

$[(a,b) + (a_1,b_1)] + (a_2,b_2) = (aa_1, bb_1) + (a_2,b_2)$
$= (aa_1 \cdot a_2, bb_1 \cdot b_2)$

$(a,b) + [(a_1,b_1) + (a_2,b_2)] = (a,b) + (a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot b_2)$
$= (a \cdot a_1 \cdot a_2, b \cdot b_1 \cdot b_2)$

Es asociativo $\forall (a,b),(a_1,b_1),(a_2,b_2)$ en V.

ii) $(1,1) + (a,b) = (1 \cdot a, 1 \cdot b) = (a,b)$
$(a,b) + (1,1) = (a \cdot 1, b \cdot 1) = (a,b)$

$\forall (a,b)$ en V, $\exists (1,1)$ tq $(1,1)$ es neutro.

iii) $(a,b) + (\frac{1}{a}, \frac{1}{b}) = (a \cdot \frac{1}{a}, b \cdot \frac{1}{b}) = (1,1)$.

$\forall (a,b)$ en V, $\exists (\frac{1}{a}, \frac{1}{b})$ en V, tq $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})$ es inverso de (a,b).

En la definición del comienzo no dijo que con la primera operación se tenía que dar la conmutatividad, aquí ya se tiene que es grupo. Creo que se debe cumplir que sea grupo abeliano, entonces veré si pasa.

iv) PD: $(a,b) + (a_1,b_1) = (a_1,b_1) + (a,b)$

$(a,b) + (a_1,b_1) = (a \cdot a_1, b \cdot b_1)$
$= (a_1 \cdot a, b_1 \cdot b)$
$= (a_1,b_1) + (a,b)$ #

$a, a_1, b, b_1 \in \mathbb{R}^+$, los reales conmutan en la multiplicación.

Figura N°106: Respuesta **E2** a la pegunta 6.

E3	Según la Figura 107: **Ar1E3P6**: Identifica elemento neutro. **Ar2E3P6:** Prueba las propiedades asociadas a la operación binara externa.	**Ar1E3P6 y Ar2E3P6** evidencia una *concepción proceso* de espacio vectorial $\mathbf{R}^2$.

$(V,+)$ es un grupo abeliano, ya que al estar definida como el producto componente a componentes y estos estan en $\mathbb{R}^+$, se sabe que es ~~abeliano~~, asociativo, conmutativo, tiene neutro, que sería $(1,1)$, ya que $(a,b)+(1,1) = (a \cdot 1, b \cdot 1) = (a,b)$ y el inverso sería el par con el inverso multiplicativo de cada componente.
$(a,b) + (a^{-1}, b^{-1}) = (aa^{-1}, bb^{-1}) = (1,1)$.

• $(V,\cdot)$ es un espacio vectorial, ya que la multiplicación por escalar corresponde justamente a la suma de p vectores iguales. con esto cumple las propiedades del producto por escalar.

Sea $v=(a,b)$, $w=(c,d)$

- $1\cdot(a,b)=(a,b)$
- $p(v+w)=p(ac,bd)=((ac)^p,(bd)^p)=(a^pc^p,b^pd^p)=(a^p,b^p)+(c^p,d^p)=pv+pw$
- $(p+q)v=(p+q)(a,b)=(a^{p+q},b^{p+q})=(a^pa^q,b^pb^q)=(a^p,b^p)+(a^q,b^q)=pv+qv$
- $(pq)v=(a^{pq},b^{pq})=((a^q)^p,(b^q)^p)=p(a^q,b^q)=p(qv)$

$\therefore (V,+,\cdot)$ es un $\mathbb{R}^+$-espacio vectorial

Figura 107: Respuesta **E3** a la pegunta 6.

E4	Según la Figura 108: **Ar1E4P6**: Escribe ecuaciones con los vectores asociados a la Figura del problema, desde las relaciones que establece utilizando el método del triángulo.	**Ar1E4P6** evidencia una *concepción proceso* de espacio vectorial $\mathbf{R}^2$.

p.d. $(V,+)$ es grupo abeliano.

para que sea grupo abeliano con la suma, debe existir (1) conmutatividad, (2) asociatividad, (3) neutro, (4) inverso.

(1) $(a_1,b_1)+(a,b)=(a_1a,b_1b)=(aa_1,bb_1)$ /por conmutatividad en $\mathbb{R}$.

$=(a,b)+(a_1,b_1)$

(2) Sean (a,b), (a_1,b_1), $(a_2,b_2) \in V$

$$(a,b)+\big((a_1,b_1)+(a_2,b_2)\big)$$
$$= (a,b) + (a_1a_2, b_1b_2)$$
$$= (aa_1a_2, bb_1b_2) =$$
$$= (aa_1, bb_1) + (a_2,b_2)$$
$$= \underline{\big((a,b)+(a_1,b_1)\big) + (a_2,b_2)}$$

(3) Sean (a,b), $(1,1) \in V$

$$(a,b)+(1,1) = (a\cdot 1, b\cdot 1) = (a,b)$$

(4) Sean (a,b), $\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right) \in V$

$$(a,b)+\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right) = \left(a\cdot\frac{1}{a}, b\cdot\frac{1}{b}\right) = (1,1)$$

→ Verifico si cumple las propiedades de producto por escalar.

(i) Sean $q,p\in\mathbb{R}$, $(a_1,b_1)\in V$

$$(pq)\cdot(a_1,b_1) = (a_1^{pq}, b_1^{pq}) = \left((a_1^{q})^{p}, (b_1^{q})^{p}\right) = p\cdot(a_1^{q}, b_1^{q})$$
$$= p\cdot\big(q\cdot(a_1,b_1)\big)$$

(ii) Sean $p,q\in\mathbb{R}$, $(a,b)\in V$

$$(p+q)\cdot(a,b) = (a^{p+q}, b^{p+q}) = (a^{p}\cdot a^{q}, b^{p}\cdot b^{q})$$
$$= (a^{p},b^{p})+(a^{q},b^{q})$$
$$= p\cdot(a,b)+q\cdot(a,b)$$

(iii) $1\cdot(a,b) = (a^{1},b^{1}) = (a,b)$

(iv) Sean $p\in\mathbb{R}$, (a_1,b_1), $(a_2,b_2)\in V$

$$p\cdot\big((a_1,b_1)+(a_2,b_2)\big)$$
$$= p\cdot(a_1a_2, b_1b_2)$$
$$= \left((a_1a_2)^{p}, (b_1b_2)^{p}\right)$$
$$= (a_1^{p}a_2^{p}, b_1^{p}b_2^{p})$$
$$= (a_1^{p}, b_1^{p}) + (a_2^{p}, b_2^{p})$$
$$= p\cdot(a_1,b_1) + p\cdot(a_2,b_2)$$

∴ V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Figura 108: Respuesta **E4** a la pegunta 6.

E5	Según Figura la 109: **Ar1E5P4a**: Escribe ecuaciones con los vectores asociados a la Figura del problema, desde las relaciones que establece utilizando el método del triángulo.	**Ar1E5P4a** evidencia una *concepción proceso* del plano vectorial.

¿(V,+) es grupo?

Asociatividad:

$$((a,b)+(a_1,b_1))+(a_2;b_2) = (a,b)+((a_1,b_1)+(a_2,b_2))$$
$$= (aa_1, bb_1) + (a_2,b_2)$$
$$= ((aa_1)a_2, (bb_1)b_2)$$
$$= (a(a_1a_2), b(b_1b_2))$$
$$= (a,b) + (a_1a_2, b_1b_2)$$
$$= (a,b) + ((a_1,b_1),(a_2,b_2))$$

Neutro: Sea $(a_1,b_1)=(1,1)$

$$(a,b) + (a_1,b_1) = (a,b)$$
$$= (aa_1, bb_1)$$
$$= (a\cdot 1, b\cdot 1)$$
$$= (a,b) \ \#$$

Inverso: Sea $(a_1,b_1) = (\frac{1}{a}, \frac{1}{b})$

$$(a,b)+(a_1,b_1) = (1,1)$$
$$= (aa_1, bb_1)$$
$$= (1,1) \ \#$$

es grupo

i) $pq(a,b) = p(q\cdot(a,b))$

$$= (a^{pq}, b^{pq})$$
$$= ((a^q)^p, (b^q)^p)$$
$$= p(a^q, b^q)$$
$$= p(q(a,b)$$

ii) $(p+q)\cdot(a,b) = p(a,b) + q(a,b)$

$$= (a^{p+q}, b^{p+q})$$
$$= (a^p\cdot a^q, b^p\cdot b^q)$$
$$= (a^p,b^p)+(a^q,b^q)$$
$$= p(a,b) + q(a,b)$$

iii) $1\cdot v = v$

$$1(a,b) = (a,b)$$
$$= (a^1,b^1)$$
$$= (a,b)$$

Figura 109: Respuesta **E5** a la pegunta 6.

Comentarios a lo planteado por E1 a E5 en la Pregunta 6

Dados los argumentos que manifiestan **E1**, **E2**, **E3**, **E4** y **E5**, dejan en evidencia una *concepción proceso* espacio vectorial $\mathbf{R}^2$. Verifican propiedades, identifican el elemento neutro

4.3.2.-Análisis a las respuestas de los estudiantes caso 2 al cuestionario 1

En la Tabla N°43, N°44, N°45 y N°46 se presenta un análisis de las respuestas **E8** y **E9** a la pregunta 1, del cuestionario 1, que fue diseñado para indagar en las construcciones y mecanismos mentales que se pueden establecer desde los argumentos que manifiestan los estudiantes del caso2.

Tabla 43: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 1, apartado 1a), y su relación con las construcciones y mecanismos mentales de conceptos.

Pregunta 1: apartado 1a)		
Estudiante	**Argumentos que manifiestan los estudiantes**	**Construcciones y mecanismos mentales que se asocian al argumento observado.**
E8	Según la Figura 110: **Ar1E8P1a**: Asigna parejas de números reales, uno el inverso aditivo del otro, a los términos de la ELH. **Ar2E8P1a**: Escribe ecuaciones de primer grado que se desprenden de aplicar el procedimiento dado a la ELH. **Ar3E8P1a**: Escribe las soluciones de las ecuaciones que desprende de la ELH. **Ar4E8P1a**: Escribe un conjunto con las parejas de pares ordenados asociados a las soluciones de las ecuaciones; estableciendo una relación con el CSELH de la ELH, aunque equivoca la relación entre ambos conjuntos.	**Ar1E8P1a**, **Ar2E8P1a** y **Ar3E8P1a** muestran una *concepción proceso* de **R** como grupo y el **Ar4E8P1a** muestra *una concepción acción* del conjunto solución de la ELH.

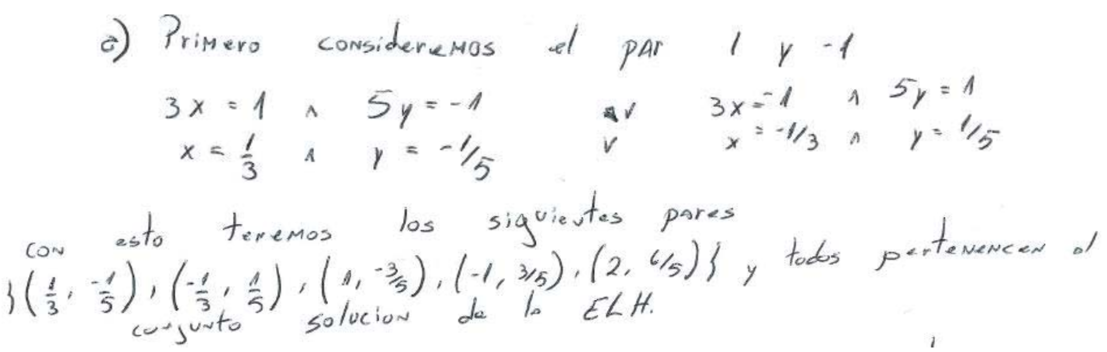


Figura 110: Parte de la respuesta de **E8** a la pregunta 1a)

E9	Según la Figura N°110: **Ar1E9P1a**: Asigna parejas de números reales, uno el inverso aditivo del otro, a los términos de la ELH; según procedimiento dado en la Tabla X. **Ar2E9P1a**: Escribe ecuaciones de primer grado que se desprenden de aplicar el procedimiento dado a la ELH.	**Ar1E9P1a**, **Ar2E9P1a** y **Ar3E9P1a** muestran una *concepción proceso* de **R** como cuerpo y **Ar4E9P1a** y **Ar5E9P1a** muestra *una concepción acción* del conjunto solución de la ELH.

<table>
<tr><td></td><td>Ar3E9P1a: Escribe las soluciones de las ecuaciones que desprenden de la ELH.

Ar4E9P1a: Escribe y lista las parejas de pares ordenados que determina con las soluciones de las ecuaciones asociadas a la ELH.

Ar5E9P1a: Identifica soluciones inversas</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">a) Reemplazamos $(5,-5) \Rightarrow 3x=5 \wedge 5y=-5 \Rightarrow x=\frac{5}{3} \wedge y=-1$. $\therefore (\frac{5}{3},-1) \in S'$ es una.
Pares de inversos
• $(7,-7) \Rightarrow 3x=7 \wedge 5y=-7 \Rightarrow x=\frac{7}{3} \wedge y=\frac{-7}{5} \Rightarrow (\frac{7}{3},-\frac{7}{5}) \in S'$
• $(3,-3) \Rightarrow 3x=3 \wedge 5y=-3 \Rightarrow x=1 \wedge y=\frac{-3}{5} \Rightarrow (1,-\frac{3}{5}) \in S'$
• $(-3,3) \Rightarrow 3x=-3 \wedge 5y=3 \Rightarrow x=-1 \wedge y=\frac{3}{5} \Rightarrow (-1,\frac{3}{5}) \in S'$

Figura 110: Parte de la respuesta de E9 a la pregunta 1a)</td></tr>
</table>

Comentarios a lo planteado por los E8 y E9, Pregunta 1, apartado 1a)

En primer lugar se puede apreciar que la *acción* asociar una pareja de números reales a los términos de una ELH para determinar soluciones del CSELH evidencia una *concepción acción* de **R** como grupo. Por otro lado el **E9** evidencia una *concepción acción* de (*S*, +) como grupo cuando identifica pares inversos en las soluciones que obtiene de la ELH.

Tabla N°44: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 1, apartado 1b), y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

<table>
<tr><th colspan="3">Pregunta 1: apartado 1b)</th></tr>
<tr><th>Estudiante</th><th>Argumentos que manifiestan los estudiantes.</th><th>Construcciones y mecanismos mentales que se asocian al argumento observado.</th></tr>
<tr><td>E8</td><td>Según la Figura 111
Ar5E8P1b: Utiliza un parámetro al reescribir el CSELH en términos de dos ecuaciones paramétricas asociadas a la ELH.

Ar6E8P1b: Indica la variación del parámetro en R.</td><td>Ar5E1P1b y Ar6E8P1b evidencia que la construcción acción asignar un par de números reales, uno inverso aditivo del otro, se interioriza en el proceso separa una ecuación, donde el uso de un parámetro actúa como un mecanismo de interiorización.</td></tr>
<tr><td colspan="3">b) Utilizando el metodo dado en a) vemos que el conjunto S tambien puede ser visto como
$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 3x = a \wedge 5y = -a \ \forall a \in \mathbb{R}\}$

Figura 111: Respuesta de E8 a la pregunta 1b)</td></tr>
</table>

E9	Según Figura 112: **Ar61E9P1b**: Utiliza un parámetro para reescribir el CSELH escribiendo dos ecuaciones paramétricas asociadas a la ELH. **Ar7E9P1b**: Reescribe el CSELH estableciendo una dependencia entre las variables.	**Ar6E2P1b** evidencia que la *acción* asigna un par de números reales, uno inverso aditivo del otro, se *interioriza* en *proceso*, ecuaciones paramétricas, donde el uso de un parámetro actúa como un mecanismo de *interiorización*. **Ar7E9P1b** da cuenta de una concepción acción de gráfico de una función lineal.

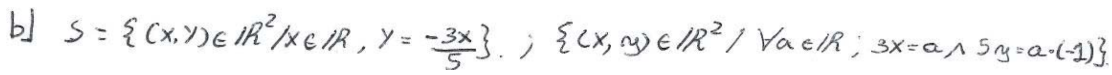

b] $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \in \mathbb{R}, y = \frac{-3x}{5}\}$; $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \forall a \in \mathbb{R};\ 3x = a \wedge 5y = a \cdot (-1)\}$

Figura 112: Respuesta de **E9** a la pregunta 1b)

Comentarios a lo planteado por E8 y E9 a la pregunta 1, apartado 1b)

E8 y **E9** al utilizar un parámetro para reescribir el CSELH, atendiendo a su definición, da cuenta de la *interiorización* de la *acción* asociar un par de números reales a los términos de una ELH en el *proceso* separar una ELH, donde el uso de un parámetro actúa como *mecanismo* de *interiorización*. Destaca además **E9** que despeja una variable en términos de la otra, evidenciando una *concepción acción* del gráfico de una función lineal.

Tabla N°45: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 1, apartado 1c), y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

Pregunta 1: apartado 1c)		
Estudiante	**Acciones que manifiestan los estudiantes.**	**Construcciones y mecanismos mentales que se manifiestan desde las acciones.**
E8	Según la Figura 113: **Ar7E8P1c**: Identifica la solución trivial como una invariante en cualquier conjunto solución de una ELH, para afirmar que el CSELH es no vacío.	**Ar7E8P1c** muestra que identificar el par (0,0) como un elemento invariante en el CSELH, evidencia una *concepción proceso* de CSELH.

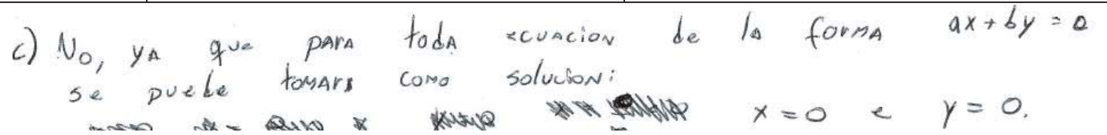

c) No, ya que para toda ecuacion de la forma $ax + by = 0$ se puede tomar como solucion: $x = 0$ e $y = 0$.

Figura 113: Respuesta de **E8** a la pregunta 1c)

E9	Según la Figura 114: **Ar8E9P1c**: Identifica la solución trivial como una invariante en cualquier conjunto solución de una ELH, para afirmar que el CSELH es no vacío.	**Ar8E9P1c** muestra que la acción identificar el par (0,0) como un elemento invariante en el CSELH, evidencia una *concepción proceso* de CSELH.

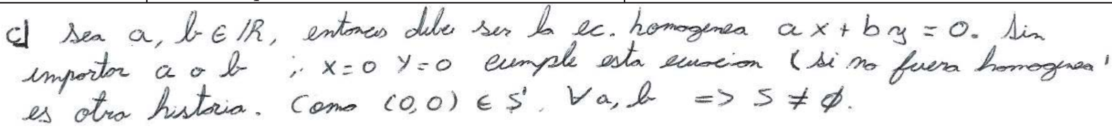

c] Sea $a, b \in \mathbb{R}$, entonces debe ser la ec. homogenea $ax + by = 0$. Sin importar a o b ; $x = 0$ $y = 0$ cumple esta ecuacion (si no fuera homogenea es otra historia. Como $(0,0) \in S'$. $\forall a, b \Rightarrow S \neq \emptyset$.

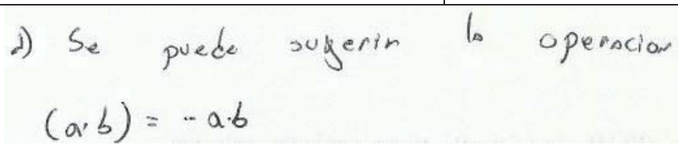
Figura 114: Respuesta de **E9** a la pregunta 1c)

Comentarios a lo planteado por E8 y E9 a la Pregunta 1, apartado 1c)

Ambos estudiantes, **E8** y **E9**, argumentan que el CSELH es no vacío, pues el elemento (0,0) siempre pertenece a dicho conjunto, esto evidencia una *concepción proceso* de conjunto solución. **E9** escribe una ELH cuyos coeficientes son parámetros y hace ver que independiente de los valores que asuman dichos parámetros (0,0) satisface dicha ecuación, evidenciando una *concepción proceso* de SELH.

Tabla N°46: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 1, apartado 1c), y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

<table>
<tr><th colspan="3">Pregunta 1: apartado 1d)</th></tr>
<tr><th>Estudiante</th><th>Acciones que manifiestan los estudiantes.</th><th>Construcciones y mecanismos mentales que se manifiestan desde las acciones.</th></tr>
<tr><td>E8</td><td>Según la Figura 115:
Ar8E1P1d: Define una operación que asocia un par ordenado a un número real.</td><td>Ar8E1P1d da cuenta de una concepción acción de una operación binaria.</td></tr>
<tr><td colspan="3">

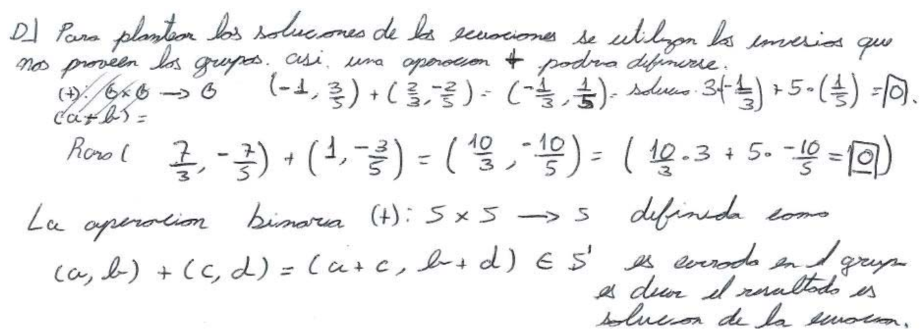


d) Se puede sugerir la operacion
$(a, b) = -a\cdot b$

Figura 115: Respuesta de **E8** a la pregunta 1d)

</td></tr>
<tr><td>E9</td><td>Según la Figura 116:
.-Ar9E9P1d: Define la adición de pares ordenados

.- Ar10E9P1d Verifica si la adición es cerrada</td><td>Ar9E9P1d y Ar10E9P1d evidencian una concepción proceso de operación binaria.</td></tr>
<tr><td colspan="3">



D) Para plantear las soluciones de las ecuaciones se utilizan los inversos que nos proveen los grupos. así, una operación + podría definirse.
~~(+): S×S → S (a+b) =~~ $(-1, \frac{3}{5}) + (\frac{2}{3}, -\frac{2}{5}) = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{5})$ solución $3(-\frac{1}{3}) + 5\cdot(\frac{1}{5}) = \boxed{0}$.
Pero $(\frac{7}{3}, -\frac{7}{5}) + (1, -\frac{3}{5}) = (\frac{10}{3}, -\frac{10}{5}) = (\frac{10}{3}\cdot 3 + 5\cdot -\frac{10}{5} = \boxed{0})$
La operación binaria $(+): S\times S \to S$ definida como
$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) \in S'$ es cerrada en el grupo es decir el resultado es solución de la ecuación.

Figura 116: Respuesta de **E9** a la pregunta 1d)

</td></tr>
</table>

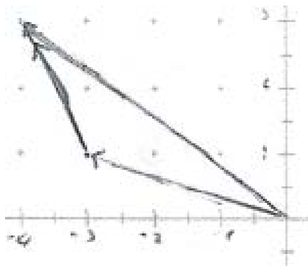
Comentarios a lo planteado por E8 y E9 a la Pregunta 1, apartado 1d)

De los planteamientos desplegados en la Tabla N°46, **E8** define una operación binaria pero no queda claro el sentido de esta. En cambio **E9** define la adición en *S* y verifica que un par de soluciones satisface la propiedad de clausura lo que evidencia una *concepción objeto* de operación.

En las Tablas N°47, N°48, N°49, N°50 y N° 51 se presenta un análisis a las respuestas **E8** y **E9** a la pregunta 2, del cuestionario 1.

Tabla N°47: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 2, apartado 2a) y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

<table>
<tr><th colspan="3">Pregunta 2: apartado 2a)</th></tr>
<tr><th>Estudiante</th><th>Argumentos que manifiestan los estudiantes.</th><th>Construcciones y mecanismos mentales que se asocian a las acciones indicadas.</th></tr>
<tr><td>E8</td><td>Según la Figura 117:
Ar1E8P2a: Representa un par ordenado como el extremo de un vector geométrico anclado al origen.

Ar2E8P2a: Interpreta la combinación lineal de dos pares ordenados como la diagonal de un paralelogramo, una vez efectuada la operatoria.</td><td>Ar1E8P2a y Ar1E8P2a evidencian una concepción proceso de operación binaria. Además, muestran que representar una combinación lineal de una pareja de pares ordenados, utilizando vectores geométricos en un sistema de coordenadas, procura coordinar dos construcciones proceso, álgebra de vectores en el plano y el álgebra de pares ordenados, en una nueva construcción proceso, el cartesiano $\mathbf{R}^2$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">
Figura 117: Respuesta de E1 a la pegunta 2a)</td></tr>
<tr><td>E9</td><td>Según la Figura 118:
Ar1E9P2a: Representa un par ordenado a través de un vector geométrico anclado al origen.

Ar2E9P2a: Reconoce en la multiplicación de un par ordenado por el escalar -1 un vector con sentido opuesto a otro vector anclado al origen, ambos colineales.

Ar3E9P2a: Interpreta la combinación lineal de dos pares ordenados como la diagonal de un paralelogramo.</td><td>El Ar1E9P2a, Ar2E9P2a y Ar3E9P2a evidencian una concepción proceso de operación binaria. Además, muestran que la acción representar una combinación lineal de una pareja de pares ordenados, utilizando vectores geométricos en un sistema de coordenadas, procura coordinar dos construcciones proceso, álgebra de vectores en el plano y el álgebra de pares ordenados, en la construcción proceso, cartesiano $\mathbf{R}^2$.</td></tr>
</table>

a) Lo veo como un simple paralelogramo.

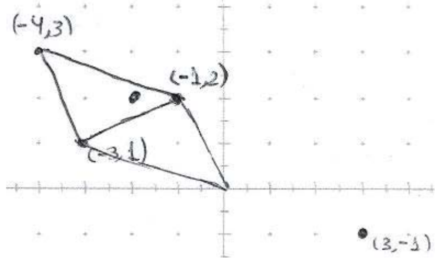


Figura 118: Respuesta de **E9** a la pegunta 2a)

Comentarios a lo planteado por E8 y E9 a la Pregunta 2, apartado 2a)

En primer lugar se puede apreciar que **E8** y **E9** muestran una *concepción proceso* de un álgebra de soluciones al considerar el método del paralelogramo para explicar la relación entre los pares ordenados de la ecuación (-4,3) = -1(3,-1) +1(-1,2); en particular **E8** y **E9** dan cuenta que la multiplicación por -1 determina un vector opuesto a un vector dado; lo que da evidencia de una *concepción proceso* de operación binaria externa.

Tabla N°48: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 2, apartado 2b), y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

Pregunta 2: apartado 2b)		
Estudiante	**Argumentos que manifiestan los estudiantes.**	**Construcciones y mecanismos mentales que se manifiestan desde las acciones.**
E8	Según Figura 119: **Ar3E8P2b**: Obtiene una nueva solución determinando una ELH. **Ar4E8P2b**: Escribe una nueva ecuación de pares ordenados utilizando inversos multiplicativos para los escalares.	**Ar3E8P2b** y **Ar4E8P2b** muestra que obtener otra solución a partir de una dada, evidencia una *concepción acción* de ($\mathbf{R}^2$, +, $\cdot_{\mathbf{R}}$). El **Ar4E8P2b** da cuenta de una *concepción proceso* de la ponderación de una solución.

b) Si (-3,1) es sol de S_2 esto quiere decir (-3,1) resuelve $ax+by=0$
i.e.: $-3a+b=0 \Rightarrow b=3a$ es decir la ecuación puede verse como
$ax+3ay=0$
$a(x+3y)=0 \Rightarrow x+3y=0$, $x=-3y$ con lo que tambien podemos tomar el por (-6,2)

Si hacemos lo mismo para S_3 (-1,2) resuelve $a'x+b'y=0$
$\Rightarrow -a'+2b'=0$ es decir la ecu. puede verse como $2b'x+b'y=0$
$\Rightarrow a'=2b'$ $\qquad b'(2x+y)=0$
$\Rightarrow 2x=-y$
así podemos tomar como solución (-2,4)

Además (-4,3) puede verse como $(-4,3)=\frac{1}{2}(-6,2)+\frac{1}{2}(-2,4)$

Figura 119: Respuesta de **E8** a la pegunta 2b)

E9	Según Figura 120: **Ar4E9P2b**: Generaliza una solución desde una relación que establece entre las variables asociadas a la ELH. **Ar5E9P2b**: Escribe todas las posibles ecuaciones de pares ordenados.	**Ar4E9P2b** y **Ar5E9P2b** dan cuenta de una *concepción acción* de cartesiano $\mathbf{R}^2$.

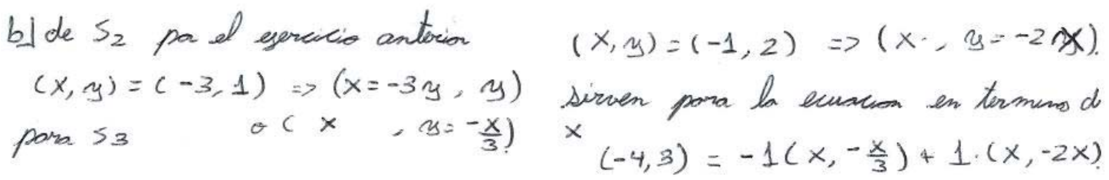


Figura 120: Respuesta de **E9** a la pegunta 2b)

Comentarios a lo planteado por E8 y E9 a la pregunta 2, apartado 2b)

En general, los argumentos que despliegan los estudiantes **E8** y **E9** muestran una *concepción proceso* de cartesiano $\mathbf{R}^2$. Por otro lado, tanto el **E8** como **E9** *revierten* la *construcción proceso* todas las soluciones en la *construcción proceso* ponderación de una solución por un escalar, donde expresar una variable en términos de la otra actúa como *mecanismo* de *reversión*.

Tabla N°49: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 2, apartado 2c), su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

Pregunta 2: apartado 2c)		
Estudiante	**Argumentos que se manifiestan los estudiantes.**	**Construcciones y mecanismos mentales que se manifiestan desde las acciones.**
E8	Según la Figura 121: **Ar5E8P2c**: Asocia aditivamente un par ordenado y su inverso con el par (0,0). **Ar6E8P2c**: Utiliza el escalar 1 como neutro multiplicativo para un par ordenado.	**Ar6E8P2c** y **Ar7E8P2c** muestran que la acción escribir el par (0,0) en combinación lineal con dos pares ordenados del CSELH, uno el inverso aditivo del otro, procura *coordinar* dos *procesos*, grupo (S, +) y ponderación de una solución por un escalar en un nuevo *proceso*, (S, +, $\cdot_{\mathbf{R}}$).

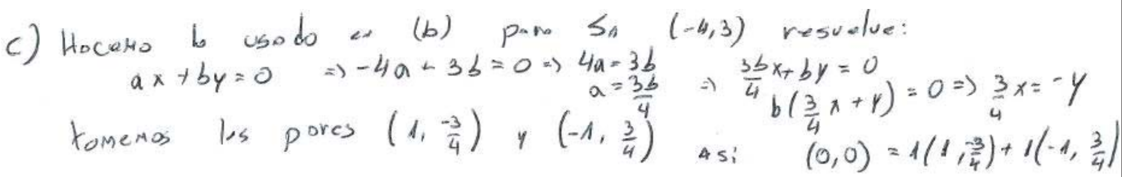


Figura 121: Respuesta de **E8** a la pegunta 2c)

E9	Según Figura 122: **Ar6E9P2c**: Asocia aditivamente un par ordenado y su inverso con el par (0,0). **Ar7E9P2c**: Utiliza el escalar 1 como neutro multiplicativo para un par ordenado.	**Ar6E9P2c** y **Ar7E9P2c** muestran que escribir el par (0,0) en combinación lineal con dos pares ordenados, uno el inverso aditivo del otro, procura *coordinar* las construcciones *proceso*, grupo de soluciones y ponderación de una solución por un escalar en una nueva *construcción proceso*, álgebra de pares ordenados .

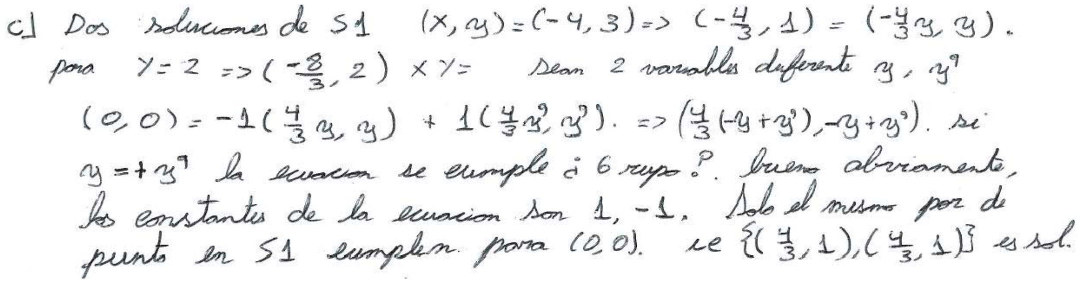

c) Dos soluciones de S1 $(x,y)=(-4,3) \Rightarrow (-\frac{4}{3},1) = (-\frac{4}{3}y, y)$.
para $y=2 \Rightarrow (-\frac{8}{3}, 2)$ x y= Sean 2 variables diferente y, y'
$(0,0) = -1(\frac{4}{3}y, y) + 1(\frac{4}{3}y', y') \Rightarrow (\frac{4}{3}(-y+y'), -y+y')$. si
$y=+y'$ la ecuacion se cumple ¿6 reys?. bueno obviamente,
los constantes de la ecuacion son 1, -1. Solo el mismo par de
punto en S1 cumplen para (0,0). ie $\{(\frac{4}{3},1),(\frac{4}{3},1)\}$ es sol.

Figura 122: Respuesta de **E9** a la pegunta 2b)

Comentarios a lo planteado por E8 y E9 a la Pregunta 2, apartado 2c)

Se observa, en general, que **E8** y **E9** manifiestan una *concepción proceso* de (S, +, $\cdot_{\mathbf{R}}$) cuando escriben una ecuación homogénea con soluciones inversas aditivas, evidenciando además una concepción proceso de (*S*, +) como grupo.

Tabla N°50: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 2, apartado 2d) y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

Pregunta 2: apartado 2d)		
Estudiante	**Argumentos que se manifiestan los estudiantes.**	**Construcciones y mecanismos mentales que se manifiestan desde las acciones.**
E8	Según la Figura 123: **Ar7E8P2c**: Escribe una ecuación homogénea con dos soluciones asociadas a ELH´s distintas, utilizando dos parámetros. **Ar8E8P2c**: Desprende un sistema de ecuaciones lineales homogéneo de una ecuación homogénea de soluciones. **Ar9E8P2c**: Clasifica vectores como linealmente independientes.	**Ar7E8P2c** y **Ar8E8P2c** dan cuenta que la acción escribir el par (0,0) combinando aditivamente la ponderación de soluciones de dos conjuntos solución pone de manifiesto una *concepción acción* de vectores linealmente independientes y una *concepción acción* de sistema de ecuaciones lineales homogéneo.

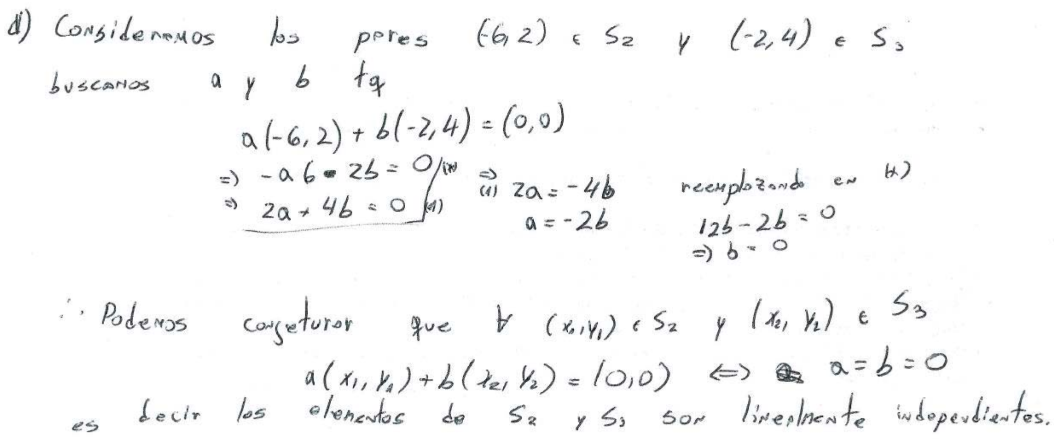

d) Consideremos los pares $(-6,2) \in S_2$ y $(-2,4) \in S_3$
buscamos a y b tq
$a(-6,2)+b(-2,4)=(0,0)$
$\Rightarrow -a6 - 2b = 0$ (*) $\Rightarrow$ (1) $2a=-4b$ reemplazando en (*)
$\Rightarrow 2a+4b=0$ (1) $a=-2b$ $12b-2b=0$
$\Rightarrow b=0$
$\therefore$ Podemos conjeturar que $\forall\,(x_1,y_1) \in S_2$ y $(x_2,y_2) \in S_3$
$a(x_1,y_1)+b(x_2,y_2)=(0,0) \Leftrightarrow a=b=0$
es decir los elementos de S_2 y S_3 son linealmente independientes.

Figura 123: Respuesta de **E8** a la pegunta 2d)

E9	Según Figura 124: **Ar8E9P2d**: Determina todas las soluciones de una ELH desde una solución de ésta. **Ar9E9P2d**: Escribe una ecuación homogénea combinando aditivamente todas las soluciones asociadas a dos ELH.	**Ar8E9P2d** y **Ar9E9P2d** muestran que el escribir una ecuación homogénea combinando aditivamente todas las soluciones asociadas a dos ELH sin reparar en la relación de las variables, evidencia una concepción *acción* de cartesiano $\mathbf{R}^2$.

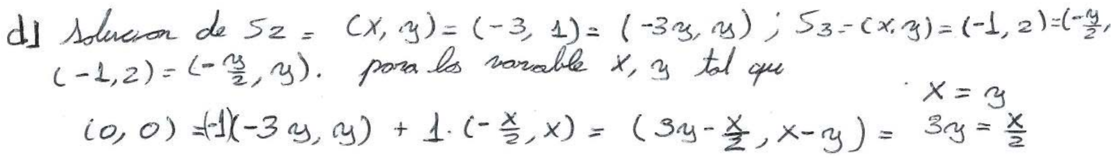

d) Solucion de $S_2 = (x,y) = (-3,1) = (-3y, y)$; $S_3 = (x,y) = (-1,2) = (-\frac{y}{2},$
$(-1,2) = (-\frac{y}{2}, y)$. para las variable x, y tal que
$x = y$
$(0,0) = -1(-3y, y) + 1\cdot(-\frac{x}{2}, x) = (3y - \frac{x}{2}, x-y) = \quad 3y = \frac{x}{2}$

Figura 124: Respuesta de **E9** a la pegunta 2d)

Comentarios a lo planteado por E8 y E9 a la Pregunta 2, apartado 2d)

Se observa, en general, que los estudiantes **E8** y **E9** tienen una *concepción proceso* de ponderación de un par ordenado con un escalar cuando escriben una ecuación homogénea con soluciones de distintos CSELH. **E8** repara en el hecho que el sistema de ecuaciones homogéneas tiene solución trivial y por lo tanto las soluciones son linealmente independientes, evidenciando una *concepción proceso* de cartesiano $\mathbf{R}^2$.

Tabla N°51: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 2, apartado 2e), y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

Pregunta 2: apartado 2e)		
Estudiante	**Argumentos que se manifiestan los estudiantes.**	**Construcciones y mecanismos mentales que se manifiestan desde las acciones.**
E8	Según la Figura 125: **Ar10E8P2c**: Determina una ELH desde una solución asociada a ésta. **Ar11E8P2c**: Relaciona una ELH con otras dos combinándolas aditivamente considerando la ponderación de ecuaciones por un escalar.	**Ar10E8P2c** y **Ar11E8P2c** muestran que escribir una ELH en combinación lineal con otras dos, evidencia una *concepción proceso del cartesiano* $\mathbf{R}^2$.

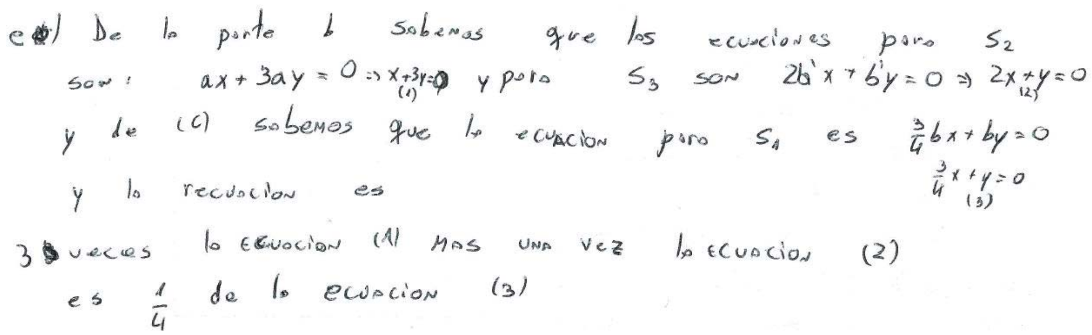


Figura 125: Respuesta de **E8** a la pegunta 2e)

E9	Según Figura 126: **Ar10E9P2e**: Determina una ELH desde una solución asociada a ésta. **Ar11E9P2e**: Relaciona una ELH con otras dos, combinándolas aditivamente. **Ar12E9P2e**: Relaciona el álgebra de ELH con los respectivos CSELH desde las rectas vectoriales.	**Ar10E9P2e** y **Ar11E9P2e** muestran que escribir una ELH en combinación lineal con otras dos, evidencia una *concepción objeto*, del ($\mathbf{R}^2$, $+$, $\cdot_{\mathbf{R}}$). Por otro lado, **Ar12E9P2e** evidencia que las construcciones *proceso* CSELH y recta vectorial se *coordinan* en el *proceso*, cartesiano $\mathbf{R}^2$.

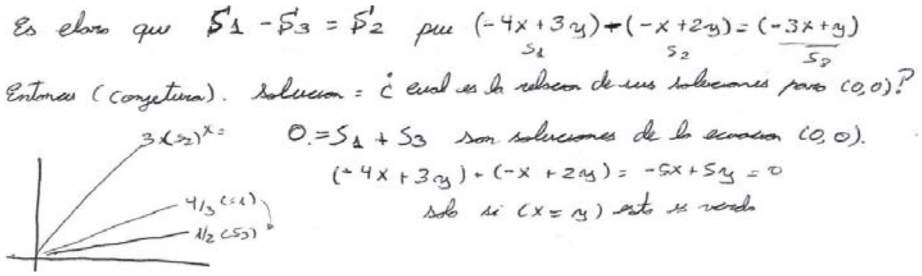


Figura 126: Respuesta de **E9** a la pegunta 2e)

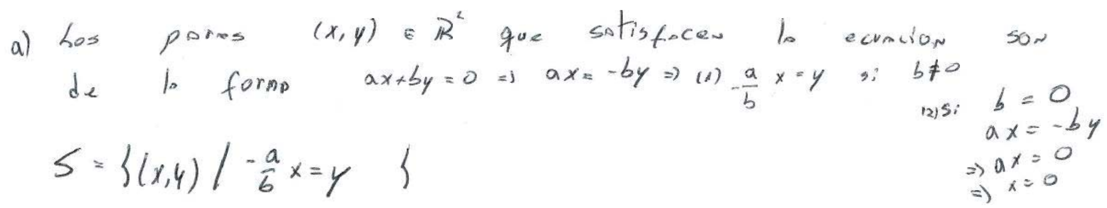
Comentarios a lo planteado por E8 y E9 a la Pregunta 2, apartado 2e)

Se observa, en general, que **E8** y **E9** tienen una *concepción proceso* de cartesiano $\mathbf{R}^2$ cuando escriben una ecuación con elementos de los conjunto solución de ELH’s. La coordinación del proceso recta vectorial con el proceso CSELH, da cuenta de la construcción *proceso* cartesiano $\mathbf{R}^2$, desde la acción comparar el álgebra de ELH´s con las soluciones de dichas ecuaciones y sus respectivos conjunto solución.

En la Tabla N°52, N°53 y N°54 se presenta un análisis a las respuestas de la pregunta 3, del cuestionario 1.

Tabla N°52: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 3, apartado 3a), y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

Pregunta 3: apartado 3a)		
Estudiante	**Argumentos que manifiestan los estudiantes.**	**Construcciones y mecanismos mentales que se asocian a las acciones indicadas.**
E8	Según la Figura 127: **Ar1E8P3a**: Transforma una ELH despejando una variable en términos de la otra. **Ar2E8P3a**: Escribe el CSELH como el gráfico de una función lineal.	**Ar1E8P3a** y **Ar2E8P3a** da cuenta trasformar una ELH en una relación de dependencia entre dos variables evidencia una construcción p*roceso* del gráfico de una función lineal.

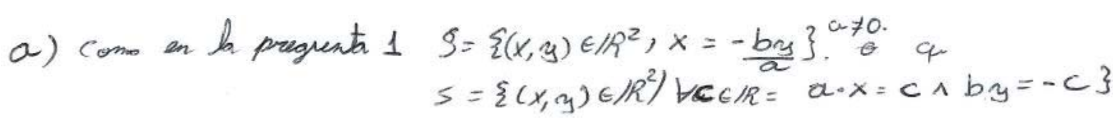

a) Los pares $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen la ecuacion son de la forma $ax+by=0 \Rightarrow ax=-by \Rightarrow (1)\ -\frac{a}{b}x = y$ si $b \neq 0$

(2) si $b = 0$: $ax = -by \Rightarrow ax = 0 \Rightarrow x = 0$

$S = \{(x,y) \,/\, -\frac{a}{b}x = y\}$

Figura 127: Respuesta de **E8** a la pegunta 3a)

E9	Según la Figura 128: **Ar1E9P3a**: Transforma una ELH despejando una variable en términos de la otra. **Ar2E9P3a**: Escribe el CSELH desde la relación de separando la ELH.	**Ar1E9P3a** y **Ar1E9P3a** da cuenta de una *concepción proceso* de CSELH.


a) Como en la pregunta 1 $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x = -\frac{by}{a}\}$. $a \neq 0$. ó

$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \forall c \in \mathbb{R}: a\cdot x = c \wedge by = -c\}$

Figura 128: Respuesta de **E2** a la pegunta 3a)

Comentarios a lo planteado por E8, E9 en la Pregunta 3, apartado 3a)

E8 y **E9**, escriben el conjunto solución de una ELH, considerando la transformación de la ELH para establecer una relación entre las variables y dar cuenta así de todas las soluciones de la ELH. Ambos estudiantes establecen restricciones a los parámetros de la ELH, lo que da cuenta de una *concepción proceso* de (**R**-{0}, $\cdot_R$) como grupo.

Tabla N°53: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 3, apartado 3b), y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

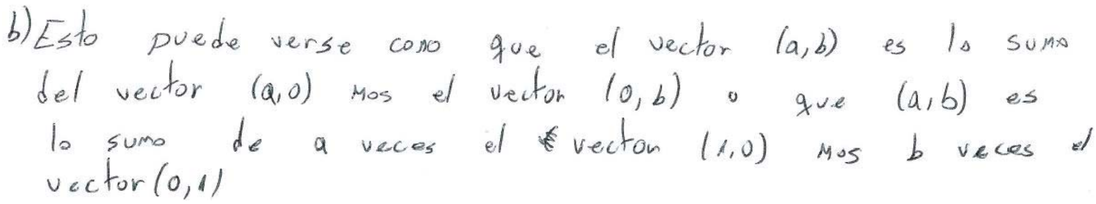
<table>
<tr><th colspan="3">Pregunta 3: apartado 3b)</th></tr>
<tr><th>Estudiante</th><th>Argumentos que manifiestan los estudiantes.</th><th>Construcciones y mecanismos mentales que se manifiestan desde las acciones.</th></tr>
<tr><td>E8</td><td>Según Figura 129:
Ar3E8P3b: Reconoce que un vector de $\mathbf{R}^2$ se puede escribir en base a otros vectores fijos de éste.</td><td>Ar3E8P3b muestra una concepción proceso de cartesiano $\mathbf{R}^2$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">

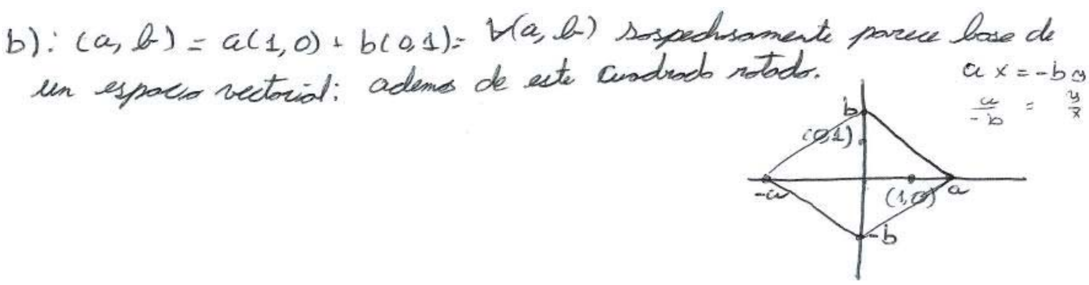
Figura 129: Respuesta de E8 a la pegunta 3b)</td></tr>
<tr><td>E9</td><td>Según Figura 130:
Ar3E9P3b: Reconoce en la ecuación la base canónica del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$.</td><td>El Ar3E9P3b muestra una concepción proceso de $\mathbf{R}^2$ espacio vectorial.</td></tr>
<tr><td colspan="3">

Figura 130: Respuesta de E9 a la pegunta 3b)</td></tr>
</table>

Comentarios a lo planteado por E8 y E9 a la pregunta 3, apartado 3b)

E1 da cuenta de una *concepción proceso* de cartesiano $\mathbf{R}^2$ al interpretar la ecuación dada como la relación de un vector de $\mathbf{R}^2$con otros dos vectores fijos. **E2** muestra una *concepción proceso* del espacio vectorial, al reconocer en los vectores (1,0) y (0,1) la base canónica de dicho espacio.

Tabla N°54: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 3, apartado 3c), y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

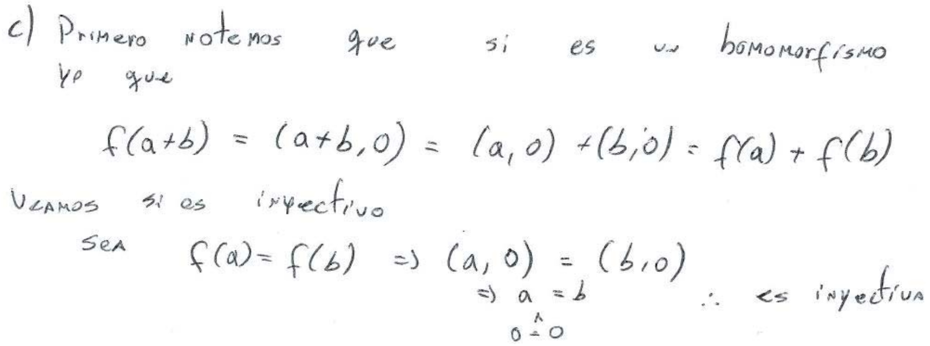
<table>
<tr><th colspan="3">Pregunta 3: apartado 3c)</th></tr>
<tr><th>Estudiante</th><th>Argumentos que se manifiestan los estudiantes.</th><th>Construcciones y mecanismos mentales que se manifiestan desde las acciones.</th></tr>
<tr><td>E8</td><td>Según la Figura 131:
Ar4E8P3c: Verifica si f es un homomorfismo.</td><td>Ar4E8P3c evidencia una concepción objeto de función.</td></tr>
<tr><td colspan="3">


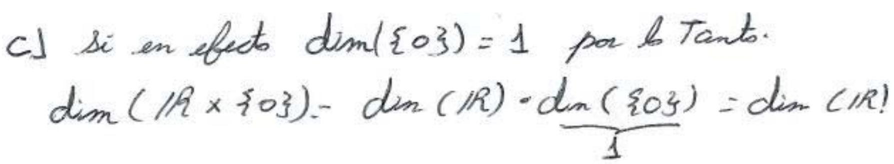
Figura 131: Respuesta de E1 a la pegunta 3c)</td></tr>
<tr><td>E9</td><td>Según Figura 132:
Ar4E9P3c: Determina la dimensión de espacios vectoriales, mostrando una confusión en el teorema de la dimensión.</td><td>Si bien desde Ar4E9P3c se deja de manifiesto una confusión en relación a la dimensión de un espacio vectorial, el comparar la dimensión de R y R×{0} evidencia una concepción acción de espacio vectorial.</td></tr>
<tr><td colspan="3">


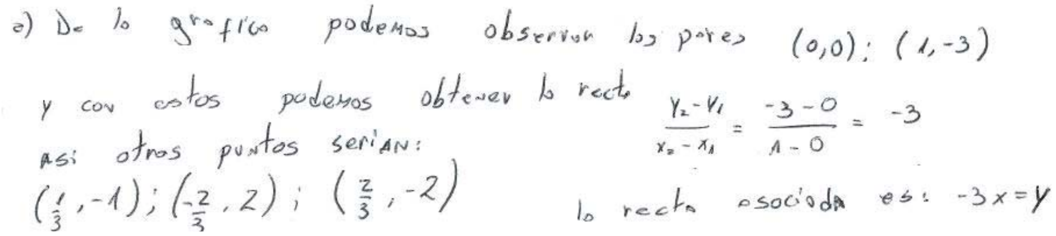
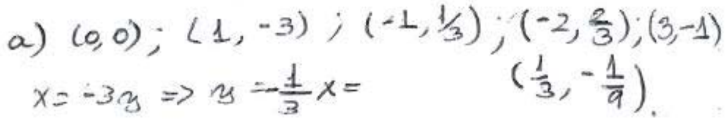
Figura 132: Respuesta del estduiante E9 a la pegunta 3c)</td></tr>
</table>

Comentarios a lo planteado por E8 y E9 a la Pregunta, apartado 3c)

Se observa, en los argumentos de la Tabla N°54, que el **E8** da cuenta de una *concepción objeto* de función cuando relaciona **R** y **R**×{0} desde un homomorfismo y, además, relaciona **R** y **R**×{0} desde una biyección. Por otro lado el **E9** evidencia tiene una *concepción proceso* de espacio vectorial cuando compara la dimensión de los dos espacios vectoriales.

En la Tabla N° 55, N°56, N°57 y N°58 se presenta un análisis a las respuestas de **E8** y **E9** a la pregunta 4, del cuestionario 1.

Tabla N°55: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 4, apartado 4a), y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

Pregunta 4: apartado 4a)		
Estudiante	**Argumentos que manifiestan los estudiantes.**	**Construcciones y mecanismos mentales que se asocian a las acciones indicadas.**
E8	Según la Figura N°133: **Ar1E8P4a**: Determina la ecuación de la recta, desde dos puntos de ésta, para obtener más puntos.	**Ar1E8P4a** evidencia una *concepción proceso* de función lineal.
 a) De la grafica podemos observar los pares (0,0); (1,-3) y con estos podemos obtener la recta $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-3-0}{1-0}=-3$ así otros puntos serían: $(\frac{1}{3},-1);(-\frac{2}{3},2);(\frac{2}{3},-2)$ la recta asociada es: $-3x=y$ *Figura 133*: Respuesta de **E8** a la pegunta 4a)		
E9	Según la Figura 134: **Ar1E9P4a**: Determina la ecuación de la recta, desde dos puntos de ésta, para obtener más puntos.	**Ar1E9P4a** evidencia una *concepción proceso* de función lineal.
 a) $(0,0);(1,-3);(-1,\frac{1}{3});(-2,\frac{2}{3});(3,-1)$ $(\frac{1}{3},-\frac{1}{9})$. $x=-3y \Rightarrow y=-\frac{1}{3}x=$ *Figura 134*: Respuesta de **E9** a la pegunta 4a)		

Comentarios a lo planteado E8 y E9 en la Pregunta 4, apartado 4a)

E8 y **E9** evidencian una concepción proceso de función lineal determinan la ecuación asociada a la gráfica desde dos puntos de esta.

Tabla N°56: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 4, apartado 4b), y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

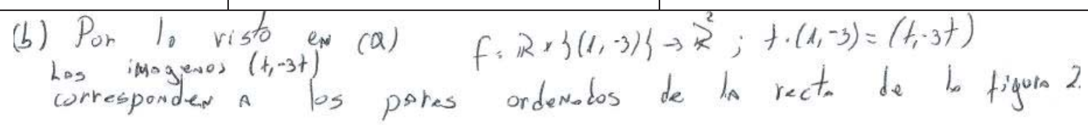
Pregunta 4: apartado 4b)		
Estudiante	**Argumentos que manifiestan los estudiantes.**	**Construcciones y mecanismos mentales que se manifiestan desde las acciones.**
E8	Según Figura 135: **Ar2E8P4b**: Asocia el recorrido de *f* con el gráfico de la gráfica de la Figura 2.	**Ar2E8P4b** muestra una concepción *proceso* de plano cartesiano.
 (b) Por lo visto en (a) $f:\mathbb{R}\times\{(1,-3)\}\to\mathbb{R}^2$; $t\cdot(1,-3)=(t,-3t)$ Los imagenes $(t,-3t)$ corresponden a los pares ordenados de la recta de la figura 2.		

Figura 135: Respuesta de **E8** a la pegunta 4b)		
E9	Según Figura 136: **Ar2E9P4b**: Relaciona a *f* con la gráfica de la función lineal.	**Ar2E9P4b** muestra una concepción *proceso* de plano cartesiano.
b) La ecuación de la figura 2 es $y=-\frac{1}{3}x$ que se puede escribir como un par de puntos $(-\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}x) = x\cdot(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $\forall x \in \mathbb{R}$ de aquí es claro que podemos reemplazar por la ecuac. $\frac{1}{3}x(1, -3)$. y como $\frac{1}{3}x \in \mathbb{R} \Rightarrow x(1,-3)$: es $\mathbb{R} \times \{(3,-1)\} \rightarrow \mathbb{R}$. con respecto a la gráfica es entonces la misma gráfica. *Figura 136*: Respuesta **E9** a la pegunta 4b)		

Comentarios a lo planteado por E8 y E9 a la pregunta 4, apartado 4b)

En general, considerando los argumentos que despliegan los estudiantes **E8** y **E9** se evidencia una *concepción proceso* del plano cartesiano.

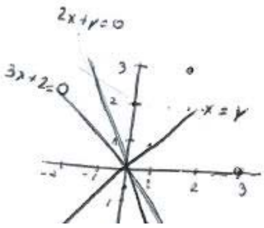
Tabla N°57: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 4, apartado 4c), y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

Pregunta 4: apartado 4c)		
Estudiante	**Argumentos que manifiestan los estudiantes**	**Construcciones y mecanismos mentales que se manifiestan desde las acciones.**
E8	Según la Figura 137: **Ar3E8P4c**: Asocia el recorrido de *f* como la gráfica de la Figura 2.	El **Ar3E8P4c** evidencia una *concepción proceso* de la función lineal.
los puntos (x,y) tales que x corresponde a la pre-imagen de la recta de la figura 2 y e y corresponde a la imagen de la recta de la figura 2 *Figura 137*: Respuesta del estduiante **E8** a la pegunta 4c)		
E9	Según Figura 138: **Ar3E9P4c**: Relaciona el recorrido de la función *f* con el conjunto generado por el vector (1,-3).	El **Ar3E9P4c** evidencia una *concepción proceso* de conjunto generador.
c) $y=-\frac{1}{3}x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, función decreciente olvido es sobre la función f. su recorrido es el generado por $<\{1,-3\}>$. *Figura 138*: Respuesta del estduiante **E9** a la pegunta 4c)		

Comentarios a lo planteado por E8 y E9 a la Pregunta 4, apartado 4c)

Se observa en las respuestas de la Tabla N°57, que **E8** y **E9** evidencian una *concepción proceso* del concepto de función al comparar la gráfica de una función lineal con el recorrido de una función f desde la forma que tienen ambos conjuntos.

Tabla N°58: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 4, apartado 4d), y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

<table>
<tr><th colspan="3">Pregunta 4: apartado 4d)</th></tr>
<tr><th>Estudiante</th><th>Argumentos que se manifiestan los estudiantes.</th><th>Construcciones y mecanismos mentales que se manifiestan desde las acciones.</th></tr>
<tr><td>E8</td><td>Según la Figura 139:
Ar4E8P4d: Representa gráficamente cada ELH.</td><td>Ar4E8P4d evidencia una concepción proceso de combinación lineal.</td></tr>
<tr><td colspan="3">
Geometricamente se puede ver como la ecuacion $3x+2y=0$ es combinacion lineal de los ecuacion $x+y=0$ e $2x+y=0$
Figura 139: Respuesta de E8 a la pegunta 4d)</td></tr>
<tr><td>E9</td><td>Según Figura 140:
Ar4E9P4d: Determina todas las solución de una ELH.

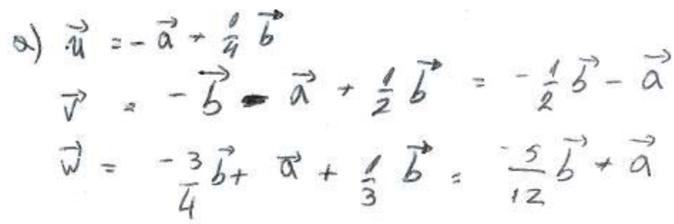
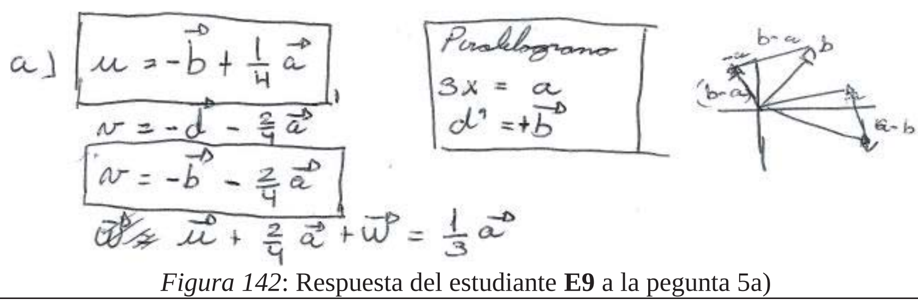
Ar5E9P4d: Relaciona soluciones de ELH´s que están en combinación lineal.</td><td>Ar4E9P4d evidencia una concepción objeto de CSELH y Ar5E94d da cuenta de una concepción objeto de operación binaria y una concepción proceso de cartesiano $\mathbf{R}^2$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">d) $x+y= \Rightarrow y=-x$ $\{(x,-x)\}\ \forall x\in\mathbb{R}$; $2x+y \Rightarrow y=-2x$ $\{(x,-2x)\}, \forall x\in\mathbb{R}$.
$\langle\{(x,-x)\}\rangle$ $\langle\{(x,-2x)\}\rangle$.
Entonces toda solucion de la ELH $3x+2y=0$ se puede escribir como suma soluciones de $x+y=0$ y $2x+y=0$ que estan generados por los vectores anteriores.
Figura 140: Respuesta de E9 a la pegunta 4d)</td></tr>
</table>

Comentarios a lo planteado por E8 y E9 a la Pregunta 4, apartado 4d)

Se observa en las respuestas de la Tabla N°58 que **E8** relaciona, desde la gráfica asociadas a las ELH's, el hecho de que una ELH sea combinación lineal de las otras, lo que evidencia una *concepción proceso* de combinación lineal. Por otro lado **E9** relaciona las soluciones de ELH´s que están en combinación lineal, lo que da cuenta de una *concepción proceso* de cartesiano $\mathbf{R}^2$.

En las Tablas N°59 y N°60 se presenta un análisis a las respuestas de **E8** y **E9** a la pregunta 5 del cuestionario 1.

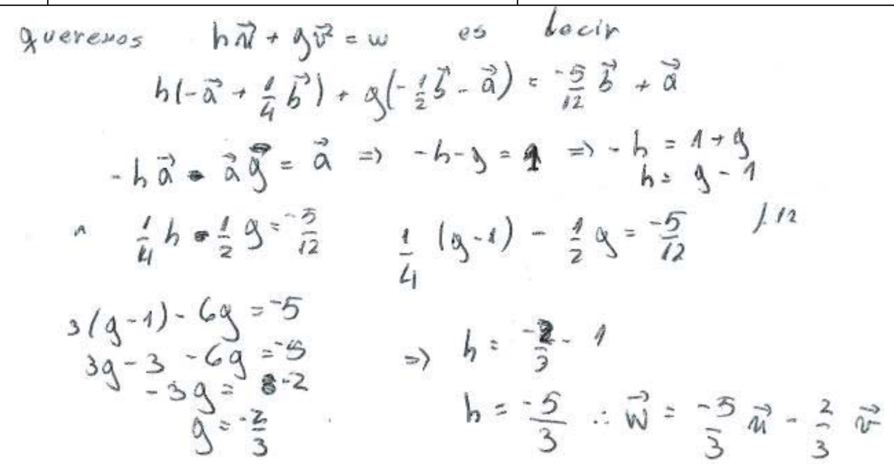
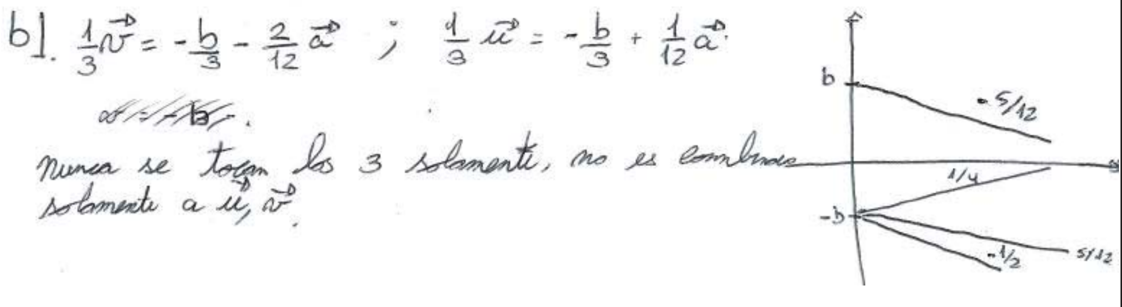
Tabla N°59: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 5, apartado 5a), y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

Pregunta 5: apartado 5a)		
Estudiante	**Argumentos que manifiestan los estudiantes.**	**Construcciones y mecanismos mentales que se asocian a las acciones indicadas.**
E8	Según la Figura 141: **Ar1E8P5a**: Escribe ecuaciones con los vectores asociados a la Figura del problema, utilizando el método del triángulo.	**Ar1E8P5a** evidencia una *concepción proceso* del plano vectorial.
 *Figura 141*: Parte de respuesta de **E8** a la pegunta 5a)		
E9	Según la Figura 142: **Ar1E2P5a**: Escribe ecuaciones con los vectores asociados a la Figura del problema, desde las relaciones ya establecidas utilizando el método del triángulo.	**Ar1E2P5a** evidencia una *concepción proceso* del plano vectorial y de operación binaria.
 *Figura 142*: Respuesta del estudiante **E9** a la pegunta 5a)		

Comentarios a lo planteado por E8 y E9 a la Pregunta 5, apartado 5a)

E8 y E9 dados los argumentos que manifiestan, dejan en evidencia una concepción *proceso* del plano vectorial. Además utilizan, en general, el método del triángulo para obtener la suma de dos vectores. Una vez establecida la relación fundamental entre los vectores, se opera algebraicamente con los términos de la ecuación vectorial.

Tabla N°60: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 5, apartado 5b), y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

Pregunta 5: apartado 5b)		
Estudiante	**Argumentos que manifiestan los estudiantes.**	**Construcciones y mecanismos mentales que se asocian a las acciones indicadas.**
E8	Según la Figura 143: **Ar1E1P5b**: Escribe ecuaciones con los vectores asociados a la Figura del problema, desde las relaciones ya establecidas utilizando el método del triángulo.	**Ar1E1P5b** evidencia una *concepción proceso* de combinación lineal.
 *Figura 143*: Parte de respuesta de **E8** a la pegunta 5b)		
E9	Según la Figura 144: **Ar1E2P5a**: Establece que no es posible la combinación lineal que se solicita.	**Ar1E2P5a** da cuenta de una *concepción acción* de combinación lineal.
 *Figura144*: Respuesta de **E9** a la pegunta 5b)		

Comentarios a lo planteado por E1, E2, E3, E4 y E5 en la Pregunta 5, apartado 5a)

E8 al manipular ecuaciones con vectores evidencia una concepción *proceso* de combinación lineal. **E9**, desde el método del triángulo, establece las relaciones que son aplicación directa de dicha regla pero no logra combinarlas para responder a lo solicitado, lo que denota una concepción *acción* de combinación lineal.

En la Tabla N°61 se presenta un análisis a las respuestas de **E8** y **E9** a la pregunta 6 del cuestionario 1.

Tabla N°61: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 6 y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

Pregunta 6		
Estudiante	**Argumentos que manifiestan los estudiantes.**	**Construcciones y mecanismos mentales que se asocian a las acciones indicadas.**
E8	Según la Figura 145: **Ar1E8P6**: Identifica elemento neutro para la adición de vectores. **Ar2E8P6:** Prueba las propiedades asociadas a la operación binara externa.	**Ar1E8P6** y **Ar2E8P6** evidencia una *concepción proceso* espacio vectorial.

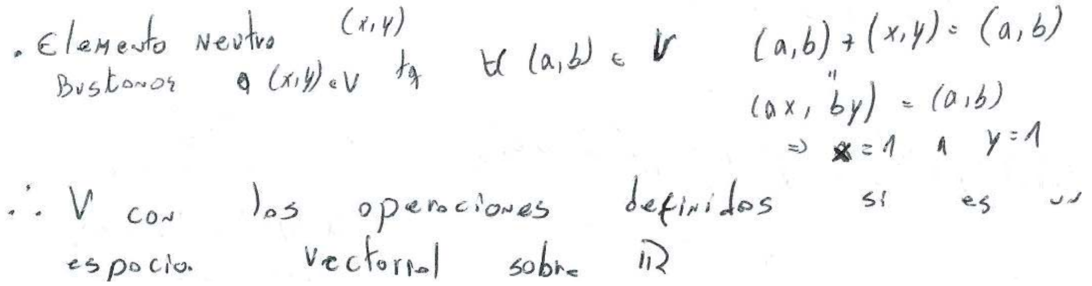


Figura 145: Respuesta de **E8** a la pegunta 6)

E9	Según la Figura 146: **Ar1E9P6**: Identifica neutro para la adición de vectores. **Ar2E8P6:** Prueba las propiedades asociadas a la operación binara externa.	**Ar1E9P6** evidencia una *concepción proceso* de espacio vectorial.

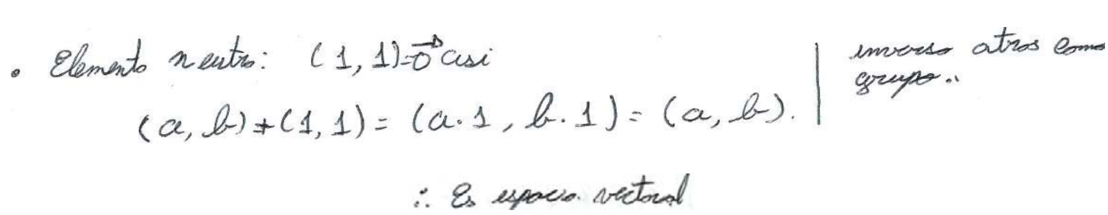


Figura 146: Respuesta de **E9** a la pegunta 6)

Comentarios a lo planteado por E8 y E9 a la Pregunta 6

E8 y **E9** dados los argumentos que manifiestan, dejan en evidencia una concepción *proceso* espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ al identificar elemento neutro e inverso además de verificar las propiedades de espacio vectorial.

4.3.3.- Algunos hallazgos respecto de las construcciones y mecanismos mentales dispuestos en la DG para $\mathbf{R}^2$ desde el caso 1 y caso 2.

Como se planteó en el capítulo 3, la viabilidad de la DG teórica que se propuso para construir cognitivamente el espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ se sustenta fundamentalmente en la construcción de *procesos*, ya sea *coordinando* dos *procesos*, *desencapsulando* un *objeto* o *revirtiendo* un *proceso*, en todos los casos para construir un nuevo *proceso*, donde el uso de parámetros, cuantificadores, conectivos lógicos y variables está asociado con los *mecanismos mentales* que dan paso a dichas construcciones mentales. Por otro lado cabe hacer notar que la activación de estos *mecanismos mentales* está sujeta al quehacer del estudiante o desde los que éste puede manifestar a la luz de las tareas, problemas o actividades que se le presentan.

Veamos, por ejemplo, cómo desde la pregunta 1 del cuestionario 1 es posible remitirnos, desde algunas de las respuestas de los estudiantes, a algún sector de la DG para evidenciar alguna concepción del estudiante respecto de algún concepto matemático o bien dar cuenta de alguna construcción o mecanismo mental que entra en juego.

E4 del caso 1, evidencia una concepción *objeto* del plano vectorial, pues para escribir el conjunto de todas las solución de la ELH, $3x+5y=0$, desencapsula dicha construcción *objeto* en la construcción *proceso* vector generador, como se aprecia en la Figura 147, donde escribir un vector desde dos pares ordenados actúa como *mecanismo* de *desencapsulación*.

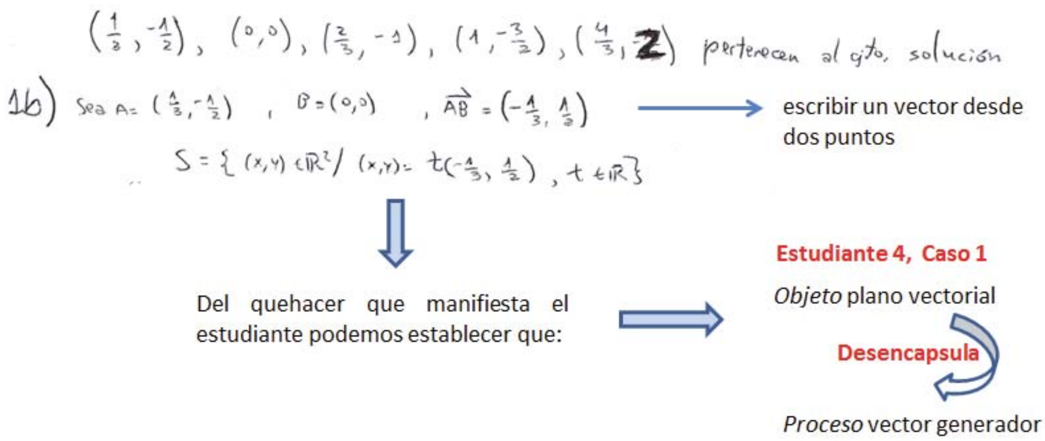


Figura 147: Sobre la *desencapsulación* del *objeto* plano vectorial en la escritura del CSELH

Por otro lado, podemos afirmar que la *acción* asociar un par de números reales *interioriza* en el *proceso* separar una ELH en otras dos ecuaciones, donde el uso de un parámetro y un conectivo lógico actúan como *mecanismo* de *interiorización*. Lo anterior se aprecia en la Figura 148, donde **E1** del caso 1 separa la ELH en otras dos ecuaciones para reescribir por comprensión el conjunto solución de la ELH.

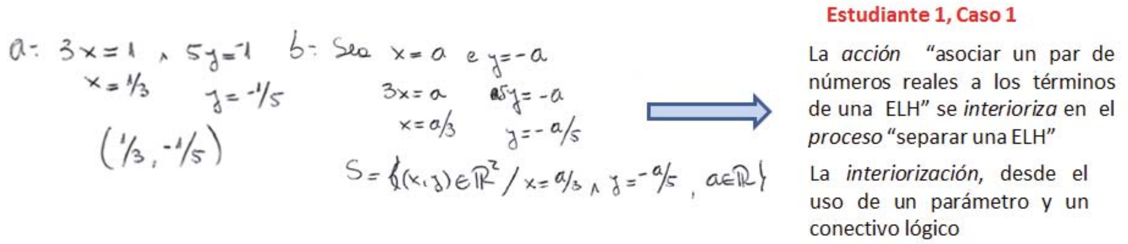


Figura 148: Interiorización de una acción en un proceso, por parte de **E1** del caso 1

Otro aspecto a constatar, según se evidencia en la Figura 149, es que la *construcción proceso* todas las soluciones se puede *revertir* en la *construcción proceso* soluciones inversas aditivas, el cual se *coordina* con el *proceso* recta numérica para obtener el *proceso* recta vectorial.

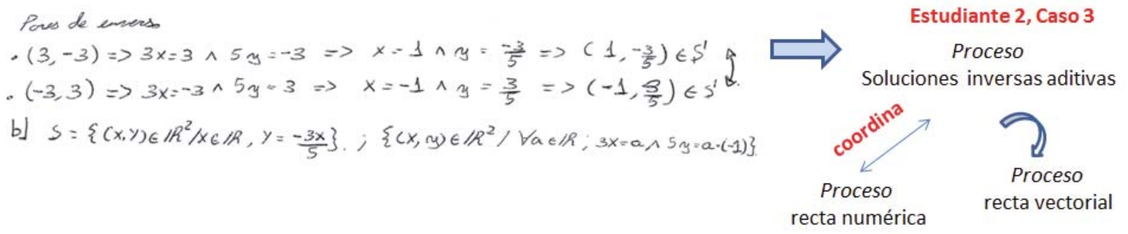


Figura 149: Coordinación de dos procesos para construir el proceso recta vectorial

Los hallazgos anteriores ponen de relieve la importancia de la *construcción acción*, que se ha considerado como punto de partida en la DG, y que está en sintonía con el procedimiento de la tabla N° 61. Es importante hacer notar que ésta no forma parte del repertorio de los estudiantes.

Tabla N° 62: La interiorización de una acción en un proceso

El *proceso* descomponer una ELH desde la *acción* asociar un par de números reales, uno el inverso aditivo del otro, a los términos de una ELH para obtener una solución de ésta, pone de relieve a **R** como cuerpo.	
$3x+5y=0+0=4+(-4)=(-3)+3$ $3x=4 \wedge 5y=-4 \Rightarrow \left(\frac{4}{3},\frac{-4}{5}\right)$ Uso de conectivos lógicos Desde el uso de un parámetro $S=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 / 3x+5y=0\}$ $S=\left\{\left(\frac{a}{3},\frac{-a}{5}\right)/ a\in \boldsymbol{R}\right\}=\left\{a\cdot\left(\frac{1}{3},\frac{-1}{5}\right)/ a\in \boldsymbol{R}\right\}$	

Para un estudiante, el concebir la solución de una ELH como un par de números reales da cuenta de una concepción *acción* de la solución de una ELH, aspecto que se pone de manifiesto en la Figura 150; evidencia que se obtuvo del proceso indagatorio que se realizó con **E6** y **E7** del caso3 en un curso taller de la U3, lo que se indicó en el apartado 3.5.3.1 página 58 y en CD delos anexos se puede encontrar más detalle del desempeño de estos estudiantes en las distintas actividades. Sin embargo, desde lo que se propone en la DG y lo que se rescata del análisis al trabajo de los estudiantes del caso 1 y 2 en el cuestionario 1, es necesario tener una *concepción objeto* de solución de una ELH, para poder avanzar a la *construcción objeto* espacio vectorial $\mathbf{R}^2$.

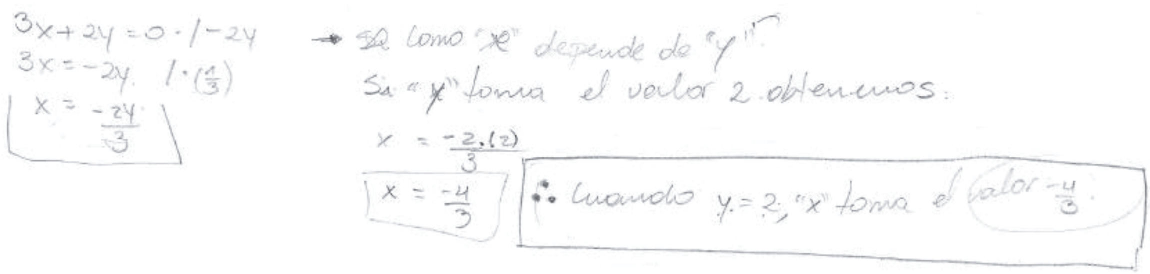


Figura 150: Respuesta de **E7** caso 3 en un cuestionario exploratorio

A continuación, como se aprecia en la Figura 151, se evidencia por parte del **E3** una *construcción objeto* de la solución de una ELH. Más aún, la construcción *proceso* recta vectorial se coordina con la construcción *proceso* ecuación de pares ordenados para obtener la construcción *proceso* diagonal de un paralelogramo.

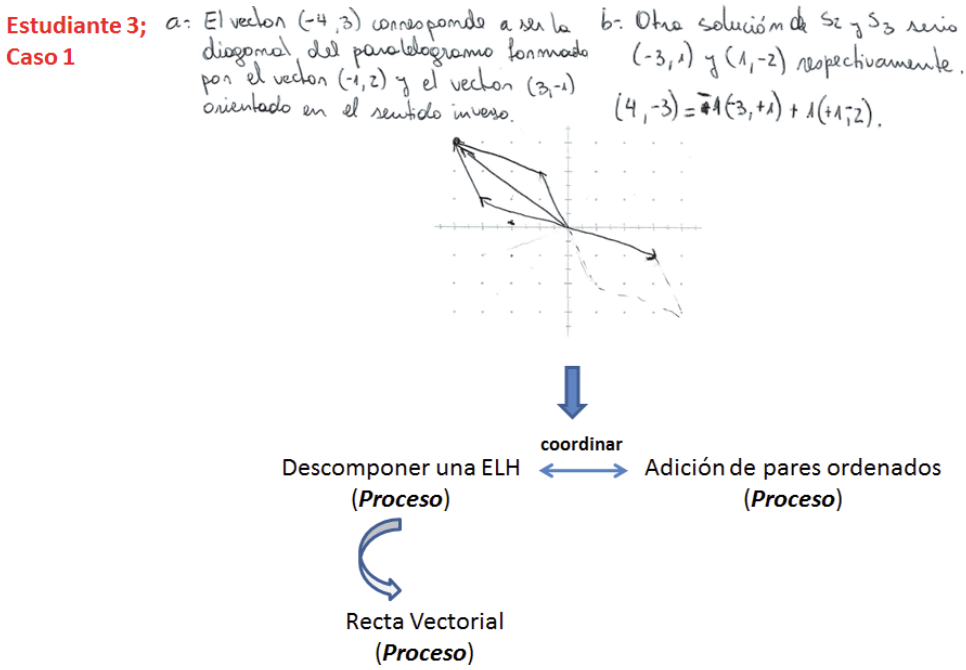


Figura 151: la *coordinación* de dos *procesos*

Finalmente, a la luz de lo que propone la DG y de los antecedentes que se han indicado en los párrafos anteriores, se vuelve a insistir en lo necesario de una *construcción objeto* de la solución de una ELH, para dar paso a la *construcción esquema*. En la Figura 152 una mirada desde la teoría APOE de las concepciones que podría tener un estudiante del concepto SELH.

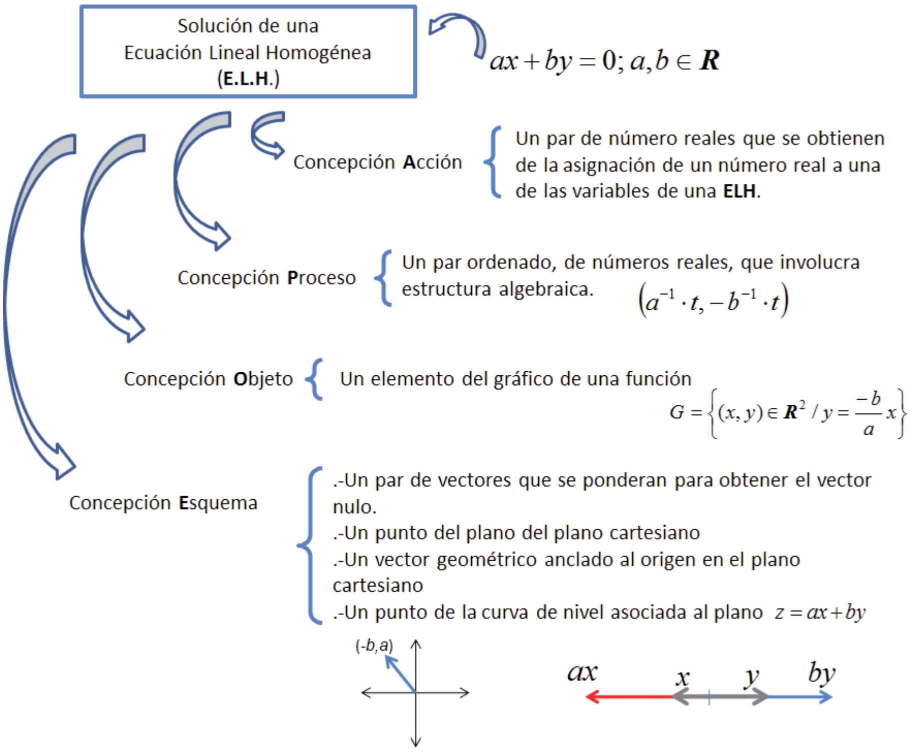


Figura 152: Sobre posibles concepciones de la solución de una ELH

4.3.4.- Diseño y Aplicación de entrevistas para mirar la encapsulación del concepto del espacio vectorial desde los ajustes que se sugieren de la aplicación del cuestionario

Habiéndose aplicado el cuestionario a los estudiantes del caso 1 y 2, para indagar en las construcciones y mecanismos mentales que inciden en la construcción cognitiva del concepto espacio vectorial $\mathbf{R}^2$, se hace necesario diseñar y aplicar una entrevista para indagar en profundidad los distintos matices de las respuestas que dieron los estudiantes a las preguntas del cuestionario, lo que se indicó en el apartado 3.5.1.1. capítulo 3, fundamentalmente lo referido a la *construcción objeto* del CSELH, además, de aquellos aspectos que el cuestionario no contempló y que pueden ayudar a dar cuenta de la *encapsulación* de una *construcción proceso* en la *construcción objeto* espacio vectorial $\mathbf{R}^2$.

Por ejemplo, indagar si la transformación de una ELNH en una ELH actúa como mecanismo de *desencapsulación* del *objeto* plano cartesiano en algún *proceso* o bien, establecer si comparar el CSELNH con el CSELH promueve la *coordinación* de *procesos* para obtener el *proceso* cartesiano $\mathbf{R}^2$ y, por otro lado, constatar si la comparación de estructura de subconjuntos de $\mathbf{R}^2$ consigo mismo, actúa como *mecanismo* de *encapsulación* para que el *proceso* cartesiano $\mathbf{R}^2$ se *encapsule* en el *objeto* espacio vectorial $\mathbf{R}^2$.

4.3.4.1 Preguntas para realizar una entrevista e indagar en la *encapsulación* de la *construcción proceso* cartesiano $\mathbf{R}^2$ en la *construcción objeto* espacio vectorial $\mathbf{R}^2$

Las cuatro preguntas que se consideraron para la entrevista a **E4** y **E9** tuvieron como objetivo avanzar en dos direcciones. Por un lado, profundizar en los distintos aspectos que manifestaron los estudiantes, antes mencionados, en las respuestas al cuestionario 1; en particular lo que dice relación con la importancia de la *construcción objeto* CSELH y su relación con el CSELNH, para avanzar en la *construcción proceso* cartesiano $\mathbf{R}^2$, dado que las preguntas del cuestionario1 se enfocaron fundamentalmente a considerar sólo ELH, y, en la *desencapsulación* del plano cartesiano desde la manipulación algebraica de una ELNH. Por otro lado, indagar en la encapsulación de la *construcción proceso* cartesiano $\mathbf{R}^2$ en la *construcción objeto* espacio vectorial $\mathbf{R}^2$. Se deja en claro, desde ya, como se mencionó en el apartado 5.1.1.1.2 que en la trascripción de la entrevista la letra **I** denotara al investigador.

1) Si (-3,2) es una solución de una Ecuación Lineal Homogénea (ELH)
a) Determine dicha ELH. Explique
b) Si en el Conjunto Solución de la ELH (CSELH) de la ecuación anterior se define la suma usual de pares ordenados. ¿Será posible, con dicha operación y la solución dada, obtener todas las demás soluciones del CSELH? Explique.
c) Piense ahora sólo en la multiplicación usual de un escalar por un par ordenado. ¿Será posible a partir de la solución (-3,2) obtener todas las demás soluciones de la ELH con dicha operación? Explique
d) Si $S = \{(3a,-2a) \in \mathbf{R}^2 / a \in \mathbf{R}\}$, ¿es S todo $\mathbf{R}^2$? Explique
e) Para dos elementos cualesquiera del CSELH, ¿qué puede decir de los escalares α y β en la ecuación $\alpha(a,b)+\beta(c,d)=(0,0)$? Explique geométricamente.

2) Dada la Ecuación Lineal No Homogénea (ELNH) $5x+3y=5$ y S' su conjunto solución
a) Trasforme dicha ecuación a una ELH. Explique geométricamente el significado de dicho cambio.
b) ¿Será (S', +, $\cdot_{\mathbf{R}}$) un **R** espacio vectorial con las operaciones usuales de $\mathbf{R}^2$? Explique
c) Defina operaciones distintas a las usuales de $\mathbf{R}^2$ para que (S', +, $\cdot_{\mathbf{R}}$) permita obtener todas las soluciones a partir de un solo elemento. Explique

3) Considere las dos operaciones usuales de $\mathbf{R}^2$ y dos elementos no nulos de los conjuntos solución de dos ELH no equivalentes. Será posible obtener todos los elementos de $\mathbf{R}^2$ a partir de los dos elementos anteriores sólo con la adición usual de pares ordenados. Explique.

4) Existirá un sub-espacio vectorial de $\mathbf{R}^2$ que contenga los puntos A(2,5) y B(5,5). Explique.

Se deja en claro que si bien en 1d) se entrega información de 1c) dado que es una entrevista ello no es relevante. En la en la Tabla N°63 se presenta a grandes rasgos lo que persigue cada una de las preguntas y sus respectivos apartados.

Tabla N°63: La interiorización de una acción en un proceso.

Pregunta	Sobre los aspectos que se persiguen indagar
1	a) Procura indagar si al determinar la ELH a partir de una solución particular evidencia si la *concepción proceso* SELH se *revierte* en el *proceso* todas las soluciones de una ELH o bien en el *proceso* solución de una ELH.
	b) Procura indagar si al obtener aditivamente todas las soluciones del CSELH desde una solución particular evidencia una concepción *proceso* de (S, +) como grupo y de **R** como cuerpo.
	c) Procura indagar si al obtener ponderando por un escalar real todas las soluciones del CSELH a partir de una solución particular, evidencia una *concepción proceso* de (S, $\cdot_{\mathbf{R}}$) y de **R** como cuerpo.
	d) Procura indagar si al determinar si un conjunto de pares ordenados es todo $\mathbf{R}^2$ evidencia una *concepción proceso* de cartesiano $\mathbf{R}^2$.
	e) Procura indagar si al analizar las posibilidades de los escalares de una ELH de pares ordenados y la acción elaborar un argumento geométrico evidencia una *concepción objeto* de CSELH.
2	a) Procura indagar si al transformar una ELNH en una ELH evidencia que el *objeto* plano cartesiano se desencapsula en el *proceso* traslación ejes coordenados. b) Procura indagar al verificar si el CSELNH con las operaciones usuales de $\mathbf{R}^2$ es un espacio vectorial evidencia una *concepción proceso* de Espacio vectorial $\mathbf{R}^2$. c) Procura indagar si al definir operaciones no usuales en el CSELNH procura *coordinar proceso* traslación de ejes coordenados con el *proceso* operación binaria para obtener el *proceso* cartesiano $\mathbf{R}^2$ y el comparar estructura de espacio vectorial de subconjuntos de $\mathbf{R}^2$ evidencia una *concepción objeto* de espacio vectorial.
3	Procura indagar si al obtener aditivamente todos los elementos de $\mathbf{R}^2$ a partir de dos elementos evidencia una *concepción objeto* de espacio vectorial.
4	Procura indagar si al determinar si dos elementos de $\mathbf{R}^2$ pertenecen a un sub-espacio de éste evidencia una *concepción objeto* de espacio vectorial $\mathbf{R}^2$.

4.3.4.2.- Sobre las entrevistas a E4 caso 1 y E9 caso 2

Antes de presentar aquellos aspectos más relevantes de las entrevistas a los estudiantes **E9** y **E4**, orden en que se llevaron a cabo dichas entrevistas, se hace notar que el punto de partida de ambas entrevistas difiere en que a **E4** se le pidió que obtuviera la ELH a partir de una solución de ésta y a **E9** se le pidió que determinara una solución de la ELH $3x + 5y = 0$ con x e y en **R**, para luego mantener la misma ronda de preguntas.

4.3.4.2.1.- Sobre los distintos aspectos que se manifiestan en la entrevista al E9 Caso 2

Como ya se indicó en el párrafo anterior, en la entrevista a **E9** se comienza preguntando por la posibilidad de obtener todas las soluciones de la ELH $3x + 5y = 0$ a partir de una solución fija de la ELH y utilizando sólo la adición usual de $\mathbf{R}^2$. Para ello se pide al **E9** que determine una solución de la ELH quien, como se aprecia en la Figura 153, expresa una de las variables en términos de la otra y a continuación escribe un par ordenado cuyas componente quedan expresadas en términos de una de las incógnitas para luego expresar dicho par como la ponderación de una solución por un escalar cualesquiera.

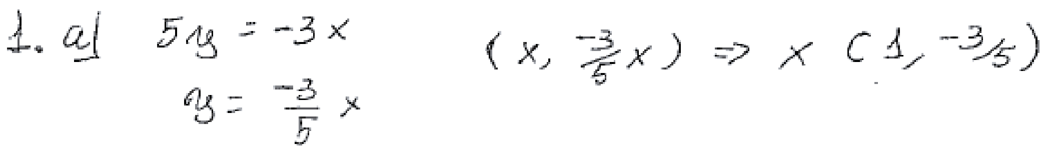


Figura 153: Determinación de una solución para la ELH $3x+5y = 0$

Lo realizado por **E9**, para determinar una solución de la ELH, pone de manifiesto la *coordinación* de la *construcción proceso* todas las soluciones de una ELH con la *construcción proceso* operación binaria para dar paso a la *construcción proceso* ponderación por escalar. Por otro lado, en el fragmento 1 de la entrevista a **E9**, que se presenta en la Tabla N°64, se aprecia como éste declara que el CSELH es un espacio vectorial unidimensional. Lo que evidencia una concepción *objeto* del concepto espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ al reconocer, en el conjunto que genera la solución $\left(1, \frac{-3}{5}\right)$, un espacio vectorial de dimensión 1.

Tabla N°64: Fragmento 1 de la entrevista a **E9**, obtener a todos los elementos del CSELH desde la adición de soluciones del CSELH.

1a) Determine una solución de la ELH $3x+5y=0$ y luego explique si es posible a partir de ese elemento obtener a todos los elementos del CSELH.

E9: …bueno esto es un poco por media (haciendo alusión a la matemática de enseñanza media)…uno sabe que puede definir un estilo de ecuación de la recta aquí, entonces uno sabe que esta recta es un espacio vectorial de dimensión unidimensional con esta suma que había definido antes, entonces si yo sumo dos soluciones el resultado sigue siendo una solución de aquí.
E9: …ehhh yo diría que sí…puedo tomar un elemento y definir como una base y puedo definir un espacio vectorial a partir de esa base. Y eso puede ser la solución de todos los de este tipo.
I: A partir de ese elemento y sólo con la adición Ud. Podría obtener todos los elementos del CSELH
(Se vuelve insistir en que sólo se puede usar la adición y un elemento del CSELH)
E3: Sí, lo sumo a él con el mismo y obtengo otro y nuevamente e incluso puedo sumar fracciones de el mismo.
I: Si al sumar un elemento consigo mismo obtengo un nuevo elemento y sigo obteniendo nuevos elementos con este último, ¿podrá obtener todos los elementos del CSELH? (al parecer no se ha entendido la pregunta, piensa un rato y luego se da un contraejemplo)
E3: …en efecto cumple… pero no puedo expresarlo como suma de éste varias veces…entonces no puedo.

1. a) $5y=-3x$ $\quad (x, \frac{-3}{5}x) \Rightarrow x\,(1, -3/5)$.

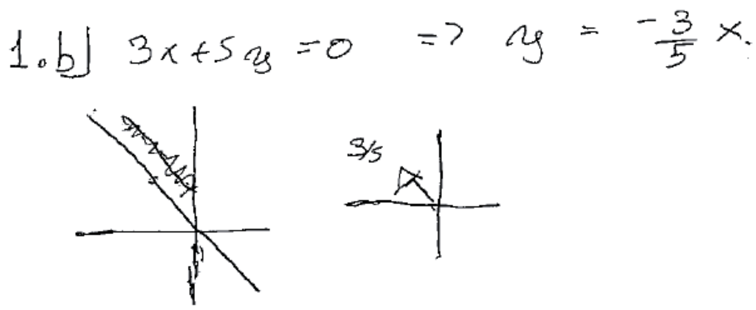
$y = \frac{-3}{5}x$ $\quad (1/2, -3/10)$.

$\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad \therefore$ No es posible este último ser expresado como suma de $(1, -3/5)$.

Lo que manifiesta **E9**, en la Tabla N°64, evidencia que el asociar la ELH con la ecuación de una recta procura *coordinar* la *construcción proceso* CSELH con la *construcción proceso* gráfica de una función lineal en la *construcción proceso* recta vectorial. Además, da evidencia de la *construcción proceso* todas las soluciones y la *construcción proceso* ponderación de una solución por un escalar. Por otro lado, obtener todas las soluciones del CSELH a partir de un elemento de este procura *coordinar* la *construcción proceso* suma de soluciones con la *construcción proceso* ponderación de una solución por un escalar en la *construcción proceso* álgebra de soluciones.

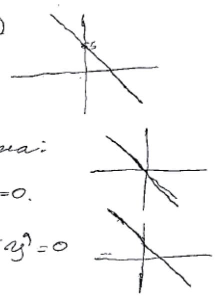
Si bien **E9**, al enfocarse en la idea de que el CSELH con las operaciones usuales de $\mathbf{R}^2$ es un espacio vectorial, no logra percatarse de que la pregunta apunta a considerar sólo una operación binaria, la adición usual de $\mathbf{R}^2$, finalmente, a través de un contraejemplo se da cuenta que no es posible tal cometido. En la Tabla N°65 se presenta un fragmento 2 de la entrevista a **E9**.

Tabla N°65: Fragmento 2 de la entrevista a **E9**, obtener a todos los elementos del CSELH desde la ponderación de una solución del CSELH por un escalar.

1b) Si pensamos ahora sólo en la multiplicación de una solución por un escalar, ¿se pueden obtener todos los elementos del CSELH a partir de un solo elemento?
E9: Con la multiplicación por escalar tengo lo que yo llamaba fracciones del primero…y tengo en particular todas las fracciones y estas sí pueden ser sumadas…y sí tendría todos los elementos de la solución de esta ecuación. En realidad no tendría más que decir, como es una recta… **I**: ¿Cómo una recta?, ¿eso quiere decir que es posible mirarlo geométricamente? **E9**: Claro **I**: ¿Ud. lo podría explicar? **E9**: Bueno tenemos esta ecuación…es cosa de buscar la relación entre *x* e *y* (despeja, escribe una ecuación y luego grafica considerando la recta vectorial) **E9**: Bueno, plano cartesiano (Traza dos rectas perpendiculares) con una recta de -3/5 de pendiente…voy hacer solo con la pendiente que va decreciendo… toca en cero en realidad (había dibujado la recta afín). I: Puede rayar, no se preocupe **E9**: Sé que la pendiente no es -3/5 pero esa es la idea (se refiere a la que la gráfica no representa una recta vectorial con la pendiente que indica…entonces tengo este vector (el que obtuvo del par ordenado todas las soluciones) que me daría como la dirección en el fondo. **I**: Dibuje uno cualesquiera **E9**: Dibuja el vector que está en dirección opuesta al (1, -3/5) **E9**: Entonces por un escalar me va a expandir o contraer el vector y eso es lo que me hace a multiplicación por escalar en $\mathbf{R}^2$ I: Entonces con la multiplicación puede determinar a todos **E9**: Sí, con la pura multiplicación…pues la multiplicación la puedo expresar como combinación de sumas…


Asociar al plano de la geometría euclideana dos líneas rectas perpendiculares para describir gráficamente la ELH desde una línea recta y la pendiente que tiene asociada, da cuenta de la *desencapsulación* del *objeto* plano cartesiano en el *proceso* recta vectorial. Además, relacionar una solución del CSELH con un vector de la recta vectorial evidencia una *concepción proceso* de plano vectorial. En la Tabla N°66 se presenta un fragmento 3 de la entrevista a **E9**.

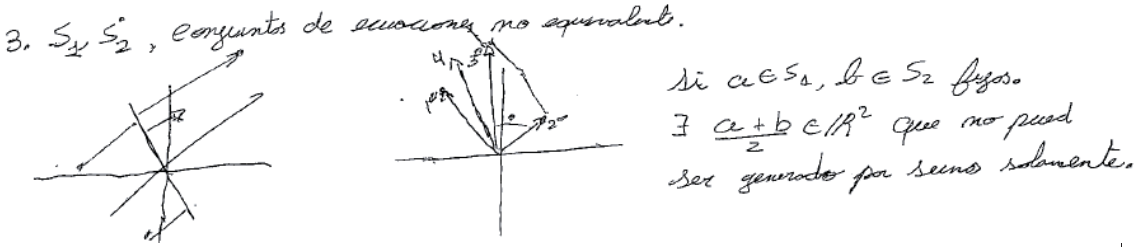
Tabla N°66: Fragmento 3 de la entrevista a **E9**, transformar una ELNH en una ELH y comparar estructura algebraica en los respectivos conjuntos solución.

<table>
<tr><td colspan="2">2) Dada la Ecuación Lineal No Homogénea (ELNH) $5x+3y=5$ y S' su conjunto solución, transforme dicha ecuación en una ELH.</td></tr>
<tr><td>El E9 escribe la ELH homogénea asociada a la ELNH y desde ahí interpreta geométricamente la ELNH, asumiendo que la recta afín es la traslación de la recta vectorial. Luego trasforma algebraicamente la ELNH en una ELH desde un cambio de variable. En primera instancia utiliza la variable z para reemplazar y-1, se le sugiere que podría utilizar y' pensando en que el cambio de variable puede sugerir algo, a lo cual el E9 acepta aludiendo a la traslación del eje Y.</td><td>2) $3x+5y=0$ (Por mientras)
Recuperamos $\underline{S}$ $T_p(\mathbb{R}^2)$
Para llegar a una homogénea:
$3x+5y=5 \Rightarrow 3x+5y-5=0.$
$\left.\begin{array}{l}3x+5(y-1)=0.\\ y-1=y'\end{array}\right\} \Rightarrow 3x+5y'=0$
</td></tr>
<tr><td colspan="2">E9: Para llegar a una homogénea puedo decir que… (aplica el inverso aditivo de 5 a la ELNH)
E9: Y esto no es suficiente porque…
I: Tenemos que darle la forma estándar
E9: Sí, tenemos que darle la forma estándar (factoriza por la variable y)
E9: Aplicamos un cambio de variable, la que llamaremos z (reescribe una ELNH en una ELH con una nueva variable)
E9: Y después va hacer claro que como este tiene conjunto solución análogo a la ELH y hacemos el cambio de variable con el conjunto adentro (Comenta que esa forma es la que se le ocurre y se le sugiere poder usar y' para sugerir algo más)
E9: Sí, fue un cambio de variable respecto a y
I: geométricamente como explico ese cambio de variable
E9: Estoy diciendo que esta solución es análoga a una corrida en una unidad hacia arriba, pues las pendientes son importantes en los problemas lineales…son la misma.
I: Y eso va a dar algunas pistas
E9: El problema no homogéneo tiene una parte homogéneo que podemos estudiar…bueno lo que llamamos soluciones particulares.</td></tr>
</table>

Cuando se le solicita a **E9** transformar la ELNH en una ELH escribe la ELH asociada y luego dibuja la gráfica de la ELNH haciendo notar que la gráfica de la ELH y la ELNH tienen la misma pendiente, haciendo notar además que las soluciones del CSELNH están trasladas respecto de las del CSELH. El desempeño del **E9** sobre los aspectos indicados evidencia una *concepción objeto* del plano cartesiano y pone de relieve una *construcción proceso* de CSELNH y una *construcción proceso* de recta afín.

La pregunta 3) de la entrevista apuntó a indagar si era posible obtener todo $\mathbf{R}^2$ a partir de dos soluciones asociadas a dos ELH´s distintas considerando sólo la adición como operación binaria. En la Tabla N°67 se pueden leer algunas de los comentarios que indicó el **E9** mientras desarrolló con lápiz y papel lo solicitado.

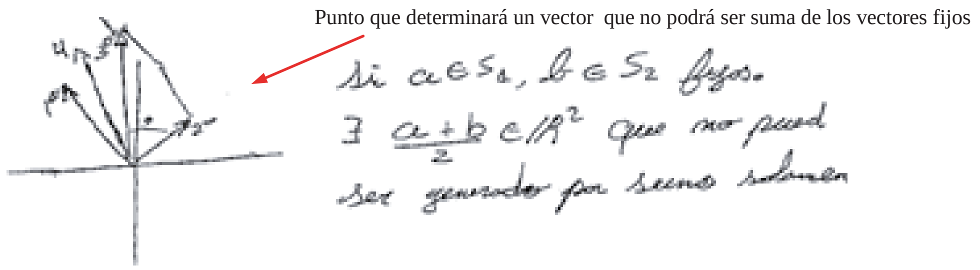
Tabla N°67: Fragmento 4 de la entrevista a **E9**, obtener a todos los elementos de $\mathbf{R}^2$ considerando la adición usual en dicho conjunto.

3) Dadas dos soluciones de dos ELH's distintas ¿Será posible obtener todos los elementos de $\mathbf{R}^2$ a partir de los dos elementos anteriores sólo con la adición usual de pares ordenados? Explique.
E9: …Estos conjuntos como ya lo había dicho podría verlos como un base y como son no equivalentes no importa lo que se expanda o contraiga una de estas bases nunca voy a poder obtener la otra porque va en otra dirección…y eso nos dice en cierta manera de que son linealmente independientes y como sabemos que en $\mathbf{R}^2$ tenemos dimensión dos, debemos encontrar dos bases que tienen que ser linealmente independientes que van a ser las bases de S1 y S2 para generar todo el espacio... **I:** ¿Basta con la suma para obtener a todo $\mathbf{R}^2$? **E9**: Sí, pues la multiplicación está incorporada en el conjunto **I**: No, la idea es tener los dos conjuntos solución, un elemento en cada conjunto y sólo la suma como operación. **E9:** Mirando pareciera que sí, no tengo ninguna objeción (ocurre lo mismo que en la pregunta1, piensa un rato y comienza a dibujar…) **E9**: oh, oh, oh ya ya ya uno sólo…nooo, necesito la multiplicación por escalar …por un momento pensé que tenía los conjuntos y que con una operación definida y yo tomando elementos adecuados de cada uno podía generar cualquier elemento de $\mathbf{R}^2$. No, eso sí lo puedo hacer. I: Me queda claro que entiende que lo puede hacer… **E9:** Si agarro un elemento y agarro otro y lo sumo lo que estoy tomando en el fondo es una tercera recta. Entonces si a ese elemento le sigo multiplicando tendría una recta y no tendría a todo $\mathbf{R}^2$ (al parecer todavía cuesta deshacerse de la multiplicación por escalar) I: Ud. en el cuestionario había hablado que aparecía un paralelogramo **E9**: Ah, la visión de suma de vectores como paralelogramo… claro y en realidad que la diagonal de este paralelogramo es la tercera recta.


Al parecer por lo que se logra apreciar de la Tabla N°67 **E9** no logra argumentar con certeza que, dadas dos soluciones fijas asociadas a dos rectas vectoriales y la operación suma usual de $\mathbf{R}^2$, no es posible obtener a todos los elementos de $\mathbf{R}^2$, pues al parecer no fija dos vectores para tal propósito. Para ello se le ayuda a fijar dos vectores y se le pide que comience a obtener otros vectores sólo con la suma. En particular, se le pide que sume uno de los vectores fijos con el vector suma para ver si logra obtener un nuevo vector que pertenece a otra recta vectorial.

En la Tabla N°68 se presenta el fragmento 5 de la entrevista donde **E9** manifiesta, finalmente que no es posible, sólo con la adición usual de $\mathbf{R}^2$ y dos elementos fijos del conjunto solución de dos ELH's, obtener todos los elementos de $\mathbf{R}^2$.

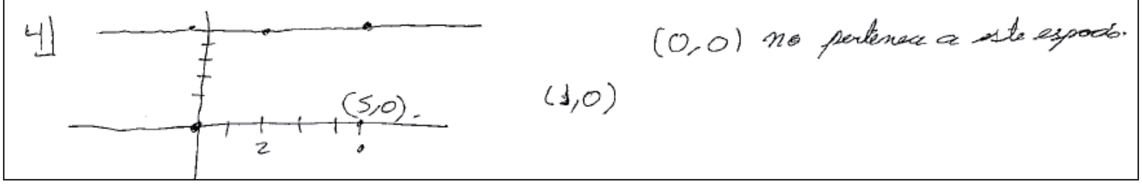
Tabla N°68: EL fragmento 4 de la entrevista a **E9**, obtener a todos los elementos de $\mathbf{R}^2$ considerando la adición usual en dicho conjunto.

3) Dadas dos soluciones de dos ELH's distintas ¿Será posible obtener todos los elementos de $\mathbf{R}^2$ a partir de los dos elementos anteriores sólo con la adición usual de pares ordenados? Explique.
E9: ah, agarrando otra vez y sumando obtengo otra recta corrida para acá (sigue pensando que una recta vectorial puede ser vista como un espacio vectorial) **I**: Con esa forma de "reproducir" nuevos elementos podrá obtener a $\mathbf{R}^2$ **E9**: Necesito estos elementos que se me escapan que eran más grandes de los elementos que me tomé (quiso decir más pequeños, pues marca un punto en la gráfica que así lo denota) **E9**: Entonces para poder alcanzar a eso y generar a todo $\mathbf{R}^2$ necesitaría contraerme y expandirme de alguna manera. I: Entonces como respondemos 3a) **E9**: No, no se puede…


Finalmente cuando se le pregunta a **E9** por alguna estructura algebraica que conozca y además garantice obtener a todo $\mathbf{R}^2$ desde un número determinado de elementos de éste, hace mención a la estructura de espacio vectorial. Para ello da algunas propiedades que son importantes para este tipo de estructura algebraica como la dimensión del espacio, la base usual o no de $\mathbf{R}^2$ y los vectores linealmente independientes. En relación al conjunto de axiomas, separa aquellos que dicen relación con la adición de vectores y la ponderación por escalar, indicando que la ponderación por escalar procura contraer, expandir y obtener la inversión de un vector. En definitiva, dados los argumentos del **E9** se puede evidenciar una concepción *objeto* del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$.

En la pregunta 4) se le consultó a **E9** si era posible dar a conocer un sub-espacio de $\mathbf{R}^2$ que considere dos puntos de éste. En la Tabla N°69 se puede apreciar un fragmento de lo que éste argumentó.

Tabla N°69: El fragmento 5 de la entrevista a **E9**, determinar un sub-espacio vectorial de $\mathbf{R}^2$ que incluya dos elementos de éste particulares.

4) Existirá un sub-espacio vectorial de $\mathbf{R}^2$ que contenga los puntos A(2,5) y B(5,5). Explique
E9: …Voy a hacer el dibujo no más E9: Supongo que no quiere considerar a $\mathbf{R}^2$ como sub-espacio de $\mathbf{R}^2$…bueno puede ser eso una alternativa **I**: Pero no… **E9**: Una recta que contenga estos dos puntos a la misma altura va hacer equivalente a esta, pues por dos puntos se puede trazar una única recta (dibuja recta paralela al eje X) (Después de dudar un poco y haciéndosele notar que debe considerar con operaciones usuales de $\mathbf{R}^2$ responde) **E9**: No contiene el (0,0) no es un sub-espacio de $\mathbf{R}^2$.


4.3.4.2.2.- Sobre la entrevista a E4 caso 1

Como ya se hizo notar en la sección anterior, la entrevista a **E4** caso 1 difiere sutilmente de la entrevista del **E9** caso 2 pues se da comienzo a ésta preguntando por la posibilidad de obtener todas las soluciones del CSELH a partir de la solución (-3,2), sólo con la adición usual de $\mathbf{R}^2$. Para ello se le pide a **E4** que determine la ELH considerando para ello la solución (-3,2), a lo cual **E4** escribe la forma general de una ELNH y luego se focaliza en una ELH con parámetros *a* y *b*, como se aprecia en la Figura 154. En una primera instancia indica que la ELH que se solicita corresponde a -3*a* +2*b* = 0

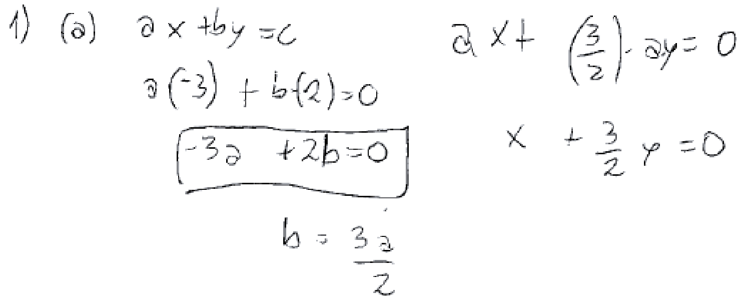


Figura 154: Determinación de una ELH a partir de una solución de ésta

Lo realizado por **E4**, para determinar la ELH, pone de manifiesto una *concepción proceso* de solución de una ELH. Por otro lado, en el fragmento 1 de la entrevista a **E4**, en la Tabla N°70, se logra apreciar como éste declara que el CSELH es un espacio vectorial unidimensional.

Tabla N°70: EL fragmento 1 de la entrevista a **E4**, obtener a todos los elementos del CSELH a partir de un elemento con la adición de soluciones en el CSELH.

1b) Dada la solución (-3,2) de una ELH será posible, a partir de ese elemento, obtener a todos los elementos del CSELH.
E4: …Si porque si tomamos cualquier múltiplo escalar de ese elemento. **I**: …es que no se está considerando la multiplicación por un escalar sólo la adición de pares ordenados… **E4**: Bueno en el caso particular que sumemos ese único elemento lo podemos sumar con el mismo **I**: Ya…lo podemos sumar **E4**: Sí, por ejemplo… (suma (-3,2) consigo mismo y obtiene el (-6,2) no percatándose del error aritmético) **I**: Entonces sólo con la adición se podrán obtener todos los elementos del CSELH **E4**: No, porque sólo nos va a entregar las soluciones enteras…
(b) (-3,2) + (-3,2) = (-6,2) no es posible obtener a todos los elementos.

Si bien **E4** comete un error aritmético entiende que el repetir la suma de esos elementos sólo obtendrá múltiplos enteros de éste lo que imposibilitaría obtener a todos los elementos del conjunto solución. Esto muestra evidencia la *construcción proceso* ponderación múltiplo escalar de una solución.

Lo anterior pone de relieve, como se explica en la Figura 155, que el sumar un elemento consigo mismo actúa como *mecanismo* de *coordinación* entre la *construcción proceso* suma de soluciones con *la construcción proceso* todas las soluciones de una ELH para dar paso a la *construcción proceso* ponderación múltiplo escalar de una solución. Teniendo en cuenta además que la *coordinación* de la *construcción proceso* todas las soluciones de una ELH con la *construcción proceso* operación binaria procura la *construcción proceso* ponderación de una solución por un escalar.

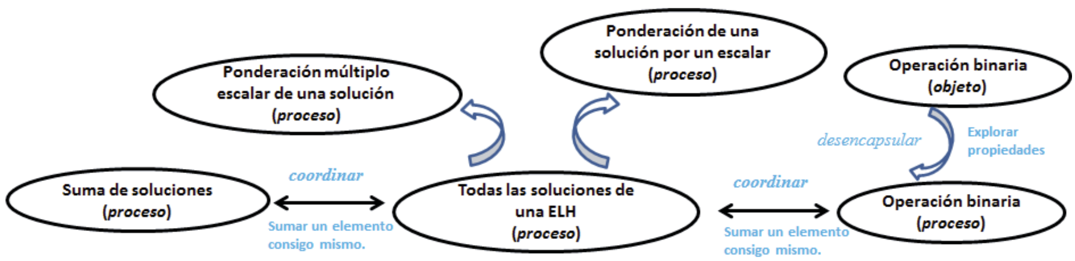


Figura 155: Sobre la construcción proceso ponderación de una solución por un escalar

Por otro lado la *construcción acción* asociar un escalar a la suma de un par ordenado consigo mismo, *interioriza* en la *construcción proceso* ponderar un par ordenado. Luego la *construcción proceso* ponderar un par ordenado se puede coordinar con la *construcción proceso* segmento dirigido para obtener la *construcción proceso* trasformación de un segmento dirigido en un plano.

A continuación en la Tabla N°71 los argumento de **E4** a la obtención de todas las soluciones del CSELH desde la ponderación por escalar.

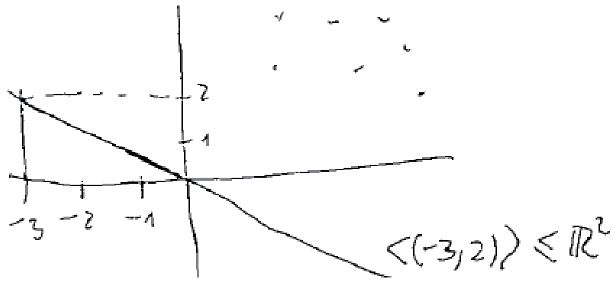
Tabla N° 71: Fragmento 2 de la entrevista a **E4**, obtener a todos los elementos del CSELH a partir de un elemento y la ponderación de una solución del CSELH por un escalar.

1c) Dada la solución (-3,2) de una ELH será posible, a partir de ese elemento, obtener a todos los elementos del CSELH con la ponderación por escalar.
I: ¿Sólo con la multiplicación y un solo elemento se pueden obtener todos los elementos del CSELH? **E4**: (piensa un rato)…sí porque si multiplicamos cualquier escalar por este elemento (-3,2) vamos a tener una nueva solución…si tomamos la relación que teníamos (haciendo alusión a la ecuación) si reemplazamos en nuestro sistema (reemplaza en la ecuación las componentes de la solución) sabemos que nos da cero pues pertenece al conjunto solución, pero si ahora multiplicamos por un escalar (multiplica la ecuación evaluada en la solución por el escalar λ). **E4**: …entonces aquí tenemos una familia de soluciones que son (-3λ, 2λ)…o lo que podríamos decir también como el conjunto generado por (-3, 2) (escribe dicho conjunto según la notación que se usa)
$(c)(-3) + \left(\frac{3}{2}\right)\cdot(2) = 0 \quad /\cdot\lambda$ $(-3\lambda) + \left(\frac{3}{2}\right)\cdot(2\lambda) = 0$ $(-3\lambda, 2\lambda) = \langle(-3,2)\rangle \quad \lambda\in\mathbb{R}$

Lo anterior pone de relieve que el multiplicar por un parámetro la ELH, evaluada en una solución de ésta, pone en evidencia una *concepción proceso* de **R** como cuerpo. Además escribir el par ordenado que ayuda a obtener a todas las soluciones permite escribir el conjunto generador de todas las soluciones de la ELH, lo que da cuenta de una *concepción proceso* de cartesiano $\mathbf{R}^2$.

En la Tabla N°72 se muestran los argumentos que despliega **E4** en relación a la interpretación geométrica del conjunto generador.

Tabla N° 72: Fragmento 3 de la entrevista a **E4**, interpretar el conjunto generador del CSELH.

1d) Podríamos mirar geométricamente el conjunto generador
I: …y eso se podría mirar geométricamente (haciendo alusión al conjunto generador) **E4**: Desde luego que se puede ver geométricamente pues esto lo podemos ver como una recta en el plano…aquí tenemos un vector (-3,2) y el conjunto generado corresponde ser esta recta que es un sub-espacio vectorial de $\mathbf{R}^2$.


Asociar el conjunto generado por el vector (3,-2) a una recta vectorial e interpretarlo como un sub-espacio vectorial de $\mathbf{R}^2$, evidencia una *concepción objeto* de espacio vectorial $\mathbf{R}^2$. En la Tabla N°73 la respuesta del **E4** a la relación de las soluciones y escalares en una ecuación lineal homogénea con pares ordenados.

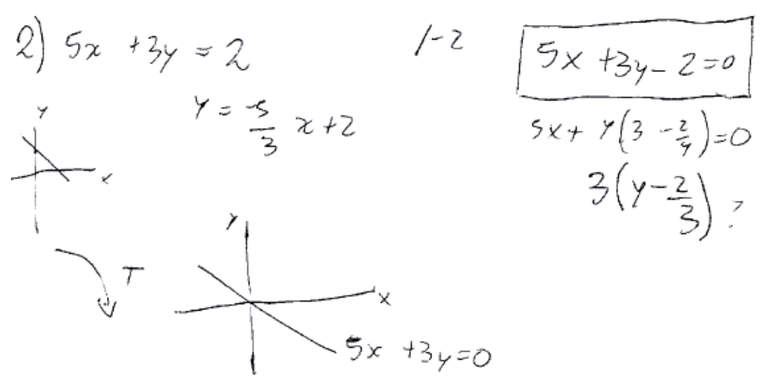
Tabla N°73: Fragmento 4 de la entrevista a **E4**, interpretar escalares y soluciones de una ELH de pares ordenados.

1e) ¿Qué podemos decir de los escalares en la ELH siendo (*a*, *b*) y (*c*, *d*) soluciones de ésta? Y cómo podríamos interpretar geométricamente las posibilidades de esos escalares.
(en una primera instancia el **E4** manifiesta no entender la pregunta para ellos se le indica si éstos escalares tendrían que ser ambos ceros) **E4**: Ahora voy entendiendo para dónde va la pregunta, porque en el fondo ahí tenemos una combinación lineal…estanos viendo si el conjunto es linealmente independiente o linealmente dependiente. Así interpreto yo esa pregunta. Pero tenemos aquí que el conjunto generado por esta recta (refiriéndose a la recta del apartado anterior) es de dimensión 1y tenemos dos escalares entonces debería ser linealmente dependiente…por ejemplo si igualamos esto a cero (escribe la ecuación homogénea), entonces puedo despejar…si ambos escalares fueran cero el conjunto sería linealmente independiente…supongamos que por lo menos uno de ellos es distinto de cero (asume que alfa es distinto de cero)…así se ve que uno de los vectores es múltiplo del otro….
(e) $\alpha(a,b)+\beta(c,d)=(0,0)$ $\alpha(a,b)=-\beta(c,d)$ $\alpha \neq 0 \qquad (a,b)=-\frac{\beta}{\alpha}(c,d)$

E4 asocia las dos soluciones de la ELH con un conjunto linealmente dependiente. Para ello trasforma la ecuación y explica, estableciendo una restricción a uno de los escalares, que en ese caso los vectores son paralelos. En el caso de que ambos escalares sean cero, el conjunto que considera ambas soluciones es linealmente independiente. Para ello recurre al apartado 1d) de la pregunta 1. Lo anterior evidencia una concepción *objeto* de espacio vectorial $\mathbf{R}^2$.

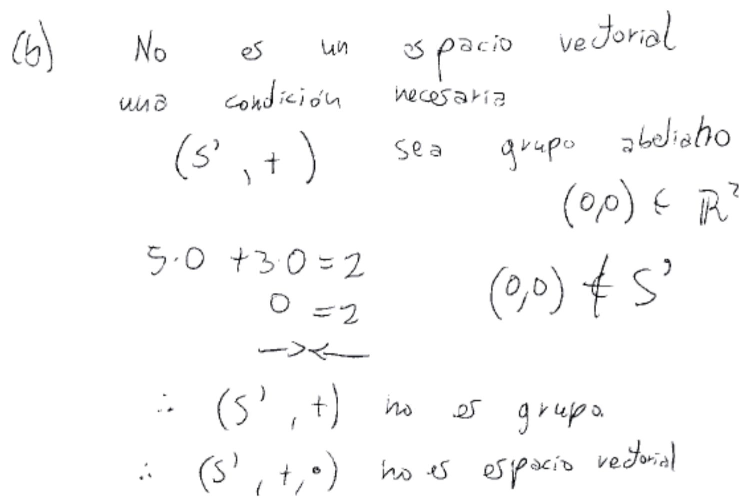
En la Tabla N°74, se presentan los argumentos del **E4** al problema de trasformar una ELNH a un ELH.

Tabla N° 74: el fragmento 5 de la entrevista a **E4**, transformar una ELNH en una ELH.

2a) ¿Podría trasformar la ELNH 5*x*+3*y* = 2 en una ELH?
E4: O sea en el fondo crear otra ecuación (se le explica que la misma ecuación se debe transformar en una ELH) **E4**: …lo que yo haría sería quitarle el 2 para que tenga el elemento nulo (comienza a dibujar) **E4**: ...trasladando el conjunto pues este conjunto representa una recta…lo que yo pienso en el fondo es trasladar esta recta (para dibujarla trasforma la ELNH en una ecuación principal de la recta cometiendo un error aritmético que no afecta mayormente lo que se persigue) **E4**: Entonces aplicarle una trasformación talque la traslade hacia abajo dos unidades hacia abajo (piensa en una función) y tener este conjunto 5*x*+3*y* = 0…una traslación…eso fue lo primero que pensé…pero no sé si esa es la idea de la pregunta. **I**: No ha pensado en aplicarle el inverso aditivo a la igualdad…hace manipulación algebraica a la ecuación, se le pide que factorice.


E4 manifiesta que lo primero que se puede hacer es anular el 2 de la ELNH, asociando de manera automática la ELNH con la respectiva ELH. Luego determina la gráfica de la ELNH desde la trasformación de ésta en la ecuación principal de la recta, mostrando así que la recta afín se traslada dos unidades hacia abajo, dos unidades considerando el error de cálculo que instaló **E4**, para obtener la recta vectorial asociada a la ELH $5x + 3y = 0$ desde una traslación en el plano. Lo anterior evidencia una *concepción objeto* del plano cartesiano y una *concepción proceso* del concepto de función lineal. Además da cuenta que comparar las gráfica de la ELNH con la gráfica de la ELH pone de relieve la traslación paralela en el plano cartesiano, evidenciando una concepción *proceso* de plano afín.

Tabla N° 75: El fragmento 6 de la entrevista a **E4**, el CSELNH será un espacio vectorial.

2b) ¿El conjunto solución de una ELNH con las operaciones usuales será un espacio vectorial?
E4: No es un espacio vectorial pues una condición necesaria para que sea un **R** espacio vectorial es que el conjunto S' con la operación suma sea un grupo abeliano, entonces tenemos que tener el elemento neutro para la operación suma que en este caso es el (0,0) que pertenece a $\mathbf{R}^2$ y si reemplazamos este elemento (verifica si el elemento (0,0) satisface la ELNH) **E4**: 0 = 2, una contradicción lo que nos dice que el elemento (0,0) no pertenece a S'. Por lo tanto S' con la suma no es un grupo. Luego (S', +, ·) no es un R espacio vectorial.


E4 para determinar si *S*' es un espacio vectorial averigua si (*S*',+) es un grupo abeliano. Para ello verifica que (0,0) ∈ *S*'. Esto evidencia una *concepción objeto* de CSELH y pone de manifiesto una *concepción proceso* de axioma, además de una concepción *objeto* de grupo.

Finalmente **E4** define una operación binaria no usual para que *S*' sea un grupo. Esto evidencia una concepción *objeto* de operación binaria. Además presentó algunas dificultades al pensar en la traslación de dos unidades, dado el error aritmético que cometió en el apartado 2a) y la idea de afectar ambas componentes con la traslación. En la Figura 156 se puede apreciar algunos detalles de cómo E4 rectifica el error y define la adición no usual en *S*'. Si bien afirma que la ponderación por escalar es la usual de $\mathbf{R}^2$, no se siguió insistiendo en esa dirección dado que, dado el desempeño de éste era factible que se haya percatado reflexionando sobre la traslación.

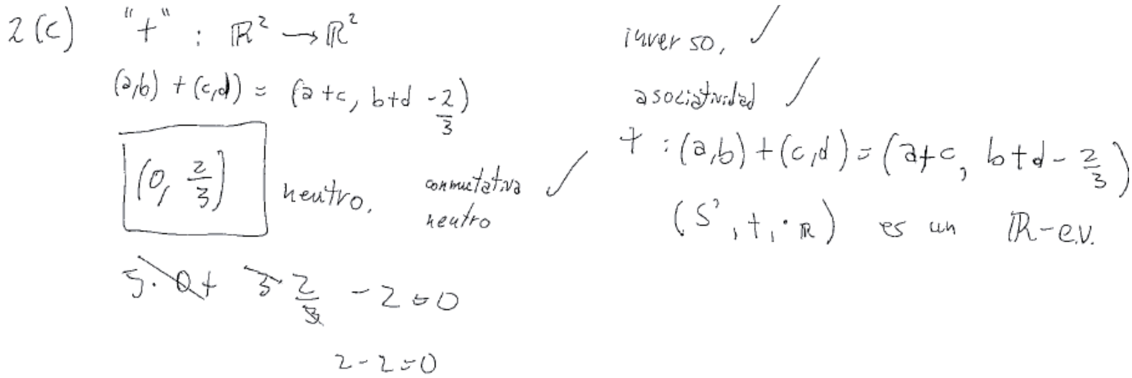
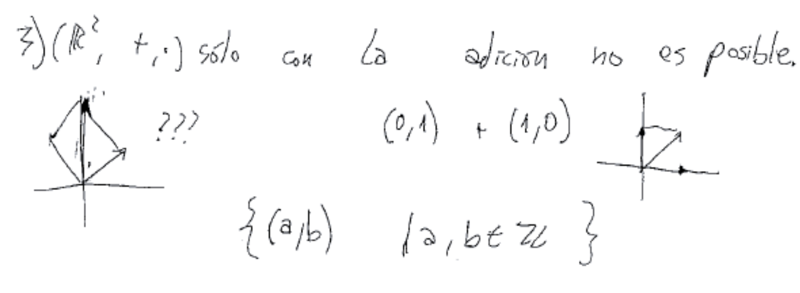


Figura 156: Sobre la definición de una operación no usual en S’ para que sea un espacio vectorial.

Tabla N°76: EL fragmento 7 de la entrevista a **E4**, analizar si una operación binaria y dos soluciones de las ELH’s no equivalentes permiten obtener a todo $\mathbf{R}^2$.

3) ¿Sólo con la adición de pares ordenados con dos soluciones de dos ecuaciones homogéneas no equivalentes se puede obtener todo $\mathbf{R}^2$?
E4: …debería poderse (Se le insiste que es sólo con la adición y si es posible explicarlo geométricamente) E4: Con la adición no es posible…si vemos la suma queremos ver la suma de dos vectores pues tenemos dos elementos no nulos (dibuja dos vectores en el plano cartesiano no colineales ya que son elementos de dos ecuaciones no equivalentes) **E4**: …como tenemos estos dos vectores no paralelos los podemos sumar y nos va a dar un tercer vector (aplica el método del paralelogramo y dice que esa es toda la suma de los dos vectores) **E4**: No nos da todo $\mathbf{R}^2$ nos da un solo elemento de $\mathbf{R}^2$ de infinitos…entonces necesitamos de otra operación un producto que nos… **I**: Pero ese vector se puede sumar con ese y obtener otro (se le hace notar que puede seguir sumando vectores inclusive el resultante consigo mismo) **E4**: Ah yo no lo había pensado así…pensé que sólo podía suma estos dos solamente. **E4**: (piensa un buen rato)…no, pues se va a presentar el mismo problema anterior, por ejemplo podría hacer un abuso y usar un ejemplo, pues basta con un ejemplo para mostrar que no es posible (recurre a la base canónica) **E4**: …cual va hacer el problema siempre que sumemos como son números enteros, éstos son cerrados bajo la suma. Entonces cuando los sumemos siempre vamos a obtener un par cuyas componentes serán números enteros…


E4 en una primera instancia entiende que sólo era posible sumar los dos elementos fijos, pero se aclara que es posible sumar el vector suma consigo mismo y éste con los vectores iniciales. Finalmente se centra en un ejemplo considerando los vectores canónicos de $\mathbf{R}^2$ situados en dos rectas particulares (ejes coordenados) y hace notar que al suma y como sus componentes son números enteros el vector suma tendrá siempre coordenadas enteras. Lo anterior evidencia una *concepción objeto* de (***Z***,+) como grupo. Finalmente se le pregunta si sólo con la multiplicación es posible obtener a todos los elementos de $\mathbf{R}^2$ a partir de los dos elementos fijos, argumentos que se pueden apreciar en la Tabla N°77.

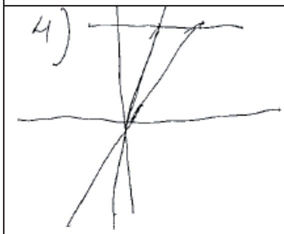
Tabla N°77: Fragmento 6 de la entrevista a **E4**.

3) ¿Sólo con la ponderación por escalar y dos soluciones de dos ecuaciones homogéneas no equivalentes se puede obtener todo $\mathbf{R}^2$?
E4: Yo pienso que no, y de hecho me voy a valer del mismo ejemplo anterior para ver que no se puede (Dibuja los ejes coordenados y los vectores canónicos haciendo ver que cada uno de ellos genera sólo a los ejes coordenados como dos rectas vectoriales, haciendo notar que la unión de dichos conjuntos es distinto del conjunto $\mathbf{R}^2$.) **E4**: De hecho esto es una propiedad básica que se suele pasar en los cursos de álgebra lineal de que la unión de dos sub-espacios no necesariamente es un sub-espacio vectorial
 $\langle(0,1)\rangle \cup \langle(1,0)\rangle \neq \mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$

E4, según lo que expresa en la Tabla N°77, relaciona los vectores canónicos de $\mathbf{R}^2$ para elaborar un contraejemplo y mostrar que sólo con la ponderación por escalar y dos elementos fijos no es posible obtener todos los elementos de $\mathbf{R}^2$. Para ello argumenta que cada vector de la base canónica genera un sub-espacio vectorial de $\mathbf{R}^2$ indicando además que la unión de dos sub-espacios vectoriales no necesariamente es un sub-espacio vectorial, aludiendo a una propiedad de los espacios vectoriales. Lo expresado evidencia que relacionar propiedades de un espacio vectorial y comparar sub-espacios vectoriales de $\mathbf{R}^2$ da cuenta de una *concepción objeto* de espacio vectorial. Por otro lado, evidencia la *desencapsulación* del objeto espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ en el proceso sub-espacio vectorial de $\mathbf{R}^2$.

En la Tabla N° 78 se muestran los argumentos de **E4** para determinar si existe un sub-espacio de $\mathbf{R}^2$ que contenga dos puntos de éste.

Tabla N°78: Fragmento 5 de la entrevista a **E9**, determinar un sub-espacio vectorial de $\mathbf{R}^2$ que incluya los elementos (2,5) y (5,5).

<table>
<tr><th colspan="2">4) ¿Existirá un sub-espacio de $\mathbf{R}^2$ que incluya a los elementos (2,5) y (5,5)?</th></tr>
<tr><td colspan="2">E9: bueno de que existe, existe, ¿porque no me están preguntando por un espacio no trivial o cualesquiera?
I: No, bueno, no es el $\mathbf{R}^2$ (se le hace ver que no es un sub-espacio trivial de $\mathbf{R}^2$)
E9: (Dibuja los ejes coordenados y dos puntos en el primer cuadrante a la misma altura y luego los vectores anclados al origen y asociados a dichos puntos …) yo pienso que no, no se puede por el argumento que dije antes si tengo un sub-espacio de $\mathbf{R}^2$ y otro sub-espacio de $\mathbf{R}^2$ la única forma que de que la unión de éstos sea un sub-espacio uno de los dos esté contenido en el otro...y si tenemos el conjunto generado por éstos (refiriéndose a los conjuntos generados por los vectores asociados a los puntos dados) podemos ver que ninguno está contenido en el otro. Son dos rectas no paralelas, dos rectas distintas por lo tanto ninguno de los conjuntos está contenido en el otro…la única posibilidad es que el sub-espacio sea el trivial, entonces no hay otro sub-espacio de $\mathbf{R}^2$ que contenga a ambos puntos.
E9: Una manera geométrica de saber si dos puntos de $\mathbf{R}^2$ están contenidos en un sub-espacio e que ambos puntos y el origen deberían ser colineales (hace notar que los puntos dados no pertenecen a una recta vectorial, para ello traza una receta paralela al eje X).</td></tr>
<tr><td>4) 
$A \leq \mathbb{R}^2$
$B \leq \mathbb{R}^2$
$A \cup B \leq \mathbb{R}^2$
$A \subseteq B \veebar B \subseteq A$</td><td> $\langle(2,5)\rangle$ $\langle(5,5)\rangle$
La única posibilidad es que el subespacio sea el trivial.
No hay otro subespacio de $\mathbb{R}^2$ que contenga a ambos puntos.</td></tr>
</table>

E4 argumenta, considerando dos sub-espacios vectoriales de $\mathbf{R}^2$, que no es posible que exista un sub-espacio vectorial no trivial que contenga a los dos puntos dados, pues asocia cada punto a un sub-espacio vectorial de $\mathbf{R}^2$, una recta vectorial. Inclusive establece condiciones para que esos dos sub-espacios puedan contener a los dos puntos dados, aludiendo a la colinealidad de los puntos con el origen del sistema de coordenadas. Esto evidencia una *coordinación* de la *construcción proceso* recta vectorial con la *construcción proceso* plano cartesiano para dar paso a la *construcción proceso* cartesiano $\mathbf{R}^2$.

4.3.4.2.3.-Algunos hallazgos a las entrevistas del E9 y E4 para indagar en la *construcción objeto* del concepto espacio vectorial $\mathbf{R}^2$

Otro de los aspectos que se evidenció, al realizar la entrevista al **E9** caso 2, para indagar en la articulación de las estructuras algebraicas asociadas al CSELH y CSELNH, es la desencapsulación del *objeto* plano cartesiano en el *proceso* traslación de ejes, desde un cambio de variable, para *coordinarla* con la *construcción proceso* adición de pares ordenados y dar paso a la *construcción proceso* conjunto solución de una ELNH. En la

Figura 157 se presenta un análisis a priori que se esperaba evidenciar respecto de las construcciones y mecanismos mentales desde los posibles argumentos del **E9** a la pregunta 2 de la entrevista.

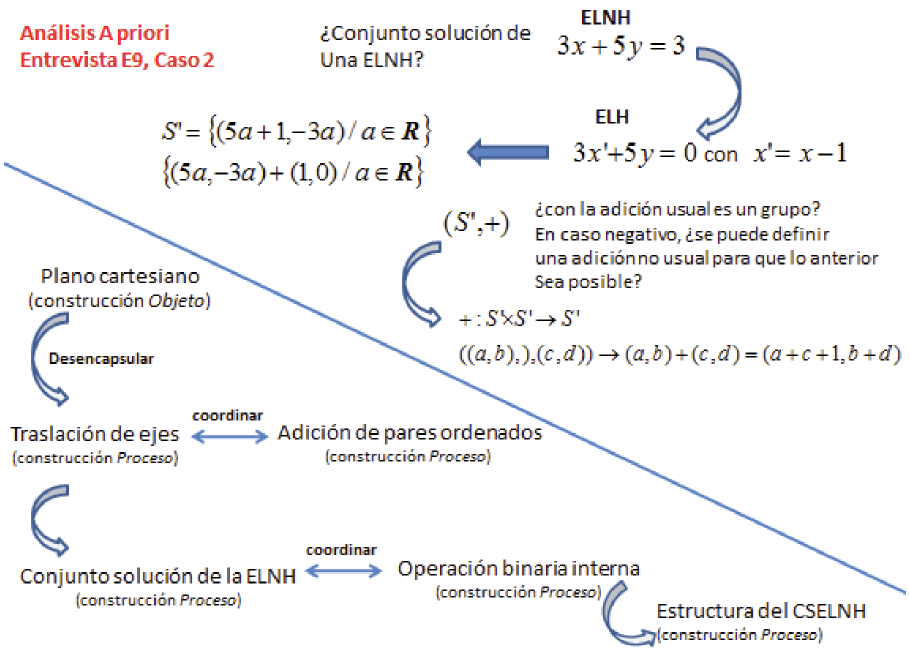


Figura 157: La desencapsulación del objeto plano cartesiano y la coordinación de algunos procesos un *a priori*

En primer lugar, como se aprecia en la Figura 157, se hizo un análisis a priori de esta pregunta estableciéndose una correspondencia entre el posible desempeño matemático del estudiante y las construcciones y mecanismos mentales asociadas, dejando de manifiesto que el transformar una ELNH en una ELH, asociando un cambio de variable, actúa como mecanismo de *desencapsulación* de la *construcción objeto* plano cartesiano en la *construcción proceso* ejes coordenados.

Por otro lado, relacionar la recta vectorial con la recta afín desde una traslación, asociando soluciones y respectivos conjunto solución desde las ecuaciones asociadas, actúa como mecanismo de *coordinación* entre la *construcción proceso* CSELNH y la *construcción proceso* estructura del CSELH para dar paso a la *construcción proceso* operación no usual de soluciones. En la Figura 158 se muestra el desempeño del **E9** en sintonía con los elementos que se había establecido de antemano desde el guion de la entrevista.

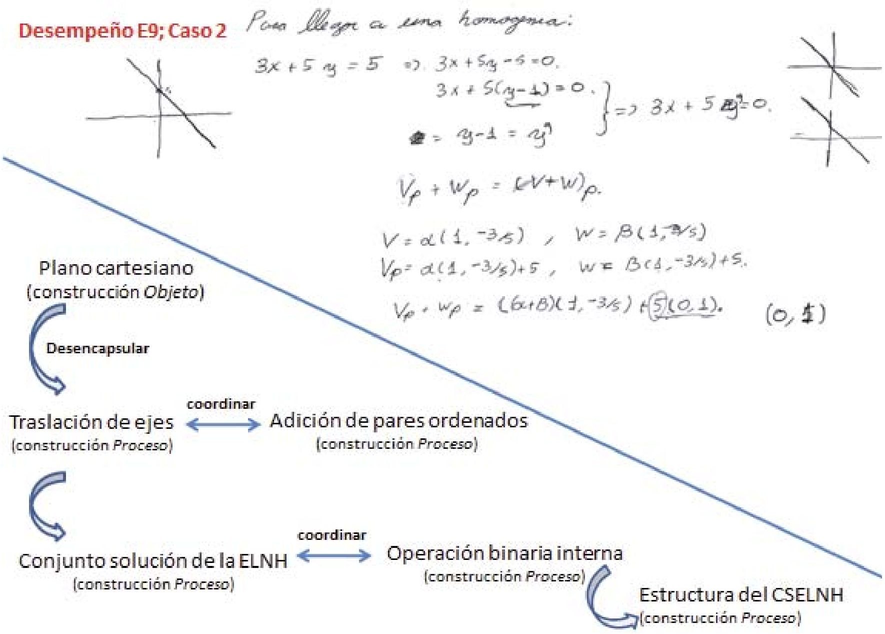


Figura 158: *Desencapsulación* del *objeto* plano cartesiano y la coordinación de *procesos* por parte del **E9**

El desempeño del **E9** pone de manifiesto una concepción *objeto* de operación binaria pues es capaz de definir una operación binaria interna no usual en el CSELNH, desde la traslación paralela de los ejes coordenados, para dar cuenta así de una estructura de espacio vectorial para dicho conjunto. Por otro lado, queda de manifiesto la necesidad de articular dos operaciones binarias en el CSELH para generar todos los elementos de dicho conjunto.

Es importante hacer notar que tanto **E4** como **E9** hacen uso de una interpretación geométrica para describir y argumentar las distintas preguntas de la entrevista, haciendo referencia a la recta vectorial y recta afín desde la ecuación de la recta. Destaca la relación entre la pendiente y la dirección de un vector que establece **E9**, lo que evidencia una *concepción objeto* de plano cartesiano y, por otro lado, pone de manifiesto la *construcción proceso* cartesiano $\mathbf{R}^2$.

El **E4** compara sub-espacios no triviales de $\mathbf{R}^2$ con las operaciones usuales y hace uso de propiedades de un espacio vectorial para argumentar las peguntas 3) y 4) de la entrevista, en particular que la unión de dos sub-espacios no siempre es un sub-espacio vectorial. Además relaciona un punto del plano cartesiano y un vector del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$, lo que manifiesta una *concepción objeto* de espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y una *construcción proceso* cartesiano $\mathbf{R}^2$.

Por otro lado, tanto **E4** como **E9** evidencian una concepción *proceso* de operación binaria no usual para un sub-espacio vectorial de $\mathbf{R}^2$, cuando definen la adición no usual para CSELNH desde la traslación paralela y el cambio de variable, lo que además pone de relieve una *concepción objeto* de operación binaria. Además, evidencia que el comparar estructura entre el CSELH y CSELNH y $\mathbf{R}^2$ permite *encapsular* la *construcción proceso* cartesiano $\mathbf{R}^2$ en la construcción *objeto* espacio vectorial $\mathbf{R}^2$.

Tanto **E4** como **E9** hacen notar que la suma de una solución consigo misma permite obtener un múltiplo entero de una solución lo que evidenciar la *construcción proceso* ponderación de una solución por un múltiplo escalar, la que se puede *revertir* en la *construcción proceso* ponderación por la unidad, desde las propiedades de $\mathbf{R}$-{0} como grupo multiplicativo desde las componentes de una solución. A su vez, ésta se *coordina* con la *construcción proceso* operación binaria externa para dar paso a la *construcción proceso* álgebra de soluciones. Luego la *coordinación* entre la *construcción proceso* álgebra de soluciones con la *construcción proceso* producto cartesiano da paso a la *construcción proceso* álgebra de pares ordenados. La *construcción proceso* álgebra de pares ordenados se puede coordinar con la *construcción proceso* plano cartesiano para obtener la *construcción proceso* cartesiano $\mathbf{R}^2$. Finalmente la construcción *proceso* cartesiano $\mathbf{R}^2$ se puede *encapsular* en la construcción *objeto* espacio vectorial $\mathbf{R}^2$.

Lo anterior pone de relieve la importancia de atender a ciertas *construcciones acción* a tener en cuenta, para luego ir dando paso a *construcciones proceso* desde una *interiorización*. Por ejemplo si pensamos en el conjunto solución, atendiendo a lo manifestado tanto por el **E4** y **E9**, es posible poner de relieve la *construcción acción* relacionar aditivamente una solución con un número entero positivo, la cual se puede *interiorizar* en la *construcción proceso* ponderación escalar de una solución.

Ateniendo a este análisis de las entrevistas y el análisis a las respuestas de las preguntas del cuestionario 1 por parte de los estudiantes del caso 1 y 2, si bien se muestra que la DG propuesta es viable es posible re-direccionar de mejor manera las construcciones y mecanismos mentales que se dispusieron en la DG original preliminar, resaltando el papel de una ELNH y su respectivo conjunto solución en la construcción del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$.

4.4.- Una nueva mirada a la DG del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$

En el diagrama de la Figura 159 se explicitan aquellas construcciones y mecanismos mentales hipotéticos que un estudiante universitario debe mostrar para reconstruir cognitivamente el $\mathbf{R}^2$ espacio vectorial a la luz de los antecedentes recopilados.

Figura 159: Construcciones y mecanismos mentales hipotéticos que debe mostrar un estudiante universitario para la reconstrucción del $\mathbf{R}^2$ espacio vectorial a partir del plano cartesiano.

Por otro lado, es necesario contar con los siguientes conceptos previos atendiendo a una determinada concepción, en términos de la teoría APOE, Tabla 1:

Tabla N°79: Concepción de los conceptos previos asociados a la construcción del $\mathbf{R}^2$ espacio vectorial desde el plano cartesiano.

	Concepción del concepto previo			
Conceptos Previos	**Acción**	**proceso**	**Objeto**	**Esquema**
Plano Cartesiano			**X**	
Paralelismo de rectas		**X**		
Paralelogramo		**X**		
Función Lineal			**X**	
Función Afín			**X**	
Operación binaria			**X**	

4.4.1.-Un punto de partida para la construcción del $\mathbf{R}^2$ espacio vectorial: La *desencapsulación* del *Objeto* Plano Cartesiano en el *proceso* ejes coordenados

El punto de partida para reconstruir cognitivamente el $\mathbf{R}^2$ espacio vectorial es *desencapsular* el *objeto* plano cartesiano en el *proceso* ejes coordenados. Abordando, por ejemplo, el problema de determinar las coordenadas de un punto del plano a partir de las coordenadas de otro punto, en ausencia de los ejes coordenados; donde el *proceso* ejes coordenados se traduce en una orientación en el plano que permite localizar un punto, asociando dos distancias. Luego, el *proceso* ejes coordenados se *revierte* en el *proceso* dirección del plano, reparando en lo horizontal y lo vertical, donde el *proceso* dirección del plano se reflexiona desde la posición arbitraria y relativa de lo horizontal y lo vertical. Así la posición de los ejes coordenados en el plano cartesiano, Figura 160, queda en función de la posición relativa de dos rectas perpendiculares en el plano euclidiano.

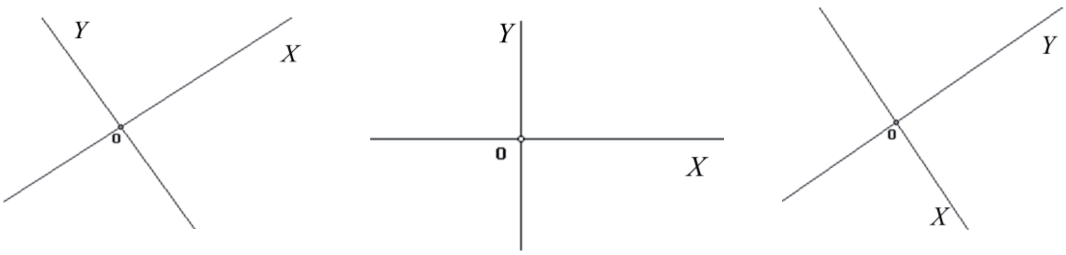


Figura 160: Posición relativa de los ejes perpendiculares en el plano euclidiano en función de la posición de un par de rectas perpendiculares.

El *proceso* ejes coordenados se *coordina* con el *proceso* paralelismo de rectas, asociando rectas paralelas a cada uno de los ejes coordenados, para obtener el *proceso* rectas coordenadas de un punto, que consiste en asociar un par de rectas con distinta dirección a un punto del plano. Por otro lado, el *proceso* coordenadas rectangulares de un punto se *coordina* con el *proceso* par ordenado, considerando a una coordenada como el desplazamiento horizontal o vertical de los respectivos ejes, para obtener el *proceso* sistema de coordenadas rectangulares, asociando a cada punto del plano euclidiano un par de rectas paralelas a los ejes coordenados y, por ende, con un par ordenado de números reales. Así, el *proceso* sistema de coordenadas rectangulares se *revierte*, desde la posibilidad de trazar dos ejes no perpendiculares, para obtener el *proceso* sistema de coordenadas oblicuas.

4.4.2.-El *proceso* recta vectorial y el *proceso* recta afín

El *proceso* coordenadas rectangulares de un punto se puede *coordinar* con el *proceso* paralelogramo para obtener el *proceso* segmento dirigido, al comparar la diagonal de un paralelogramo (rectángulo), desde un par de vértices opuestos, con el segmento que determinan el origen *O* del sistema de coordenadas rectangulares y un punto *P* cualesquiera del plano cartesiano, Figura 161.

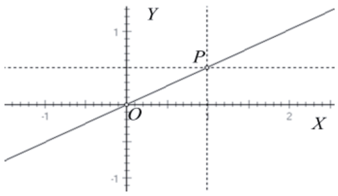


Figura 161: Relación entre las coordenadas de un punto, rectas afines y vectoriales

El *proceso* segmento dirigido se *coordina* con el *proceso* dirección en el plano, para obtener el *proceso* recta vectorial oblicua, Figura 162, como una dirección asociada al origen de un sistema de coordenadas. El *proceso* recta vectorial oblicua se puede *revertir* en el *proceso* recta afín, Figura 163, al comparar las rectas vectoriales horizontal o vertical con sus respectivas coordenadas.

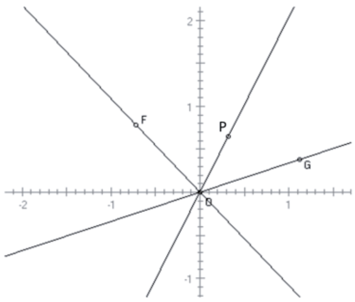


Figura 162: Rectas vectoriales en el $\mathbf{R}^2$ plano cartesiano

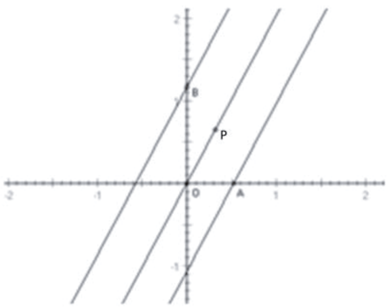


Figura 163: Rectas afines asociadas a una recta vectorial

4.4.3.-Los *objetos* CSELH y CSELNH y la construcción *proceso* $(\mathbf{R}^2,+,\cdot_{\mathbf{R}})$

La *acción* obtener una solución de una Ecuación Lineal Homogénea (ELH), asignando un par de números reales a los términos de la ELH se *interioriza*, desde el uso de conectivos lógicos, un cuantificador universal y un parámetro, en el *proceso* obtener todas las soluciones de la ELH. Por otro lado, el comparar el conjunto de todas las soluciones de una ELH, como un todo, con el conjunto de todas las soluciones de otra ELH permite encapsular dicho *proceso* en el *objeto* Conjunto Solución de una ELH

(CSELH); de la misma manera se puede construir cognitivamente el *objeto* Conjunto Solución de una ELNH (CSELNH).

El *objeto* función lineal se desencapsula en el *proceso* gráfico, al comparar la gráfica de la función lineal con la recta vectorial oblicua en el plano cartesiano. El *proceso* gráfico relaciona el conjunto de todos los pares ordenados que se asocia, desde la expresión analítica que la define, a la función lineal con el CSELH; análogamente para el *objeto* función afín.

4.4.4.-El *proceso* ($\mathbf{R}^2$, +, $\cdot_{\mathbf{R}}$) desde una *coordinación* de varios *procesos*

El *objeto* operación binaria se *desencapsula* en el *proceso* operar con pares ordenados, comparando y relacionando elementos del CSELH; por ejemplo, el par de pares ordenados que se obtienen al asignar un par de números reales, uno inverso aditivo del otro, a los términos de una ELH. El *proceso* operar con pares ordenados consiste en obtener pares ordenados del CSELH o del CSELNH, verificando si el nuevo elemento pertenece o no al respectivo conjunto solución. El *proceso* operar pares ordenados se coordina con el *proceso* axiomas de una operación binaria interna para obtener el *proceso* estructura CSELH. Donde el *proceso* estructura CSELH consiste en averiguar y relacionar las propiedades que satisfacen las operaciones definidas en dicho conjunto y relacionando las operaciones usuales de **R** como cuerpo. El *proceso* estructura CSELH se *coordina* con el *proceso* paralelogramo para obtener el *proceso* combinación lineal, al relacionar pares ordenados del conjunto solución de una ELH y comparar con el CSELNH, Figura 164.

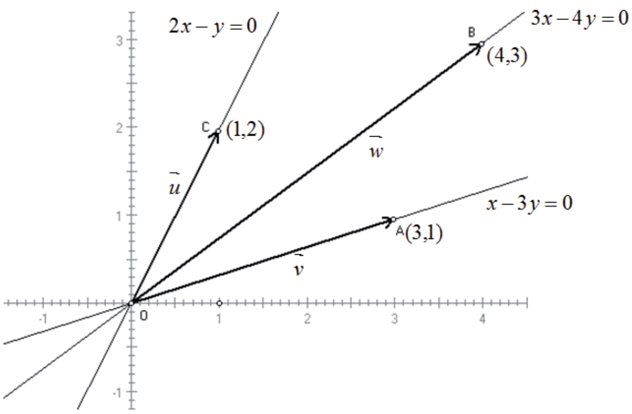


Figura 164: Relación de los pares ordenados de los conjuntos solución de ELH.

Por otro lado, el *proceso* combinación lineal se *coordina* con el *proceso* operar con pares ordenados para obtener el proceso ($\mathbf{R}^2$, +, $\cdot_{\mathbf{R}}$), al comparar los elementos de los conjuntos de $\mathbf{R}\times\{0\}$ y $\{0\}\times\mathbf{R}$ para describir elementos de $\mathbf{R}^2$.

4.4.5.-La encapsulación del *proceso* ($\mathbf{R}^2$, +, $\cdot_{\mathbf{R}}$) en el objeto $\mathbf{R}^2$ espacio vectorial

Por último, el *proceso* ($\mathbf{R}^2$, +, $\cdot_{\mathbf{R}}$) se *encapsula* en el *objeto* $\mathbf{R}^2$ espacio vectorial cuando se compara el CSELH, el CSELNH y subconjuntos de $\mathbf{R}^2$ en cuanto a estructura, reparando en la combinación lineal como una descomposición de un objeto matemático en otros que pertenecen a un mismo conjunto y averiguando axiomas en relación con el cuerpo de los números reales para garantizar dicha descomposición. Relacionar la combinación lineal en el CSELH con el método del paralelogramo, Figura 165, pone de relieve aspectos geométricos que se pueden involucrar.

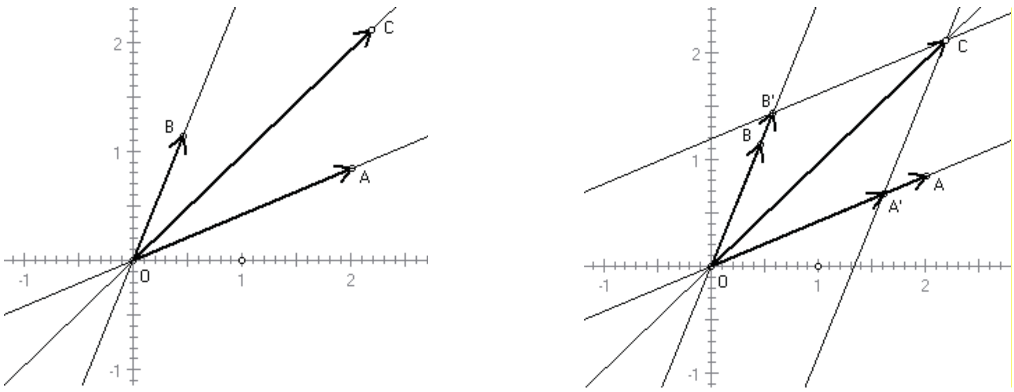


Figura 165: La relación entre pares ordenados del conjunto solución de tres ELH que se asocian aditivamente.

En las proyecciones de este trabajo se presenta la utilización de software Geometer's Sketchpad para el diseño de actividades y fortalecer los aspectos geométricos que se han manifestado.

4.5.-Sobre la aplicación de clases a la luz del ciclo ACE

Una vez validada la DG preliminar para construir el espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y realizado los ajustes necesarios para precisar aún más respecto de las construcciones y mecanismos mentales dispuestas en ella, en función de lo que se observó del desempeño de los estudiantes, en que se indicaron en los apartados anteriores; se adaptó un curso de la malla curricular de los estudiantes de la carrera de pedagogía en matemática de U3, el cual se denomina "Optativo III: Matemáticas Específicas".

Para esta oportunidad dicho curso se enfocó al trabajo de las operaciones binarias, el conjunto solución de una ecuación lineal homogénea y no homogénea de dos incógnitas y el plano cartesiano para indagar en la concepción de cartesiano $\mathbf{R}^2$ y algunos aspectos de la construcción del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ que tenían estos estudiantes, a la luz de la teoría APOE, aplicando para ello el ciclo ACE (Arnon, et al; 2014, p. 58-59). En los anexos se presenta una planificación de los distintos aspectos que se trabajaron.

4.5.1.-Sobre la clasificación jerárquica y la selección de informantes del caso 3 para una entrevista al final del curso.

Una de las primeras actividades fue indagar el tipo de concepción que tenían los estudiantes del concepto operación binaria en términos de las construcciones y mecanismos mentales. Para ello se elaboró un cuestionario que se le aplicó como un diagnóstico antes de comenzar a desarrollar las actividades, ejercicios y la discusión en clase; todo lo anterior desde un trabajo colaborativo al interior del aula. En el CD que se adjunta a este trabajo se pueden revisar tanto las actividades desarrolladas por los distintos estudiantes como las grabaciones de audio y vídeo que se generaron, evidencia del desarrollo de este curso. A continuación las tres preguntas que se aplicaron para luego analizar la clasificación jerárquica de éstos estudiantes desde un dendograma.

1) Dada la operación binaria Δ definida en el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ la cual se define por medio de la tabla de doble entrada:

Δ	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	1	1
3	3	1	1	4
4	4	2	3	4

a) Determine si (A,Δ) cumple con: Existencia de clausura, existencia de elemento neutro, existencia de elemento inverso. Justifique su respuesta.
b) Resuelva $x \Delta 2 = 1$, justifique su respuesta
c) Resuelva $x \Delta 4 = 1 \Delta 3$, explique su respuesta
d) Existirá un B, subconjunto de A, tal que (B, Δ) cumpla con existencia de clausura, existencia de elemento neutro, existencia de elemento inverso. Justifique sus respuestas.
e) Redefina Δ para que cumpla con el apartado 1a).

2) Sea $A = \{e / e : ax + by = 0; a, b, x, y \in \mathbf{R}\}$. Definimos las operaciones + y $\bullet$ como sigue:
$+ : A \times A \to A$; $(e_1, e_2) \to e_1 + e_2 : (a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)y = 0$. Siendo $e_1 : a_1x + b_1y = 0$ y $e_2 : a_2x + b_2y = 0$
$\bullet \cdot : \mathbf{R} \times A \to A$; tal que $(k, e) \to k \bullet e : a^k x + b^k y = 0$ con $\mathbf{R}$ como cuerpo.

a) Determine si (A, +) cumple con: existencia de clausura y existencia de elemento neutro. Justifique su respuesta.
b) Si $e : x + 2y = 0$ Determine 2•e + 3•e + e. Explique su respuesta
c) Determine 6•e. Explique su respuesta.

d) ¿De cuántas formas puede resolverse la expresión $k\bullet e_1 + k\bullet e_2$? Explique.
e) ¿Qué tipo de operación es $\bullet$? Explique
f) Averigüe si la operación $(A, \bullet_{\mathbf{R}})$ cumple con: existencia de clausura, existencia de elemento neutro, existencia de elemento inverso, existencia de asociatividad, existencia de distributividad. Explique.

3) Defina una operación, $\Phi : B \times B \to B$ en el conjunto $B = \{(a,b) / a, b \in \mathbf{R}^+\}$ tal que se cumpla la propiedad de clausura y elemento neutro. Explique en cada caso.

A continuación, en la tabla N° 77, se presenta un análisis a priori de los posibles argumentos (respuestas) que podrían desplegar los estudiantes en función de las construcciones mentales que se asociaron.

Tabla N°80: Sobre las construcciones mentales y las acciones que realizan los estudiantes del caso 3.

Pregunta		**Argumentos**	**Clave**	**Construcción mental**
1a)	i)	.- Lista todos los casos que garantizan la propiedad de clausura. .-Averigua la propiedad de clausura comparando los elementos del conjunto *A* con los elementos que genera la tabla de doble entrada.	**Ar1P1a** **Ar2P1a**	**A** **P**
	ii)	.- Lista todos los casos que garantizan la existencia de un elemento neutro para (A, Δ). .-Relaciona la intersección de una fila y columna, reflejo de las dos entradas de la tabla, con un elemento neutro.	**Ar3P1a** **Ar4P1a**	**A** **P**
	iii)	.-Verifica si todos los elementos de *A* tienen un elemento inverso determinando un contraejemplo y concluir que no posee la propiedad de elemento inverso. .- Relaciona los pares simétricos de la tabla con el elemento neutro y la posibilidad de que algunos elementos tengan más un inverso de inversos o bien inverso por derecha o por izquierda.	**Ar5P1a** **Ar6P1a**	**A** **P**
1b)		.-Determina, por medio de la tabla, el o los valores de la incógnita o bien aplica un inverso, por izquierda, sin considerar la propiedad asociativa; verificando finalmente el resultado. .-Relaciona que la aplicación de inversos, para transformar una ecuación y resolverla, requiere de la propiedad asociativa.	**Ar1P1b** **Ar2P1b**	**A** **P**
1c)		.-Determina, utilizando la información de la tabla de doble entrada, la no solución de la ecuación. .-Determina que la no existencia de un inverso no imposibilita la solución de una ecuación.	**Ar1P1c** **Ar2P1c**	**A** **P**
1d)		.-Transfiere la estructura de (A, Δ) a cualquier subconjunto de *A*. .-Reduce la matriz de la tabla y chequea las propiedades para un subconjunto de A, observando regularidades de la tabla.	**Ar1P1d** **Ar2P1d**	**A** **P**
1e)		.-Redefine la imagen de aquel par simétrico que no esté asociado con el elemento neutro.	**Ar1P1e**	**P**

Pregunta	Argumento	Clave	Construcción mental
2a)	.-Verifica la clausura atendiendo a la forma de los elementos de A y la propiedad elemento neutro atendiendo a la estructura de (***R***,+). .-Verifica si se cumplen las dos propiedades, utilizando elementos genéricos, relacionando la estructura de (**R**,+) con la operación definida en *A*. .-Define una correspondencia entre un elemento de *A* y $\mathbf{R}^2$ y sugiere una operación para $\mathbf{R}^2$.	**Ar1P2a** **Ar2P2a** **Ar3P2a**	**A** **P** **O**
2b)	.-Resuelve, aplicando las operaciones según el orden: • y + .-Reduce la expresión algebraica verificando que $\forall e \in A$, $1 \bullet e = e$,	**Ar1P2b** **Ar2P2b**	**A** **P**
2c)	.-Resuelve aplicando la definición de la operación binaria.	**Ar1P2c**	**A**
2d	.-Opera según un el orden usual en el cuerpo de los números reales. .-Averigua si se puede distribuir un reducir la expresión en términos de las operaciones que intervienen. .-Argumenta que ambas operaciones no son compatibles	**Ar1P2d** **Ar2P2d** **Ar3P2d**	**A** **P** **O**
2e)	.-Reconoce una operación binaria interna de una externa.	**Ar1P2e**	**P**
2f)	.-Trasfiere la propiedad de un cuerpo a las operaciones involucradas .- Relaciona y enuncia propiedades de una operación Binaria Interna para la operación binaria externa en cuestión.	**Ar1P2f** **Ar2P2f**	**A** **P**

Pregunta	Argumento	Clave	Construcción mental
3)	.-Define una operación binaria Para un subconjunto finito de B .-Define una operación binaria interna que cumple sólo clausura. .-Define una operación binaria interna no usual de $\mathbf{R}^2$ para B con ambas propiedades.	**Ar1P3** **Ar2P3** **Ar3P3**	**A** **P** **O**

Una vez aplicado el cuestionario se tabularon las respuestas de los 12 estudiantes que formaron parte de éste curso taller según las claves que se indican en la tabla N° 78 que se presenta a continuación:

Tabla N°81: Tabulación del desempeño, por parte de los estudiantes caso 3, en el cuestionario y su relación las construcciones mentales.

Estudiante	1ª i)	1a ii)	1a iii)	1 b	1c	1d	1e	2ª	2b	2c	2d	2e	2f	3
E10	2	2	1	2	2	2	2	2	1	1	1	2	1	3
E11	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	2	1	0
E12	1	1	1	1	1	2	2	1	1	1	2	0	1	0
E13	2	2	0	1	2	2	2	2	1	1	2	0	1	1
E14	1	1	1	1	1	2	2	0	1	1	2	2	0	0
E15	1	2	1	1	1	2	1	0	1	1	2	2	0	0
E16	1	1	1	1	1	2	2	1	1	1	1	2	1	0
E17	1	1	1	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2	0
E18	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
E19	1	1	0	1	1	2	1	0	1	1	1	0	0	0
E20	1	1	0	1	1	1	0	2	1	1	0	0	0	0
E21	1	1	2	1	1	2	2	1	1	1	1	0	1	0

Claves: NC (No contesta o No corresponde): 0 / Acción (A): 1 / Proceso (P): 2 / Objeto (O): 3

Una vez tabulada la información se procedió a la elaboración de un dendograma utilizando el software libre PAST para establecer, vía este procedimiento estadístico, una clasificación jerárquica de los estudiantes considerando sus respuestas en función de las construcciones mentales que se establecieron *a priori* en la tabla N°78. El dendograma, en la Figura 166, se elaboró considerando la métrica euclideana y el criterio de agregación grupo de pares. En los anexos una explicación más detallada.

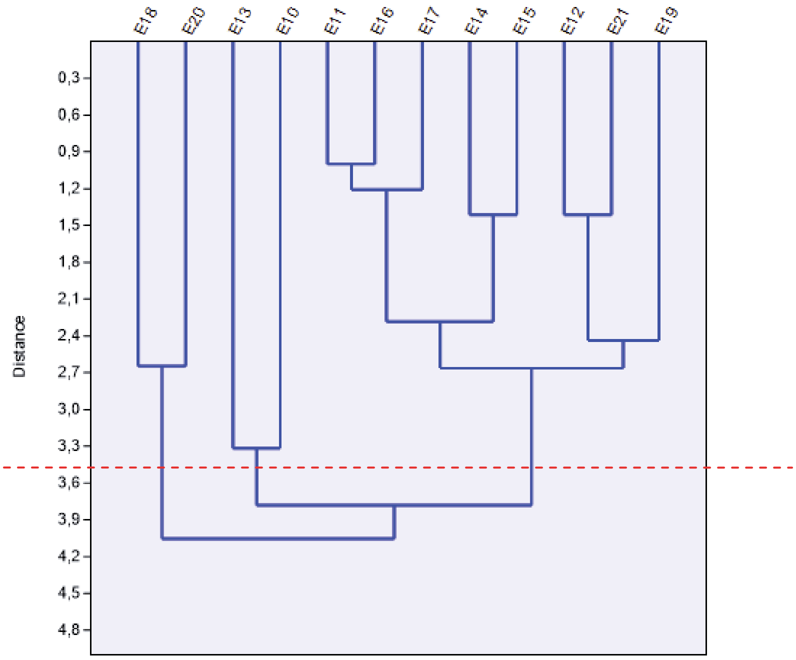


Figura 166: Dendograma estudiantes del caso 3 respecto del concepto operación binaria

Para analizar la clasificación jerárquica dada por el software a un nivel de similaridad se ha considerado tres grupos de estudiantes, Grupo1 (**G1**), Grupo2 (**G2**) y Grupo3 (**G3**) a un nivel de significación del 3,5. Los cuales quedaron conformados por los estudiantes **G1**: **E18** y **E20**; G2: **E13** y **E10**; **G3**: **E11**, **E12**, **E14**, **E15**, **E16**, **E17**, **E18**, **E19** y **E21**.

De los tres grupos iniciales se prestó atención en el **G2** compuesto por **E10** y **E13**., quienes además de ser muy similares en función de sus respuestas al desempeño del cuestionario en términos de la teoría APOE manifiestan una concepción objeto de operación, no así los estudiantes de los **G2** y **G3**. En particular los estudiantes de **G1** manifiestan una concepción *acción* del concepto de operación binaria y los estudiantes del **G3** manifiestan una concepción proceso de ésta. Una vez finalizado el trabajo de clases, se entrevistó al estudiante **E13** del **G2**. En los anexos se puede encontrar más detalles del curso y de los recursos que se utilizaron.

4.5.2.-Entrevista a E13 una vez culminado el curso optativo a Estudiantes U3

Una vez terminado el curso que se adaptó para los estudiantes de pedagogía en matemática y computación de la U3, se solicitó una entrevista a **E13** y **E10** accediendo voluntariamente sólo **E13**, considerándose las preguntas de la entrevista que se utilizaron con **E4**. A continuación algunos fragmentos de la entrevista a **E13** y su respectivo análisis.

Esta comienza con la siguiente solicitud, determine la ELH asociada a la solución (-3,2), en la Figura 167 se puede apreciar el proceder del **E13** quien manifiesta dos posibles caminos para obtener la ELH.

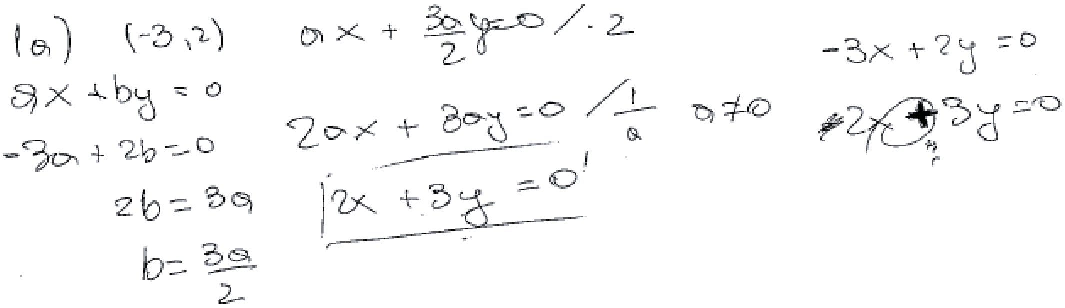
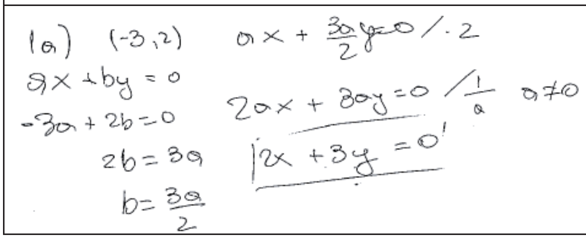
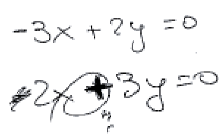


Figura 167: Determinación de una ELH a partir de una solución de ésta

En la Tabla N°82 el fragmento 1 a la entrevista a **E13** respecto de la obtención de una ELH a partir de una solución de ésta.

Tabla N°82: Fragmento 1 de la entrevista a **E13**, obtener a todos los elementos del CSELH a partir de un elemento con la adición de soluciones en el CSELH.

<table>
<tr><th colspan="2">1b) Dada la solución (-3, 2) de una ELH será posible, a partir de ese elemento, obtener la ELH.</th></tr>
<tr><td colspan="2">E13: …todas las homogéneas son ax + by = 0
I: Por qué x e y, porque no z, w o t
E13: …pues siempre las letras que se vienen a la mente en cuanto a formar una ecuación es x e y…
I: Y por qué dos y no tres
E13: por ser un par ordenado…entonces en este caso reemplazaríamos el par ordenado (trabaja en la hoja)
E13: Entonces yo idearía la forma de despejar uno de los dos valores o también podría inmediatamente escribir -3x + 2y = 0 y en el otro caso… (retoma el primer procedimiento para obtener la ELH, despeja y reemplaza)
E13: …no sé por qué no sería…(duda respecto de las dos respuestas distintas que obtiene)</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

En primer lugar, a **E13** se le presentan dudas al pasar directamente de la solución (-3,2) a la ELH -3*x* + 2*y* = 0 al verificar luego que dicha solución satisface 2*x* + 3*y* = 0, lo que pone de manifiesto la *construcción acción* relacionar coeficientes de una ELH con las componentes de una solución de ésta. Finalmente **E13** muestra que es posible obtener una ELH a partir de una de sus soluciones, poniendo de manifiesto la *construcción acción* solución de una ELH.

En la Tabla N°83, los argumentos **E13** para mostrar que no es posible que a partir de un elemento del CSELH y la adición usual no es posible obtener a todos los elementos de éste.

Tabla N°83: El fragmento 2 de la entrevista a **E13**, obtener a todos los elementos del CSELH a partir de un elemento con la adición de soluciones en el CSELH.

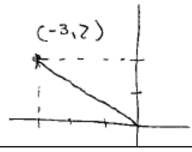
1b) Dada la solución (-3, 2) de una ELH será posible, a partir de ese elemento, obtener a todos los elementos del CSELH.
E13: …en total no (escribe la forma de sumar usual en $\mathbf{R}^2$) **E13**:… entonces esto sería sumar siempre el mismo par ordenado… entonces (-3, 2) + (-3, 2) = (-6, 4) **I**: Y ese elemento pertenecerá al conjunto solución (se le indica por el par ordenado suma) **E13**: Sí, pues al evaluar en la ELH que se obtuvo…da cero **I**: Pero con ese puedo obtener otro, sí pero no va a ser todos, pues va aquedar obviamente un resto de elementos que no van a ser…pues vamos a encontrar los múltiplos de dos, los múltiplos de tres respecto de su posición. Pero no en general. **E13**: Por ejemplo si tenemos el (-3/2, 1) al sumar los otros nunca nos va a dar aunque igual pertenece (se le pide que lo registre y lo explique en la hoja de papel).
1)b) $(a,b)+(c,d) = (a+c,\ b+d)$ $(-3,2)+(-3,2) = (-6,4)$ EL PAR $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$ AL EVALUARLO ES S.

Se hace notar que **E13** exhibe un tipo de solución que también muestra **E9**. Solución que incorpora en sus componentes a la pendiente de la recta vectorial asociada a la **ELH**, evidencia de la *construcción proceso* asociar un número real a una de las incógnitas de una ELH. Por otro lado, el hecho de que el **E13** construya un contra-ejemplo para hacer ver que no es posible obtener sólo con la suma usual de $\mathbf{R}^2$ y un elemento fijo del CSELH todos los elementos de éste, evidencia una *concepción proceso* de cartesiano $\mathbf{R}^2$ y a la vez pone de manifiesto la *construcción proceso* múltiplo escalar de una solución.

Cabe destacar nuevamente, que el sumar un elemento consigo mismo actúa como *mecanismo* de *coordinación* entre la *construcción proceso* suma de soluciones con *la construcción proceso* todas las soluciones de una ELH para dar paso a la *construcción proceso* ponderación múltiplo escalar de una solución.

En la Tabla N°84 se presentan algunos de los argumentos, por parte del **E13**, a la pregunta de si es posible obtener todos los elementos del CSELH desde un elemento fijo y la ponderación por escalar.

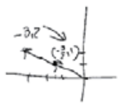
Tabla N 84: El fragmento 3 de la entrevista a **E13**, obtener a todos los elementos del CSELH a partir de un elemento y la ponderación de una solución del CSELH por un escalar.

1c) Dada la solución (-3,2) de una ELH será posible, a partir de ese elemento, obtener a todos los elementos del CSELH con la ponderación por escalar.
E13: Depende si el escalar pertenece a los naturales o los enteros o si el escalar pertenece a **R**, sí o sí me va a dar todos los elementos del conjunto. I: Efectivamente, estamos pensando en un número real como escalar **E13**: Entonces sería ese escalar por el vector (escribe la relación) **E13**: Si uno ve la parte de la suma (aludiendo a los múltiplos escalares) el "alfa" va a tomar esos números 2, 3, …al multiplicarlos obviamente nos va a dar la suma y sí o sí va estar éste (refiriéndose al vector pendiente) al multiplicar por 1/2 y va a poder generar a todos… **I**: Geométricamente, ¿qué significará eso?, ¿Cómo lo puede explicar geométricamente? (piensa un rato) **E13**: Tomaría este elemento como un vector (dibuja un sistema de coordenadas y describe donde estará el vector) **E13**: Entonces como es una ELH obviamente el par (0,0) pertenece también…tenemos ese vector. el alfa va ir dando la longitud…si el alfa es pequeño, el vector se va a ir achicando y si el alfa es más grande, obviamente el vector va ir agrandándose…(se le explica que el alfa permitiría un tipo de barrido) E13: …también el alfa puede ser negativo entonces va ir para el otro lado…
1) c) $\alpha \in N$ $\alpha \in Z$ $\alpha \in R$ $\alpha(-3,2)$ 

Lo expresado por **E13**, pone de manifiesto una *concepción proceso* de **R**-{0} como grupo multiplicativo. Por otro lado, relacionar la ponderación de una solución con la dilatación y contracción de un segmento dirigido, da cuenta de una *concepción proceso* de vector en el plano cartesiano.

En la Tabla N°85 la respuesta del **E13** a la relación entre las soluciones y los escalares en una ecuación lineal homogénea con pares ordenados.

Tabla N°85: El fragmento 4 de la entrevista a **E13**, interpretar escalares y soluciones de una ELH de pares ordenados.

1e) ¿Qué podemos decir de los escalares en la ELH siendo (*a*, *b*) y (*c*, *d*) soluciones de ésta? Y cómo podríamos interpretar geométricamente las posibilidades de esos escalares.	
E13: …tenemos el caso obvio que este par sea cero y este otro sea cero **I**: Ud. dice que podríamos considerar casos **E13**: Lo que pienso en el caso que estos no fueran los nulos, fueran cualquier elemento del conjunto solución (pregunta si ambos elementos pertenecen al mismo conjunto solución y se le responde que sí…luego escribe una ecuación homogénea con las soluciones particulares obtenidas y dice que resolverá un sistema de ecuaciones) **E13**: … existen alfa y beta si los elementos son del mismo conjunto solución…pues van a tratar de eliminarse esos tamaños… (plantea y resuelve un sistema de coordenadas para explicar con vectores…)	
1)e) $\alpha(a,b)+\beta(c,d)=(0,0)$ i) $(a,b)=(0,0) \wedge (c,d)=(0,0)$ α y β NO TIENE [illegible].	ii) $\alpha(-3,2)+\beta(-\frac{3}{2},1)=(0,0)$  $-3\alpha+\frac{3}{2}\beta=0$ $2\alpha+\beta=0$ $-2\alpha=\beta$ $-3\alpha+3\alpha=0$

E13 analiza un caso particular y determina que el sistema de ecuaciones es consistente, es decir que tendrá solución disti6nta de la trivial, permitiendo que los vectores en cuestión puedan anularse aditivamente dada la posibilidad de contracción, dilatación o inversión de éstos, lo que evidencia una *concepción proceso* de cartesiano $\mathbf{R}^2$.

En la Tabla N°86 algunos argumentos del estudiante **E13** a la posibilidad de transformar una ELNH en ELH.

Tabla N°86: El fragmento 5 de la entrevista a **E13**, transformar una ELNH en una ELH.

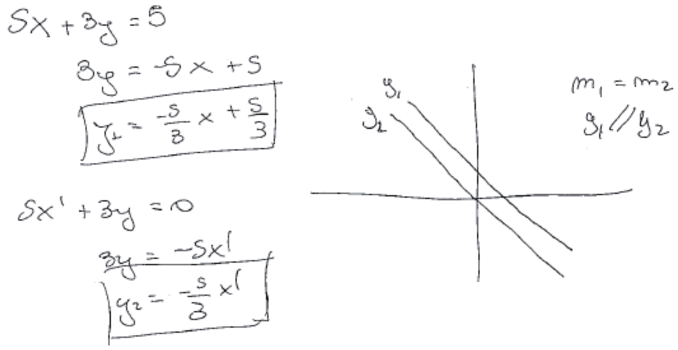
2a) ¿Podría trasformar la ELNH 5*x*+3*y* = 2 en una ELH?	
E4: …Creo que sí…buscaría que nuestros elementos estén igualados a cero (escribe en la hoja de trabajo, para ello factoriza y hace luego un cambio de variable escribiendo una ELH, luego se le pide que piense si hay otra posibilidad de hacer lo mismo) **E4**: …repitiendo el mismo procedimiento y haciendo un cambio de variable (se le pide que realice lo que indica)	
2) $\cancel{5x+3y=5}$ $5x+3y-5=0$ $5x-5+3y=0$ $5(x-1)+3y=0$ $x'=x-1$ $\boxed{5x'+3y=0}$	$+-5$ S: C S ELNH $5x+3y-5=0$ $\cancel{x\ \ 3y-5}$ $5x+3(y-\frac{5}{3})=0$ $y'=y-\frac{5}{3}$ $\boxed{5x+3y'=0}$

E13 hace mención a la forma estándar de una ELH para luego, aplicando un inverso, factorizando una expresión y haciendo uso de un cambio de variable, obtiene una ELH a partir de la ELNH. Lo anterior pone de manifiesto una *concepción proceso* del plano cartesiano y además una *concepción proceso* de **R** como cuerpo.

En la Tabla N°87 los argumentos **E13** a una interpretación geométrica a la transformación de la ELNH en ELH.

Tabla N°87: El fragmento 5 de la entrevista a **E13**, transformar una ELNH en una ELH.

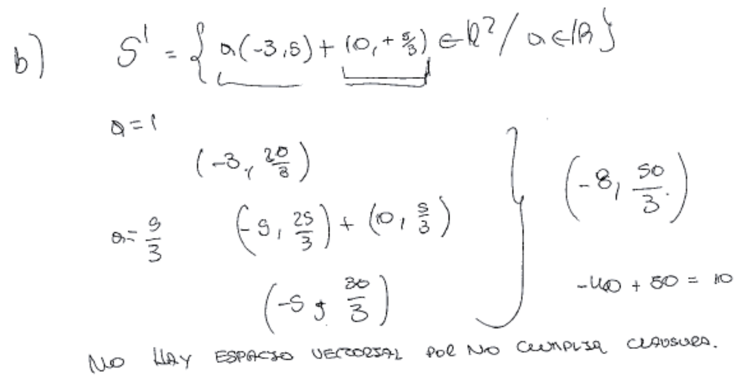
2a) ¿Podría trasformar la ELNH 5*x*+3*y* = 5 en una ELH?
E13: lo que yo veo geométricamente haciendo un esbozo (dibuja ejes, gradúa y luego grafica…) **E13**: Ambas rectas son paralelas al hacer el cambio de variable es lo mismo pero lo trasladé al origen…(no habla de traslación de un eje con el cambio de variable) **I**: Algún elemento matemático que me hable del paralelismo **E13**: Sí, sus pendientes…sus pendientes son iguales, entonces si



En definitiva el **E13** grafica la ELNH y luego la ELH asociada por medio del cambio de variable, poniendo de manifiesto una traslación paralela entre dos rectas; no asociando el cambio de variable con la traslación de ejes. Por otro lado, **E13** transforma la ELNH y ELH en la ecuación particular de la recta y luego compara las pendientes de las rectas asociadas a éstas ecuaciones, evidenciando una *concepción proceso* de plano cartesiano.

En la Tabla N°88 se presentan algunos argumentos del **E13** a la pregunta, ¿el CSENH con las operaciones usuales de $\mathbf{R}^2$ es un espacio vectorial?

Tabla N°88: El fragmento 6 de la entrevista a **E13**, el CSELNH será un espacio vectorial.

2b) El conjunto solución de una ELNH con las operaciones usuales ¿será un espacio vectorial?
E4: ... mi conjunto solución sería un "*a*" por… tomando un representante del conjunto (-3,5) y le agregaríamos el vector de traslado. I: Correcto, porque Ud. está diciendo que las rectas son paralelas, entonces están vinculadas desde una traslación. E13: Exacto, entonces ahora solamente tendría que ser el vector de traslado que sería (0,5/3) I:…podría yo verificar si para un "*a*" cualesquiera se obtiene una solución de la ELNH E13: Tomemos el más fácil con a = 1 (hace cálculo y se percata de un error de signo rectificando luego el vector traslación) **I**: … *S*' con las operaciones usuales de $\mathbf{R}^2$ será un espacio vectorial (se le presenta los axiomas que definen a un espacio vectorial) **E13**: …tendríamos que corroborar con las propiedades… la pregunta es si tengo que probar que es un grupo (se le explica que si bien es necesario tener un grupo podría existir procedimientos que acorten la verificación de ser grupo con una operación binaria…) **E13**: (después de pensar bastante y en el intertanto insistir en la pregunta y enfocarse en las propiedades de grupo)…sea a = 5/3 para no ser tan entero (determina un nuevo elemento del CSELH)


E13, si bien entiende que (*S*',+) debe ser un grupo, le cuesta tomar la iniciativa respecto del chequear propiedades, pues podría estar pensando en demostrar, aspecto que no se consultó y se pasó por alto en la entrevista. Finalmente, suma dos elementos cualesquiera y verifica que la suma no pertenece a *S*' manifestando que no es un grupo con la adición usual de $\mathbf{R}^2$. De acuerdo a lo manifestado por **E13**, éste evidencia una *concepción proceso* de espacio vectorial $\mathbf{R}^2$.

En la Tabla N°89 se aprecia los argumentos de **E13** para responder a la pregunta si es posible definir operaciones usuales para que *S*' sea un espacio vectorial, manifestando que su sospecha estaba el (0,5/3) que hace que varíe el CSELH

Tabla N°89: El fragmento 6 de la entrevista a **E13**, el CSELNH será un espacio vectorial.

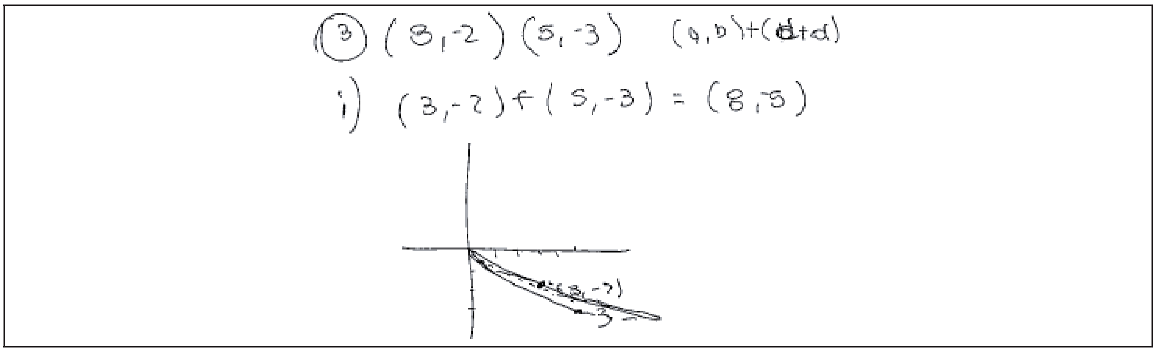
2b) ¿El conjunto solución de una ELNH con las operaciones usuales será un espacio vectorial?
I: Recuerde que en una pregunta anterior Ud. definió la adición usual en $\mathbf{R}^2$ (se le muestra la hoja de trabajo) **E4**: ...entonces lo que yo haría ahora… viendo si se puede o no, restaría el a(-3,5) con (0, 5/3)… para poder volver al mundo original (pensando en el CSELH, ya que este es un espacio vectorial)...
c) $S' = \{a(-3,5)+(0,\frac{5}{3}) \in \mathbb{R}^2 / a \in \mathbb{R}\}$ $\overset{\in S'}{(a,b)} - (0,\frac{5}{3}) = (a, b-\frac{5}{3})$ Ej: $= (-8, \frac{50}{3} - \frac{5}{3})$ $= (-8, \frac{45}{3})$ HAY COMPLEMENTO ENTRE AMBAS OPERACIONES. (suma DE PARES Y MULTIPLICACIÓN POR ESCALAR)

E13, si bien no define en términos formales la adición no usual para *S*’, se aproxima a dicha operación. Para ello tiene presente que el CSELH es un espacio vectorial, luego deshaciendo la traslación podría recuperar las propiedades que sí se satisfacen para el CSELH. Lo anterior evidencia una *concepción proceso* de operación binaria interna en vías de *encapsular* en un *objeto* operación binaria.

En la Tabla N°90 se presentan algunos argumentos del **E13** a la pregunta, ¿es posible obtener todo $\mathbf{R}^2$ a partir de dos elementos fijos de dos ELH no equivalentes y una operación usual?

Tabla N°90: El fragmento 7 de la entrevista a **E13**, analizar si una operación binaria y dos soluciones de dos ELH’s no equivalentes permiten obtener a todo $\mathbf{R}^2$.

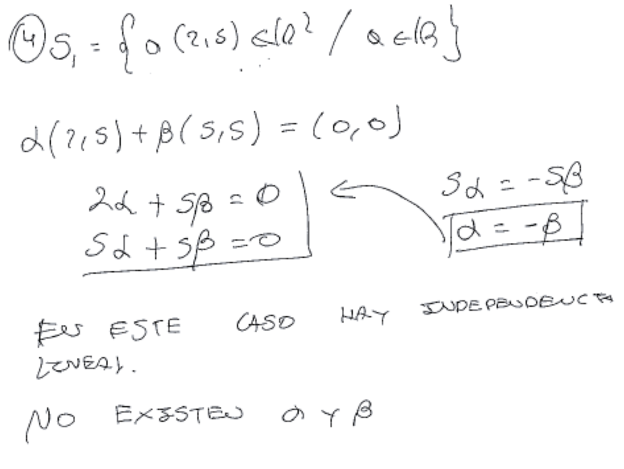
3) ¿Sólo con la adición de pares ordenados con dos soluciones de dos ecuaciones homogéneas no equivalentes se puede obtener todo $\mathbf{R}^2$.
I: …Será posible obtener todos los elementos del CSELH con sólo dos elementos de dos ELH’s no equivalentes sólo con una operación usual, en particular pensemos en la adición usual (se le indican los dos elementos fijos arbitrarios) **E13**: …bueno sumaria para ver…cual es el comportamiento de ellos (hace cálculos en su hoja de trabajo) **E13**: No, pienso que no, no…estoy pensando en algo geométrico…pienso en vectores (dibuja vectores en el plano cartesiano) **E13**: Entonces la suma va estar en el medio, por la suma de vectores… como estas son dos rectas van a desarrollar otra recta pero $\mathbf{R}^2$ en toral no (se le trata de explicar que si bien obtiene un nuevo vector con el método del paralelogramo piense en la posibilidad de seguir sumando y que parezcan otros).



E13 entiende que con la suma usual y la ponderación por escalar de $\mathbf{R}^2$ es posible considerando dos soluciones fijas, asociadas a dos ELH's no equivalentes, pero no logra un argumento convincente que justifique la imposibilidad de obtener a todo $\mathbf{R}^2$ con sólo una operación usual de $\mathbf{R}^2$. Lo anterior pone de manifiesto que necesita *coordinar construcción proceso* suma de vectores con la *construcción proceso* suma pares ordenados.

Finalmente en la Tabla N°91 los argumentos a le pregunta si sólo con la multiplicación es posible obtener a todos los elementos de $\mathbf{R}^2$ a partir de los dos elementos fijos.

Tabla N°91: Fragmento 6 de la entrevista a **E13**.

4) ¿Existirá un sub-espacio vectorial que contenga los puntos A (2,5) y B (5,5)?
E13: …Sí pienso que sí porque el espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ contiene a todos los elementos espacios vectoriales de $\mathbf{R}^2$ (se le indica que es para un sub-espacio vectorial de $\mathbf{R}^2$) **E13**: Dentro de todos esos sub-espacios va a estar el que contiene al (2,5) o el (5,5). **I**:…Indíqueme un sub-espacio conocido de $\mathbf{R}^2$… **E13**: Serían las ELH…tendríamos el S_1 que sería del A (escribe el CSELH asociado a la solución (2,5)


En primera instancia **E13** manifiesta que $\mathbf{R}^2$ contiene a los puntos dados pero no asocia a $\mathbf{R}^2$ como sub-espacio de sí mismo. Luego se centra en la idea de exhibir sub-espacios de $\mathbf{R}^2$ y considera los que genera una solución de una ELH, así se enfoca en el vector (2,5) escribiendo el CSELH. Luego como no logra ver que el otro vector (5,5) plantea una ELH con pares ordenados y luego resuelve un sistema de ecuaciones homogéneo para determinar que los vectores son linealmente independientes. **E13** muestra evidencia que está en vías de *encapsular* la *construcción proceso* cartesiano $\mathbf{R}^2$ en la *construcción objeto* espacio vectorial $\mathbf{R}^2$.

En general, considerando los desempeños del **E13** en el desarrollo del curso optativo matemáticas específicas y sus argumentos en la entrevista, se puede declarar que si bien logran *coordinar procesos* que permiten mostrar evidencia de la *construcción proceso* cartesiano $\mathbf{R}^2$ está en vías de una *encapsulación* del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$. Es importante destacar que dado el conjunto de actividades y la reflexión en éstas permitió dar cuenta de aquellas coordinaciones que se indicaron en los párrafos anteriores.

4.6.- Una DG teórica para el espacio vectorial $\mathbf{R}^3$

En esta sección se presenta una DG preliminar para construir el espacio vectorial $\mathbf{R}^3$ y además se detalla la validación de ésta desde la aplicación de un cuestionario. Cabe mencionar, al igual que para el espacio vectorial $\mathbf{R}^2$, la importancia de trabajar algebraicamente tanto con una ELH y su respectivo conjunto solución como una ELNH, para construir el *proceso* cartesiano $\mathbf{R}^3$, y así *encapsular* dicho proceso en la *construcción objeto* espacio vectorial $\mathbf{R}^3$, poniendo de relieve las construcciones y mecanismos mentales que se explicitan en la DG.

4.6.1.-Sobre la DG del espacio vectorial $\mathbf{R}^3$

En el diagrama, Figura 168, se declaran, en términos teóricos, aquellas construcciones y mecanismos mentales que un estudiante universitario requiere para construir el espacio vectorial $\mathbf{R}^3$ a partir del cartesiano $\mathbf{R}^3$ y del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$.

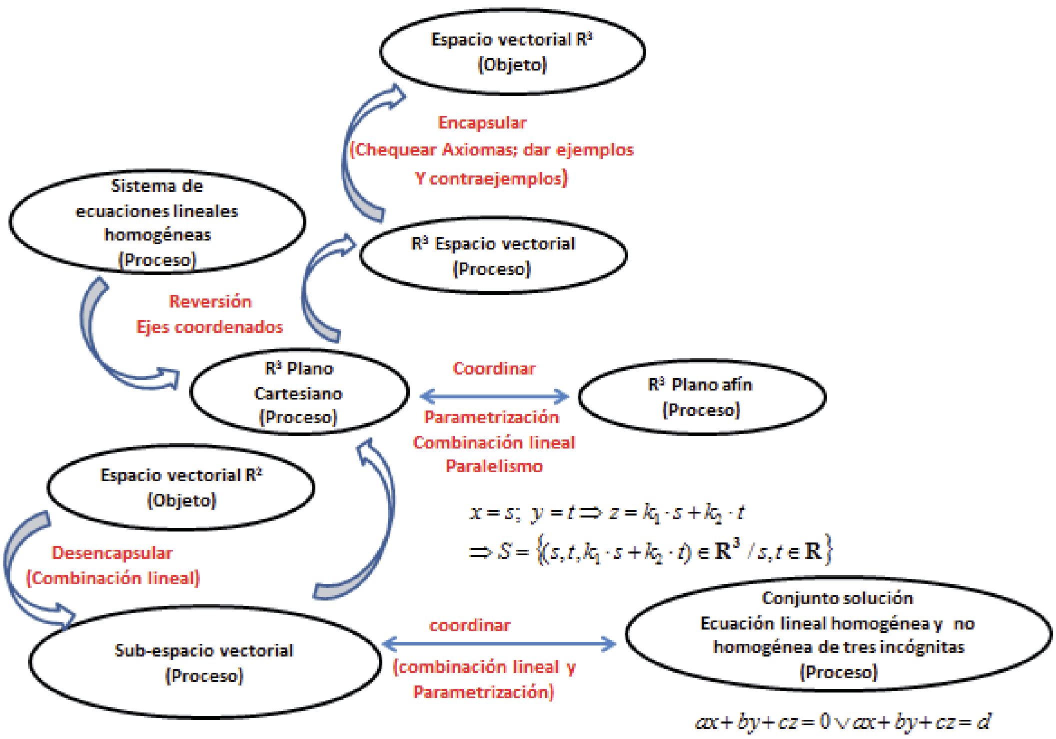


Figura 168: Construcciones y mecanismos mentales para la construcción cognitiva de $\mathbf{R}^3$ espacio vectorial.

El punto de partida para construir el espacio vectorial $\mathbf{R}^3$ es centrar la atención en la resolución de una ELH de tres incógnitas para poner de manifiesto la *construcción proceso* asociar números a las incógnitas de una ELH y determinar una solución de ésta. Dicha *construcción proceso* se debe coordinar con la *construcción proceso* asociar parámetros a las cantidades asociadas a las incógnitas para dar paso a la *construcción proceso* todas las soluciones de una ELH, donde el asignar orden a las cantidades actúa como *mecanismo* de *coordinación*.

Formar un conjunto con todas las soluciones de una ELH, desde el uso de un cuantificador, actúa como *mecanismo* para *encapsular* la *construcción proceso* todas las soluciones, de una ELH de tres incógnitas, en la *construcción objeto* CSELH.

Asociar un solo parámetro a dos de las tres incógnitas de una ELH permite desencapsular la *construcción objeto* CSELH en la *construcción proceso* todas las soluciones, dicha *construcción proceso* se *coordina* con la *construcción proceso* recta vectorial, desde la relación que se establece entre un parámetro y una solución del CSELH, para dar paso a la *construcción proceso* ponderación de una solución por un escalar. Por otro lado, comparar todas las soluciones para uno y dos parámetros y, además, todas las soluciones de una ELNH permite *coordinar* la *construcción proceso* todas las soluciones con la *construcción proceso* operación binaria y obtener la *construcción proceso* adición de soluciones.

Analizar cuál es el número mínimo de soluciones que se requiere para obtener todas las soluciones del CSELH desde la ponderación de una solución por un escalar y/o la adición de soluciones permite *coordinar* la *construcción proceso* ponderación de una solución por un escalar y la *construcción proceso* adición de soluciones en la *construcción proceso* álgebra de soluciones del CSELH. Por otro lado, comprar estructura en el CSELH, CSELNH y $\mathbf{R}^3$ permite *encapsular* la *construcción objeto* estructura del CSELH.

Comparar rectas y planos vectoriales con rectas y plano afines como subconjuntos de $\mathbf{R}^3$ permite *desencapsular* la *construcción objeto* estructura del CSELH en la *construcción proceso* álgebra de soluciones para *coordinarlo* con la *construcción proceso* espacio cartesiano y así dar paso a la *construcción proceso* cartesiano $\mathbf{R}^3$.

Comparar subconjuntos plano vectoriales como subconjunto de $\mathbf{R}^3$ con estructura de $\mathbf{R}^2$ espacio vectorial permite encapsular la *construcción proceso* cartesiano $\mathbf{R}^3$ en la *construcción objeto* espacio vectorial $\mathbf{R}^3$.

4.6.2.-Aplicación del cuestionario

Para indagar en las construcciones y mecanismos mentales que inciden en la construcción del espacio vectorial $\mathbf{R}^3$ se diseñó un cuestionario, considerando la DG teórica del apartado anterior, que incluye cinco preguntas cuyo análisis a priori se presenta a continuación.

4.6.2.1.-Análisis *a priori* de las preguntas del cuestionario para el espacio vectorial $\mathbf{R}^3$

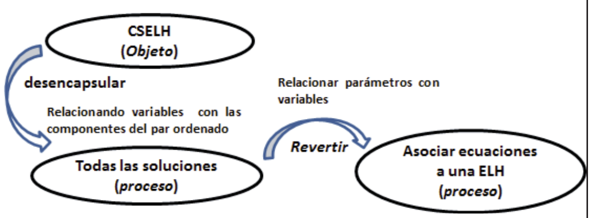
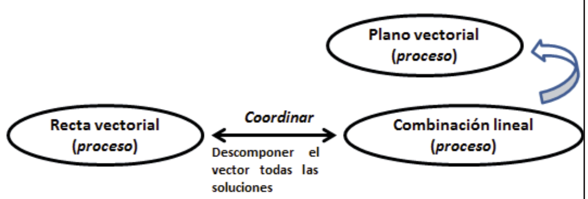
1) Sabiendo que $S = \{(t, k, 3t + 2k) \in \mathbf{R}^3 / k, t \in \mathbf{R}\}$ es el conjunto solución de una Ecuación Lineal Homogénea (ELH) de tres incógnitas, responda a lo siguiente:

a) Determine una ELH y dos elementos que pertenezcan a su conjunto solución.
b) ¿Qué describe, geométricamente, el conjunto S? Comente
c) Sabiendo que *S*, con las operaciones usuales para $\mathbf{R}^3$, es un espacio vectorial. Muestre un sub-espacio vectorial de *S*.

Análisis de la pregunta

En general, se pretende indagar en el tipo de concepción que un estudiante tiene del concepto conjunto solución de una ELH de tres incógnitas y además evidenciar aquella *construcción acción* y/o *construcción proceso* que está involucrado en la determinación de la ELH a partir de su conjunto su solución. En la Tabla N°92 se presentan de manera preliminar lo que se espera en cuanto a las construcciones y mecanismos mentales.

Tabla N°92: Sobre las construcciones y mecanismos mentales y la concepción de conceptos involucrados en la pregunta1.

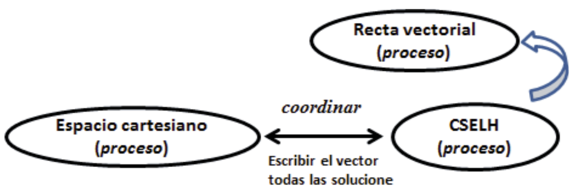
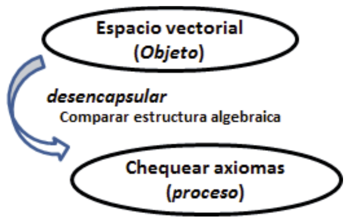
1a) Relacionar las componentes de un trío ordenado con variables evidencia una *concepción proceso* de *n*-upla y a la vez actúa como un *mecanismo* para *desencapsular* la *construcción objeto* CSELH en la *construcción proceso* todas las soluciones y *revertirlo* a la *construcción proceso* asociar ecuaciones a una ELH.	
1b) Descomponer el vector que representa a todas las soluciones de un ELH evidencia una *concepción proceso* de cartesiano $\mathbf{R}^3$ y a la vez actúa como *mecanismo* de *coordinación* entre la *construcción proceso* recta vectorial con la *construcción proceso* combinación lineal para dar paso a la *construcción proceso* plano vectorial.	
1c) Comparar subconjuntos de *S* con la estructura de espacio vectorial desde las operaciones usuales de $\mathbf{R}^3$ evidencia una *concepción proceso* de cartesiano $\mathbf{R}^3$ y actúa como mecanismo para d*esencapsular* el objeto CSELH en el *proceso todas las soluciones*.	

2) Considere el conjunto $M = \{v \in R^3 / v = (0,1,1) + \lambda(1,0,2) + \beta(2,3,0); \lambda, \beta \in \boldsymbol{R}\}$
a) ¿Qué describe, geométricamente, el conjunto *M*? Comente
b) El conjunto *M*, con las operaciones usuales de $\mathbf{R}^3$, ¿es un espacio vectorial? Explique.

Análisis de la pregunta

En general, indagar en el tipo de concepción que un estudiante tiene del concepto CSELNH y su relación con el CSELH desde una estructura algebraica. En la Tabla N° 93 se presentan de manera preliminar lo que se espera en cuanto a las construcciones y mecanismos mentales.

Tabla N°93: Sobre las construcciones y mecanismos mentales y la concepción de aquellos conceptos involucrados en la pregunta 2.

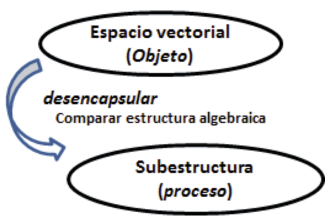
1a) Escribir el vector todas las soluciones de una ELNH asociada, evidencia una concepción proceso de cartesiano $\mathbf{R}^3$ y actúa como mecanismo de coordinación entre la construcción proceso espacio cartesiano y construcción proceso CSELNH para dar paso a la construcción proceso recta vectorial.	
1b) Comparar estructura de *M* desde las operaciones usuales de $\mathbf{R}^3$ evidencia una *concepción proceso* de cartesiano $\mathbf{R}^3$ y actúa como mecanismo para *Desencapsular* el objeto espacio vectorial el *proceso* chequear axiomas.	

3) Considere los puntos *P* (1,-1,-1), *Q*(-2,1,3) y *R*(-1, 1, -1). ¿Existirá un sub-espacio vectorial de $\mathbf{R}^3$ que contenga los puntos dados? Explique.

Análisis de la pregunta

En general, indagar en el tipo de concepción que un estudiante tiene del concepto plano vectorial. En la Tabla N°94 se presentan de manera preliminar lo que se espera en cuanto a las construcciones y mecanismos mentales.

Tabla N°94: Sobre las construcciones y mecanismos mentales y la concepción de aquellos conceptos involucrados en la pregunta 3.

Relacionar vectores asociados a puntos y escribir una ecuación de una recta o un plano vectorial evidencia una *concepción objeto* de plano vectorial y actúa como mecanismo para *desencapsular* el *objeto* espacio vectorial $\mathbf{R}^3$ en el *proceso* subestructura.	

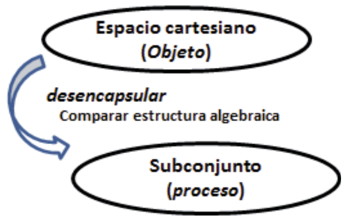
4) Dada la ELH $ax + by + cz = 0$ con $a, b, c \in \boldsymbol{R}$. Analice el conjunto solución en función de los parámetros que la definen. Explique geométricamente cada caso.

a) Conjunto solución cuando $a = b = c = 0$	Explicación geométrica
b) Conjunto solución cuando $a = b = 0$	Explicación geométrica
c) Conjunto solución cuando $a = 0$	Explicación geométrica

Análisis de la pregunta

En general, indagar en el tipo de concepción que un estudiante tiene de los subconjuntos de $\mathbf{R}^3$ en términos de un conjunto solución desde valores específicos asociados a los parámetros de una ELH. En la Tabla N° 95 se presentan de manera preliminar lo que se espera en cuanto a las construcciones y mecanismos mentales.

Tabla N°95: Sobre las construcciones y mecanismos mentales y la concepción de aquellos conceptos involucrados en la pregunta 4.

Relacionar una recta con un subconjunto de $\mathbf{R}^3$ a través de una ELH evidencia una *concepción objeto* de espacio cartesiano y actúa como mecanismo para *desencapsular* el *objeto* espacio cartesiano en el *proceso* vectorial.	

5) Considere el conjunto $W = \{(a,b,0) \in \mathbf{R^3} \,/\, a,b \in \mathbf{R}\}$ y la función biyectiva $f : \mathbf{R^2} \to W$ tal que: $(a,b) \to f(a,b) = (a,b,0)$.

a) ¿*W*, con las operaciones usuales de $\mathbf{R}^3$, es un sub-espacio vectorial de $\mathbf{R}^3$? Explique
b) ¿Es f un isomorfismo? Explique.
c) Si el apartado b) es afirmativo, muestre otros sub-espacios isomorfos a $\mathbf{R}^2$.

Análisis de la pregunta

En general, indagar el tipo de concepción que un estudiante tiene del concepto de sub-espacio vectorial y el de espacios vectoriales isomorfos. En la Tabla N°96 se presentan de manera preliminar lo que se espera en cuanto a las construcciones y mecanismos mentales.

Tabla N°96: Sobre las construcciones y mecanismos mentales y la concepción de aquellos conceptos involucrados en la pregunta 5.

Comparar dimensión de espacios vectoriales para establecer una correspondencia entre el espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y sub-espacios vectoriales de $\mathbf{R}^3$ evidencia una *concepción objeto* de espacio vectorial además actúa como *mecanismo* para *encapsular* el cartesiano $\mathbf{R}^3$ en el objeto espacio vectorial $\mathbf{R}^3$.	

4.6.3.-Análisis de las respuestas al cuestionario 2 por parte de los E3 y E4 caso 1

A continuación se analiza cada una de las respuestas de **E3** y **E4** al cuestionario diseñado para indagar las construcciones y mecanismos mentales que intervienen en la construcción del espacio vectorial $\mathbf{R}^3$. En los anexos los desarrollos de los cuestionarios

4.6.3.1.-Análisis de las respuestas de E3 y E4

Tabla N°97: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 1, apartado 1a) y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

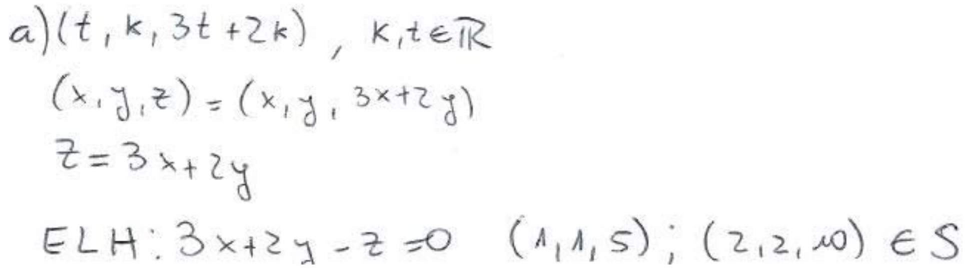
<table>
<tr><th colspan="3">Pregunta 1: apartado 1a)</th></tr>
<tr><th>Estudiante</th><th>Argumentos que manifiestan los estudiantes.</th><th>Construcciones y mecanismos mentales que se manifiestan desde las acciones.</th></tr>
<tr><td>E3</td><td>Según la Figura 169:
Ar1E3P1a: Obtiene el vector todas las soluciones del CSELH.
Ar2E3P1a: Relaciona sus componentes con variables para luego escribir la ELH.</td><td>Ar1E8P31a y Ar2E3P1a evidencia una concepción proceso del cartesiano $\mathbf{R}^3$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">

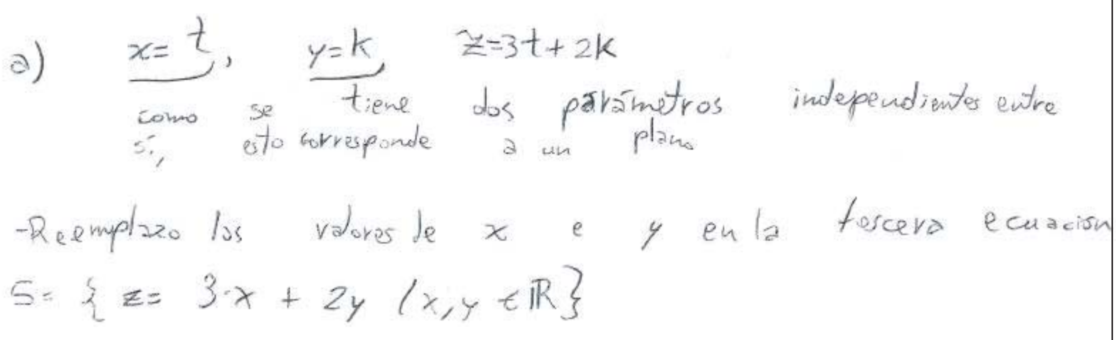
Figura 169: Respuesta de E3 a la pregunta 1a)</td></tr>
<tr><td>E4</td><td>Según la Figura 170:
Ar1E4P1a: Relaciona las componentes del vector todas las soluciones del CSELH con variables.</td><td>Ar1E4P1a evidencia una concepción proceso del cartesiano $\mathbf{R}^3$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">

Figura 170: Respuesta de E4 a la pregunta 1a)</td></tr>
</table>

Comentarios a las respuestas de E3 y E4 caso 1

Tanto el **E3** como el **E4** relacionan el vector todas las soluciones de la ELH con las variables asociadas a dicha ecuación, escribiendo las ecuaciones paramétricas. Evidencia de una concepción proceso de espacio cartesiano $\mathbf{R}^3$.

Tabla N°98: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 1, apartado 1b) y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

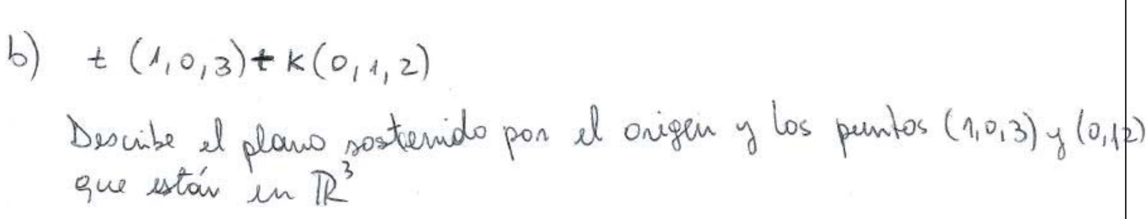
<table>
<tr><th colspan="3">Pregunta 1: apartado 1b)</th></tr>
<tr><th>Estudiante</th><th>Argumentos que manifiestan los estudiantes.</th><th>Construcciones y mecanismos mentales que se manifiestan desde las acciones.</th></tr>
<tr><td>E3</td><td>Según la Figura 171:
Ar3E3P1b: Genera todos los puntos de $\mathbf{R}^3$ desde la combinación de dos vectores del plano.</td><td>Ar3E3P1b evidencia una concepción proceso del plano cartesiano y del cartesiano $\mathbf{R}^3$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">
b) $t\,(1,0,3) + k\,(0,1,2)$
Describe el plano sostenido por el origen y los puntos (1,0,3) y (0,1,2) que están en $\mathbb{R}^3$

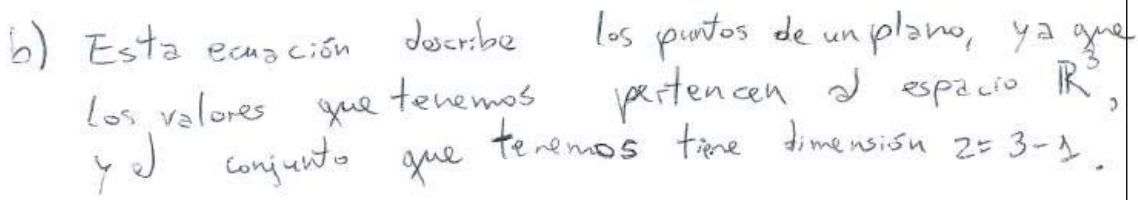
Figura 171: Respuesta de E3 a la pregunta 1b)</td></tr>
<tr><td>E4</td><td>Según la Figura 172:
Ar2E4P1a: Relaciona las componentes del vector todas las soluciones con la dimensión del espacio $\mathbf{R}^3$.</td><td>Ar1E4P1a evidencia una concepción proceso del espacio cartesiano.</td></tr>
<tr><td colspan="3">
b) Esta ecuación describe los puntos de un plano, ya que los valores que tenemos pertenecen al espacio $\mathbb{R}^3$, y el conjunto que tenemos tiene dimensión $2 = 3 - 1$.

Figura 172: Respuesta de E4 a la pregunta 1b)</td></tr>
</table>

Comentarios a las respuestas de E3 y E4 caso 1

El **E3** escribe la combinación lineal de dos vectores, desde el vector todas las soluciones, que interpreta como el plano que contiene el origen del sistema de coordenadas, plano que determinan dos rectas vectoriales. Evidencia de la *construcción proceso* cartesiano $\mathbf{R}^3$. Por otro lado **E4** relaciona el conjunto dado con un plano, sub-espacio de $\mathbf{R}^3$, desde la dimensión de dicho sub-espacio. Evidencia una *concepción objeto* de espacio vectorial $\mathbf{R}^3$.

Tabla N°99: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 1, apartado 1c) y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

<table>
<tr><th colspan="3">Pregunta 1: apartado 1c)</th></tr>
<tr><th>Estudiante</th><th>Argumentos que manifiestan los estudiantes.</th><th>Construcciones y mecanismos mentales que se manifiestan desde las acciones.</th></tr>
<tr><td>E3</td><td>Según la Figura 173:
Ar4E3P1c: Considera una recta vectorial del plano XZ.</td><td>Ar4E3P1c evidencia una concepción proceso del espacio cartesiano.</td></tr>
<tr><td colspan="3">c) Un subespacio de S sería por ejemplo un $U = \{(t, 0, 3t) \in \mathbb{R}^3 / t \in \mathbb{R}\}$
Figura 173: Respuesta de E3 a la pregunta 1c)</td></tr>
<tr><td>E4</td><td>Según la Figura 174:
Ar3E4P1c: Considera una recta vectorial del plano XY.
Ar4E4P1c: Verifica que el conjunto que define la recta vectorial es un sub-espacio vectorial.</td><td>Ar3E4P1c y Ar4E4P1c evidencia una concepción proceso de espacio cartesiano.</td></tr>
<tr><td colspan="3">c) Sea $z=0$, luego $0 = 3x+2y \Rightarrow -2y = 3x$
entonces tenemos $S_1 = \{(x, -\frac{2}{3}x, 0) / x \in \mathbb{R}\} \subset S$
Verifiquemos si S_1 es un subespacio de S
Sea $\alpha \in \mathbb{R}$; $\bar{u}_1, \bar{v}_1 \in S$, $\bar{u}_1 = (u, -\frac{2}{3}u, 0)$, $\vec{v}_1 = (v, -\frac{2}{3}v, 0)$
$\alpha(u, -\frac{2}{3}u, 0) + (v, -\frac{2}{3}v, 0)$
$= (\alpha u + v, -\alpha\frac{2}{3}u - \frac{2}{3}v, 0) = (\alpha u + v, -\frac{2}{3}(\alpha u + v), 0) \in S_1$
Figura 174: Respuesta de E4 a la pregunta 1c)</td></tr>
</table>

Comentarios a las respuestas de E3 y E4 caso 1

E3, trabaja sólo con un parámetro para el vector todas las soluciones del conjunto *S*, haciendo que sea *k* sea 0. Al parecer reconoce en este nuevo conjunto una recta vectorial de $\mathbf{R}^3$ que a su vez la asume como un sub-espacio vectorial de *S*. Evidencia de una *concepción proceso* de espacio vectorial $\mathbf{R}^3$. Por otro lado **E4**, asume en la ELH, cuyo conjunto solución es *S*, que la variable *z* es 0. Considerando con ello una recta que es la intersección del plano XY que con el plano asociado al conjunto *S*. Aunque no repara en el error del despeje que le hace definir el sub-espacio S1 de manera incorrecta. **E4**, independiente del error, verifica que cualquier combinación lineal de vectores de S1 pertenece a S1, evidencia de una concepción proceso espacio vectorial $\mathbf{R}^3$. Además da cuenta de la *concepción proceso* chequear axiomas.

Tabla N°100: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 2, apartado 2a) y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

<table>
<tr><th colspan="3">Pregunta 2: apartado 2a)</th></tr>
<tr><th>Estudiante</th><th>Argumentos que manifiestan los estudiantes.</th><th>Construcciones y mecanismos mentales que se manifiestan desde las acciones.</th></tr>
<tr><td>E3</td><td>Según la Figura 175:
Ar5E3P2a: Identifica en el conjunto M tres puntos que están contenidos en un plano.</td><td>Ar5E3P2a evidencia una concepción acción del concepto plano.</td></tr>
<tr><td colspan="3">

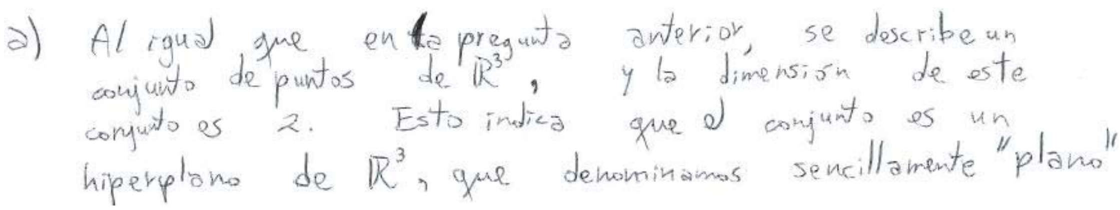
Figura 175: Respuesta de E3 a la pregunta 2a)</td></tr>
<tr><td>E4</td><td>Según la Figura 176:
Ar5E4P2a: Reconoce que la dimensión de un de un sub-espacio de $\mathbf{R}^3$ está asociada a un plano.</td><td>Ar5E4P2a evidencia una concepción proceso de espacio vectorial $\mathbf{R}^3$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">

Figura 176: Respuesta de E4 a la pregunta 2a)</td></tr>
</table>

Comentarios a las respuestas de E3 y E4 caso 1

E3 reconoce tres puntos no colineales, dos de los cuales están asociados a los dos vectores que generan a todo el conjunto. Evidencia de una *concepción acción* plano. El E4 asocia dimensión dos al conjunto, considerándolo como un plano. Evidencia una *concepción proceso* de plano.

Tabla N°101: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 2, apartado 2b) y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

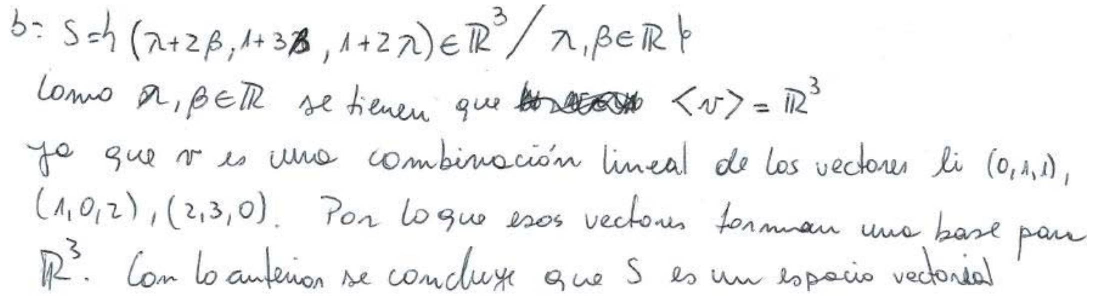
<table>
<tr><th colspan="3">Pregunta 2: apartado 2b)</th></tr>
<tr><th>Estudiante</th><th>Argumentos que manifiestan los estudiantes.</th><th>Construcciones y mecanismos mentales que se manifiestan desde las acciones.</th></tr>
<tr><td>E3</td><td>Según la Figura 177:
Ar6E3P2b: No reconoce que el vector todas las soluciones deja fuera a elemento nulo de $\mathbf{R}^3$.</td><td>Ar6E3P2b evidencia una concepción acción de un conjunto generador.</td></tr>
<tr><td colspan="3">

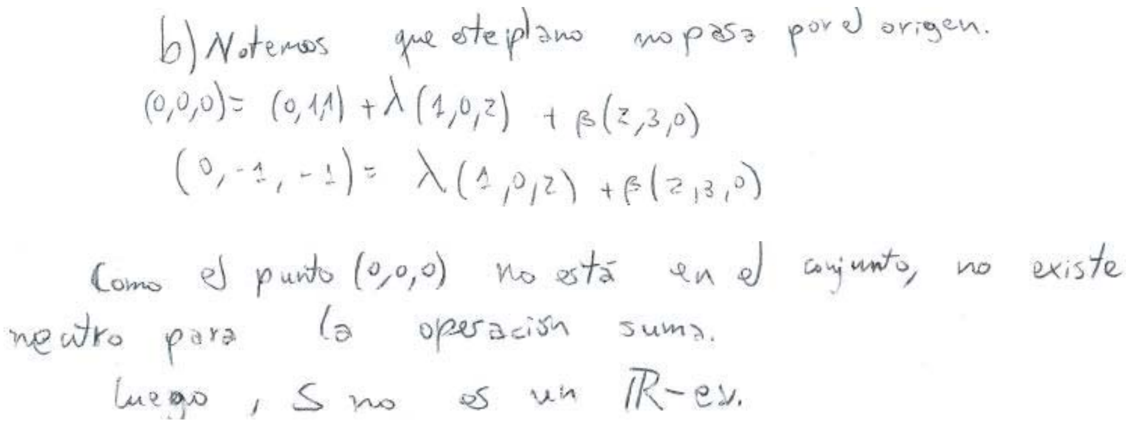
Figura 177: Respuesta de E3 a la pregunta 2b)</td></tr>
<tr><td>E4</td><td>Según la Figura 178:
Ar6E4P2b: Escribe una ecuación vectorial.
Ar7EP42b: Verifica que el neutro aditivo de $\mathbf{R}^3$ no pertenece al conjunto M.</td><td>ArE4P2b y Ar7E4P2b evidencia una concepción proceso de espacio cartesiano $\mathbf{R}^3$ y una cuenta de una concepción proceso de grupo aditivo.</td></tr>
<tr><td colspan="3">

Figura 178: Respuesta de E4 a la pregunta 2b)</td></tr>
</table>

Comentarios a las respuestas de E3 y E4 caso 1

E3 indica que el conjunto *S* es todo $\mathbf{R}^3$, dado que asume que los tres vectores son linealmente independientes, probablemente asociando que cada uno de ellos tiene una componente cero que es distinta al resto. Evidencia una *concepción acción* respecto de conjunto linealmente independiente. El **E4** reconoce en el conjunto *S* un plano que no considera el origen. Para ello escribe una escribe una ecuación y determina que el vector nulo no pertenece al conjunto, asumiendo de esta manera que el conjunto S no es un **R**-espacio vectorial. Esto evidencia una *concepción proceso* de espacio vectorial espacio vectorial $\mathbf{R}^3$.

Tabla N°102: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 3 y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

<table>
<tr><th colspan="3">Pregunta 3</th></tr>
<tr><th>Estudiante</th><th>Argumentos que manifiestan los estudiantes.</th><th>Construcciones y mecanismos mentales que se manifiestan desde las acciones.</th></tr>
<tr><td>E3</td><td>Según la Figura 179:
Ar7E3P3: Escribe una ecuación homogénea con vectores de $\mathbf{R}^3$ para determinar si el conjunto es linealmente independiente.
Ar8E3P3: Establece que ningún sub-espacio propio de $\mathbf{R}^3$ contiene a los puntos dado que los vectores asociados a dichos puntos generan a éste.</td><td>Ar7E3P3 y Ar8E3P3 evidencia una concepción acción de espacio vectorial $\mathbf{R}^3$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\alpha(1,-1,-1)+\beta(-2,1,3)+\gamma(-1,1,-1)=(0,0,0)$
∴ P, Q, R forman una base para $\mathbb{R}^3$
De lo anterior se deduce que no hay un subespacio vectorial propio de $\mathbb{R}^3$ que contenga a los 3 puntos, ya que si los contiene generaría a todo $\mathbb{R}^3$.
Si $\mathbb{R}^3$ se toma como subespacio de $\mathbb{R}^3$, ~~sde~~ si contendría a los vectores.

Figura 179: Respuesta de E3 a la pregunta 3)</td></tr>
<tr><td>E4</td><td>Según la Figura 180:
Ar8E4P3: Escribe una ecuación vectorial.
Ar9E4P3: Verifica que el neutro aditivo de $\mathbf{R}^3$ no pertenece al conjunto M.</td><td>Ar8E4P3 y Ar9E9P3 evidencia una concepción proceso de espacio cartesiano $\mathbf{R}^3$ y da cuenta de una concepción proceso de grupo aditivo.</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\vec{PQ}=(-3,2,4)$ $\quad\vec{PR}=(-2,2,0)$
luego, el plano puede ser descrito por la ecuación
$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / (x,y,z)=(1,-1,-1)+t(-3,2,4)+r(-2,2,0) / t,r\in\mathbb{R}\}$
luego, $(0,0,0)\notin S$
Recordando que por tres puntos pasa un único plano, podemos concluir que no existe un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ que contenga a los tres puntos dados.

Figura 180: Respuesta de E4 a la pregunta 3)</td></tr>
</table>

Comentarios a las respuestas de E3 y E4 caso 1

E3 hace ver que los puntos dados están asociados a un conjunto de vectores linealmente independientes que determinan una base para $\mathbf{R}^3$. Concluye, de esta manera, que no existe un sub-espacio propio de $\mathbf{R}^3$ que contenga los tres puntos dados. Esto evidencia una *concepción proceso* de espacio vectorial $\mathbf{R}^3$. Además da cuenta de la *construcción proceso* álgebra de pares ordenados.

E4 construye dos vectores con un origen común y determina el conjunto de todos los vectores de $\mathbf{R}^3$ con éstos. Hace ver que como dicho conjunto no contiene al vector nulo no existe un sub-espacio propio de $\mathbf{R}^3$ que contiene los puntos dados. Lo que evidencia la *construcción proceso* cartesiano $\mathbf{R}^3$ y evidencia una *concepción objeto* de espacio vectorial $\mathbf{R}^3$.

Tabla N°103: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 4 y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

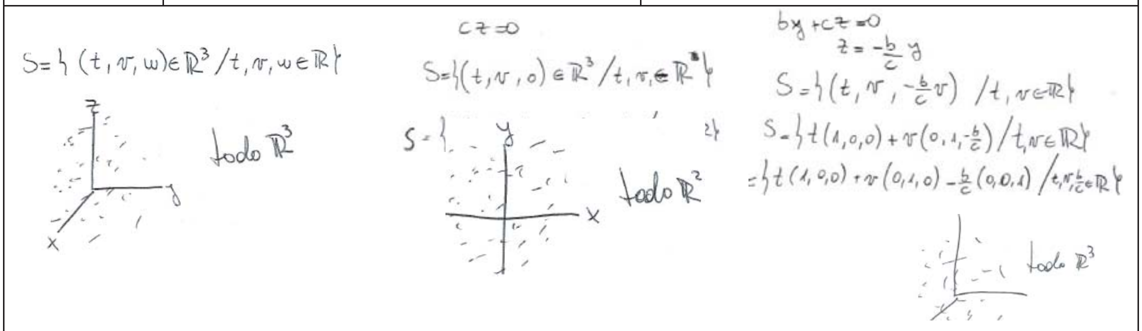
<table>
<tr><th colspan="3">Pregunta 4</th></tr>
<tr><th>Estudiante</th><th>Argumentos que manifiestan los estudiantes.</th><th>Construcciones y mecanismos mentales que se manifiestan desde las acciones.</th></tr>
<tr><td>E3</td><td>Según la Figura 181:
Ar9E3P4: Escribe los conjunto solución de la ELH en función de los valores nulos de los parámetros.
Ar10E3P4: Representa gráficamente el espacio o plano utilizando ejes coordenados.</td><td>Ar9E3P4 y Ar10E3P4 evidencia una concepción proceso de plano y espacio cartesiano.</td></tr>
<tr><td colspan="3">

Figura 181: Respuesta de E3 a la pregunta 4)</td></tr>
<tr><td>E4</td><td>Según la Figura 182:
Ar10E4P4: Escribe los conjunto solución de la E4H en función de los valores nulos de los parámetros.
Ar11E4P4: Representa gráficamente el espacio o plano utilizando ejes coordenados.</td><td>Ar10E4P4 y Ar11E4P4 evidencia una concepción proceso de plano y espacio cartesiano.</td></tr>
</table>

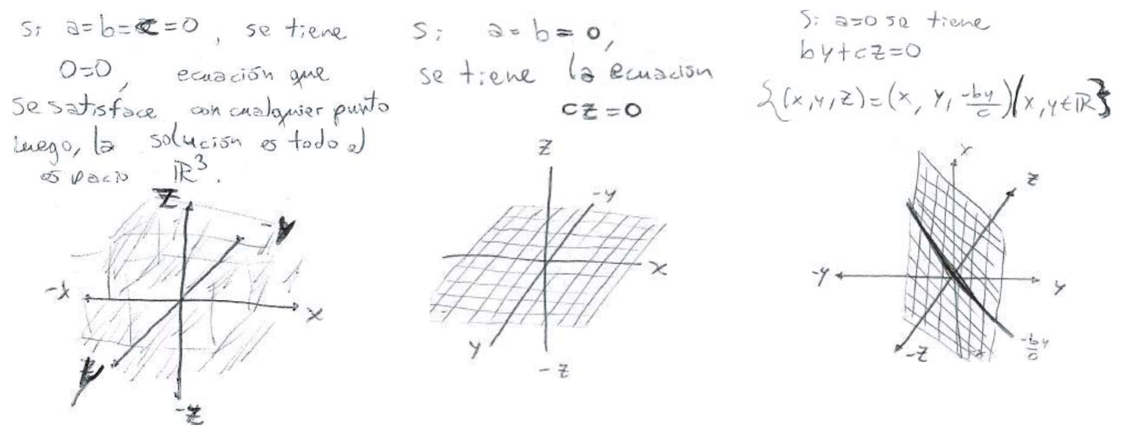


Figura 182: Respuesta de **E4** a la pregunta 4)

Comentarios a las respuestas de E3 y E4 caso 1

Tanto el **E3** como **E4**, representan geométricamente el conjunto solución de una ELH de tres incógnitas en función de los ceros que pueden asumir los parámetros asociados a los coeficientes de ésta, escribiendo, en los casos no triviales, el CSELH. Esto evidencia una *concepción objeto* de espacio cartesiano y da cuenta de la *construcción proceso* de cartesiano $\mathbf{R}^3$. **E3**, asume en el apartado 4b) que el conjunto solución es todo $\mathbf{R}^2$, pudiendo generar alguna confusión el distinguir, por ejemplo, si $\mathbf{R}^2$ es o no un sub-espacio de vectorial de $\mathbf{R}^3$. Por otro lado, **E3** confunde los parámetros con las constantes obteniendo así un espacio cuya dimensión es mayor a la que le corresponde.

Tabla N°104: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 5, apartado 5a) y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

Pregunta 5, apartado 5a)		
Estudiante	**Argumentos que manifiestan los estudiantes.**	**Construcciones y mecanismos mentales que se manifiestan desde las acciones.**
E3	Según la Figura 183: **Ar11E3P4**: Aplica un teorema para mostrar que W es un sub-espacio vectorial.	**Ar11E3P4** evidencia una *concepción proceso* espacio vectorial $\mathbf{R}^3$.

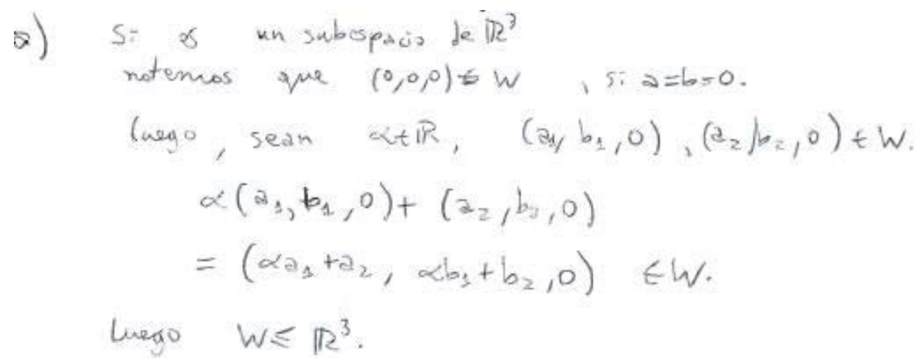


Figura 183: Respuesta de **E3** a la pregunta 5a)

<table>
<tr><td>E4</td><td>Según la Figura 184:
Ar12E4P4: Aplica un teorema para mostrar que W es un sub-espacio vectorial.</td><td>Ar12E4P4 evidencia una concepción proceso espacio vectorial $\mathbf{R}^3$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">a- sea $v, u \in W$, $\alpha \in \mathbb{R}$. $v=(a,b,0)$, $u=(c,d,0)$
$\alpha v+u=(\alpha a+c, \alpha b+d, 0) \in W$
el $\vec{0}$ es claro que está en W
$\therefore W < \mathbb{R}^3$
Figura 184: Respuesta de E4 a la pregunta 5b)</td></tr>
</table>

Comentarios a las respuestas de E3 y E4 caso 1

E3 y **E4** aplican una propiedad para determinar si un subconjunto de un espacio vectorial es un sub-espacio vectorial. Esto evidencia una *concepción objeto* de espacio vectorial $\mathbf{R}^3$.

Tabla N°105: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 5, apartado 5b) y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

<table>
<tr><th colspan="3">Pregunta 5, apartado 5b)</th></tr>
<tr><th>Estudiante</th><th>Argumentos que manifiestan los estudiantes.</th><th>Construcciones y mecanismos mentales que se manifiestan desde las acciones.</th></tr>
<tr><td>E3</td><td>Según la Figura 185:
Ar12E3P5b: Reconoce que f es un homomorfismo y a la vez una biyección.</td><td>Ar12E3P5b evidencia una concepción objeto de función.</td></tr>
<tr><td colspan="3">b) Para ser isomorfismo se necesita que f sea un homomorfismo (T.L) y una biyección, lo cual es claro
$\therefore$ f muestra un isomorfismo entre $\mathbb{R}^2$ y W
Figura 185: Respuesta de E3 a la pregunta 5b)</td></tr>
<tr><td>E4</td><td>Según la Figura 186:
Ar13E4P5b: Determina que f es biyectiva desde la dimensión del Ker(f) y la dimensión de la Im(f).</td><td>Ar13E4P5b evidencia una concepción objeto de espacio vectorial $\mathbf{R}^3$ y actúa como mecanismo de desencapsulación del objeto espacio vectorial en el proceso dimensión de un espacio.</td></tr>
<tr><td colspan="3">b) para que f sea isomorfismo, dim(Ker(f)) debe ser 0
Ker(f) = {(0,0)}, ya que f(0,0) = (0,0,0).
luego, dim(Ker(f)) = 0.
luego, dim(Im(f)) = 2 = dim(W)
Figura 186: Respuesta de E4 a la pregunta 5b)</td></tr>
</table>

Comentarios a las respuestas de E3 y E4 caso 1

E3 reconoce que para que *f* sea un isomorfismo, ésta debe ser un homomorfismo y a la vez ser biyectiva, lo que evidencia una *concepción objeto* de función. **E4** en cambio determina si *f* es una biyección estableciendo propiedades de una transformación lineal, analizando la dimensión del *Ker*(*f*) y comparando la dimensión de la *Im*(*f*) con la dimensión de *W*. Lo que evidencia una concepción objeto de $\mathbf{R}^3$.

Tabla N°106: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 5 y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

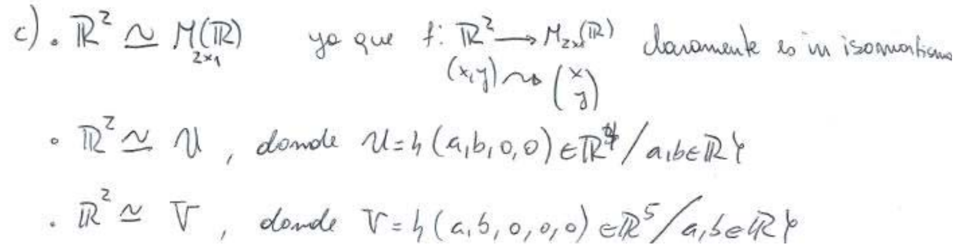
<table>
<tr><th colspan="3">Pregunta 5, apartado 5c)</th></tr>
<tr><th>Estudiante</th><th>Argumentos que manifiestan los estudiantes.</th><th>Construcciones y mecanismos mentales que se manifiestan desde las acciones.</th></tr>
<tr><td>E3</td><td>Según la Figura 187:
Ar13E3P5c: Da ejemplos de espacios isomorfos a $\mathbf{R}^2$ que no son sub-espacios de $\mathbf{R}^3$.</td><td>Ar13E3P5b evidencia una concepción objeto espacio vectorial.</td></tr>
<tr><td colspan="3">

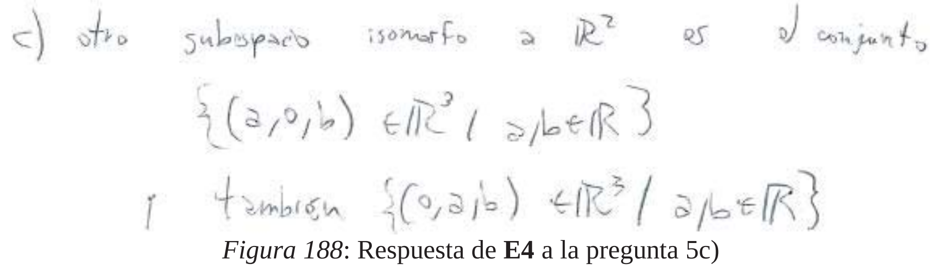
Figura 187: Respuesta de E3 a la pregunta 5c)</td></tr>
<tr><td>E4</td><td>Según la Figura 188:
Ar14E4P5c: Da ejemplos de espacios isomorfos a $\mathbf{R}^2$ que son sub-espacios de $\mathbf{R}^3$.</td><td>Ar14E4P5c evidencia una concepción objeto espacio vectorial.</td></tr>
<tr><td colspan="3">

Figura 188: Respuesta de E4 a la pregunta 5c)</td></tr>
</table>

Comentarios a las respuestas

E3 construye ejemplos de sub-espacios isomorfos a $\mathbf{R}^3$ que no son subconjuntos de $\mathbf{R}^3$, lo que denota una *concepción objeto* de espacio vectorial. En cambio **E4** escribe un sub-conjunto de $\mathbf{R}^3$ que es isomorfo a $\mathbf{R}^2$, lo que evidencia una *concepción objeto* de espacio vectorial $\mathbf{R}^3$.

4.6.3.2.-Análisis de las respuestas de E9 caso 2

Tabla N°107: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 1, apartado 1a) y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

Pregunta 1: apartado 1a)		
Estudiante	**Argumentos que manifiestan los estudiantes.**	**Construcciones y mecanismos mentales que se manifiestan desde las acciones.**
E9	Según la Figura 189: **Ar1E9P1a**: Obtiene el vector todas las soluciones del CSELH. **Ar2E9P1a**: Relaciona las componentes del vector todas las soluciones con variables para luego escribir la ELH.	**Ar1E9P31a** y **Ar2E9P1a** evidencia una concepción proceso del cartesiano $\mathbf{R}^3$.

a) Para $k=t=1$ $(1,1,5)\in S'$; $k=2$; $t=0$ $(0,2,4)\in S'$

Si $(x,y,z)=(t,k,3t+2k)$ como es homogénea nos dice que $x=t$; $y=k$

$z=3t+2k \Rightarrow z-3t-2k=0$. en función de z,t,k

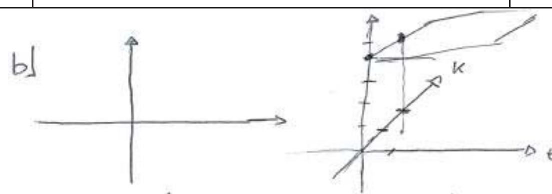
Figura 189: Respuesta de **E9** a la pregunta 1a)

Comentarios a la respuesta de E9 caso 2

E9 asocia variables a las componentes del vector todas las soluciones para obtener ecuaciones paramétricas asociadas a la ELH. Esto evidencia una *concepción proceso* de espacio cartesiano y da cuenta de la reversión de la *construcción proceso* todas las soluciones con la *construcción proceso* separar una ecuación.

Tabla N°108: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 1, apartado 1b) y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

Pregunta 1: apartado 1b)		
Estudiante	**Acciones que manifiestan los estudiantes.**	**Construcciones y mecanismos mentales que se manifiestan desde las acciones.**
E9	Según la Figura 190: **Ar3E9P1b**: Relaciona el CSELH con un plano afín desde la pendiente de rectas afines.	**Ar3E9P1b** evidencia una concepción proceso del plano cartesiano.



Es un plano inclinado creciente con pendiente 3 en el eje de t y 2 en el eje de k.

Figura 190: Respuesta de **E9** a la pregunta 1b)

Comentarios a la respuesta de E9 caso 2

E9 asocia el conjunto dado con un plano inclinado, aunque no verifica si el plano contiene el origen del sistema de coordenadas. Por otro lado le dificulta la representación en un sistema de coordenadas tridimensional, esto evidencia una *concepción proceso* de espacio cartesiano.

Tabla N°109: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 1, apartado 1c) y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

Pregunta 1: apartado 1c)		
Estudiante	**Acciones que manifiestan los estudiantes.**	**Construcciones y mecanismos mentales que se manifiestan desde las acciones.**
E9	Según la Figura 191: **Ar4E9P1c**: Muestra por medio de una propiedad que *S* es un sub-espacio vectorial de $\mathbf{R}^3$.	**Ar4E9P1c** evidencia una *concepción proceso* del espacio vectorial.

c] La ecuacion que caracteriza a S es $(t, k, 3t+2k) = t(1,0,3) + k(0,1,2)$ con $t, k \in IR$. Considerando la base canonica de IR^3 $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ la base de S se puede escribir como $(1,0,3) = (1,0,0)+3(0,0,1)$ y $(0,1,2) = (0,1,0)+2(0,0$
Como IR^3 es espacio vectorial se deben probar solo 3 propiedad
• $(0,0,0) \in S$. Pues para $t=k=0$ $(0,0,3\cdot0+2\cdot0) = (0,0,0)$
• (Es cerrado para la suma y multiplicacion por escalar i.e si $p \in IR$
$(a_1, b_1, 3a_1+2b_1) + p\cdot(a_2, b_2, 3a_2+2b_2) =$
$(a_1+p\cdot a_2, b_1+p\cdot b_2, 3a_1+2b_1+3pa_2+2p\cdot b_2)$
$= (a_1+p\cdot a_2, b_1+p\cdot b_2, 3(a_1+pa_2)+2(b_1+pb_2)) \in S$
donde $a_1+p\cdot a_2 \in IR$ y $b_1+p\,b_2 \in IR$.

Figura 191: Respuesta de **E3** a la pregunta 1c)

Comentarios a la respuesta de E9 caso 2

E9 utiliza una propiedad de un espacio vectorial para verificar que el conjunto dado es un sub-espacio vectorial de $\mathbf{R}^3$, esto da cuenta de una concepción proceso espacio vectorial $\mathbf{R}^3$ y evidencia una *construcción proceso* de cartesiano $\mathbf{R}^3$.

Tabla N°110: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 2, apartado 2a) y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

Pregunta 2: apartado 2a)		
Estudiante	**Acciones que manifiestan los estudiantes.**	**Construcciones y mecanismos mentales que se manifiestan desde las acciones.**
E9	Según la Figura 192: **Ar5E9P2a**: Determina tres puntos del conjunto *S* que están contenidos en un plano.	**Ar5E9P2a** evidencia una *concepción acción* del concepto plano.

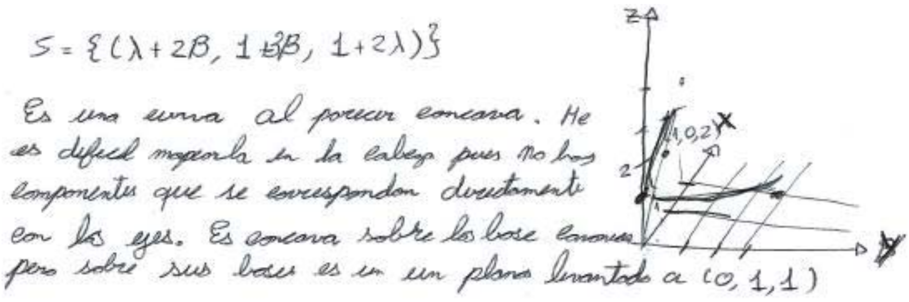


Figura 192: Respuesta de **E9** a la pregunta 2a)

Comentarios a la respuesta de E9 caso 2

E9 no logra asociar el vector todas las soluciones y escribir la ecuación del plano afín. Además no logra una representación geométrica del conjunto. Evidencia una *construcción acción* del concepto plano.

Tabla N°111: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 2, apartado 2b) y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

Pregunta 2: apartado 2b)		
Estudiante	**Argumentos que manifiestan los estudiantes.**	**Construcciones y mecanismos mentales que se manifiestan desde las acciones.**
E9	Según la Figura 193: **Ar6E9P2b**: Reconoce que el vector todas las soluciones deja fuera a elemento nulo de $\mathbf{R}^3$.	**Ar6E9P2b** evidencia una *concepción proceso de* espacio vectorial.

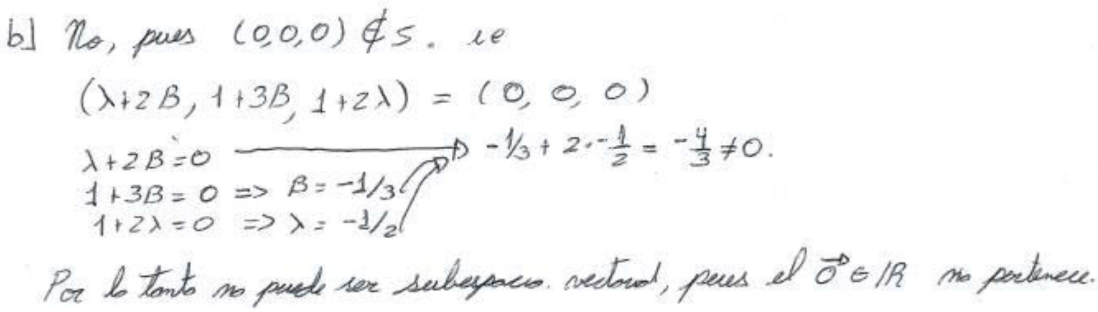


Figura 193: Respuesta de **E9** a la pregunta 2b)

Comentarios a la respuesta de E9 caso 2

E9 verifica que el elemento nulo no pertenece al conjunto *S*, estableciendo que dicho conjunto no es un sub-espacio vectorial de $\mathbf{R}^3$, lo que evidencia una concepción *objeto* de espacio vectorial $\mathbf{R}^3$.

Tabla N°112: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 3 y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

Pregunta 3		
Estudiante	**Argumentos que manifiestan los estudiantes.**	**Construcciones y mecanismos mentales que se manifiestan desde las acciones.**
E9	Según la Figura 194: **Ar7E9P3**: Escribe una ecuación homogénea con vectores de $\mathbf{R}^3$ para determinar si el conjunto es linealmente independiente. **Ar8E9P3**: Establece que ningún sub-espacio propio de $\mathbf{R}^3$ contiene a los puntos dado que los vectores asociados a dichos puntos generan a éste.	El **Ar7E9P3** y **Ar8E9P3** evidencia una *concepción acción* de proceso de espacio vectorial $\mathbf{R}^3$.

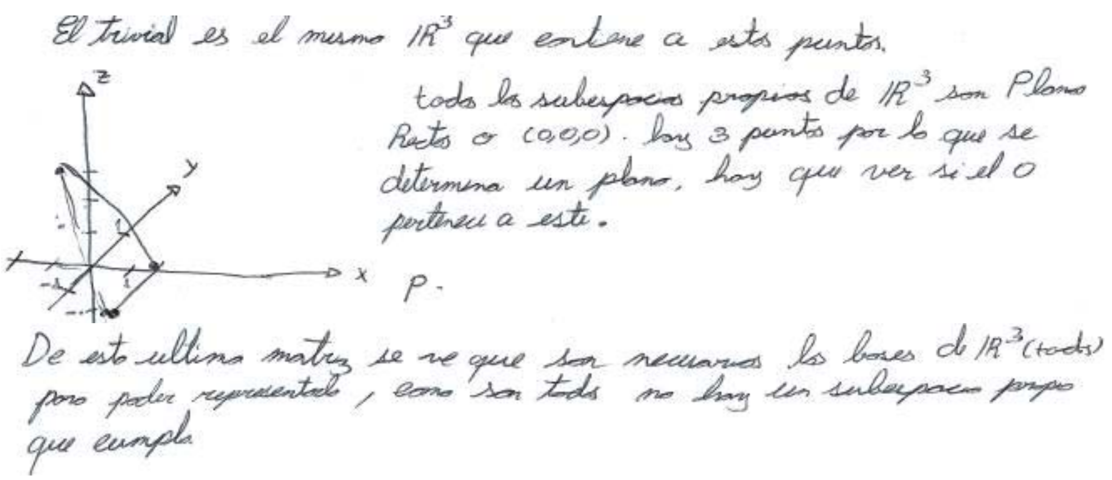


Figura 194: Respuesta de **E9** a la pregunta 3)

Comentarios a la respuesta de E9 caso 2

E9 se percata que $\mathbf{R}^3$ es sub-espacio de sí mismo, por otro lado muestra que no es posible considerar un sub-espacio propio planteando una ecuación homogénea de pares ordenados, resolviendo luego un sistema homogéneo utilizando matrices. Esto evidencia una *concepción objeto* de espacio vectorial.

Tabla N°113: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 4 y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

Pregunta 4		
Estudiante	**Acciones que manifiestan los estudiantes.**	**Construcciones y mecanismos mentales que se manifiestan desde las acciones.**
E3	Según la Figura 195: **Ar9E3P4**: Escribe los conjunto solución de la ELH en función de los valores nulos de los parámetros. **Ar10E3P4**: Representa gráficamente el espacio o plano utilizando ejes coordenados.	**Ar9E3P4** y **Ar10E3P4** evidencia una *concepción proceso* de plano y espacio cartesiano.

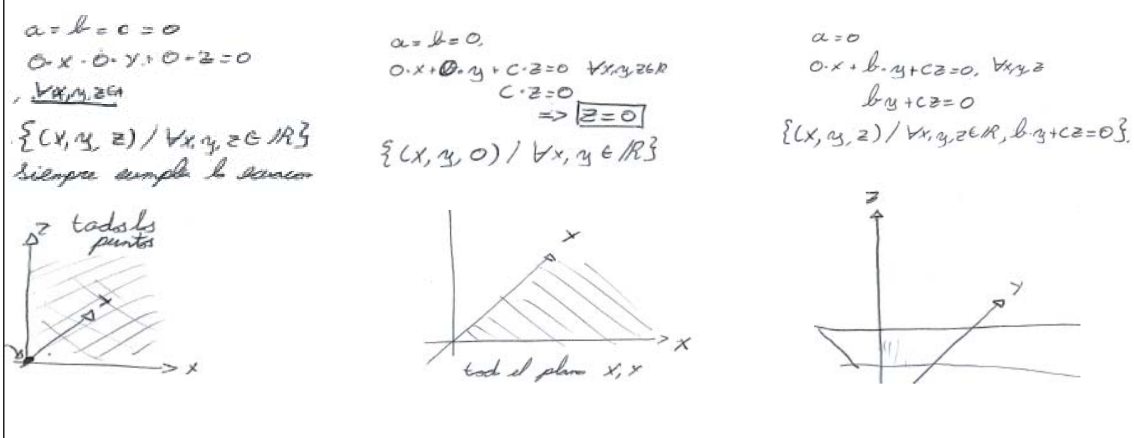


Figura 195: Respuesta de **E3** a la pregunta 4)

Comentarios a la respuesta de E9 caso 2

E9 representa geométricamente cada una de las posibilidades de la ELH en cuanto a sus parámetros igualados a cero. Además escribe el respectivo conjunto solución, lo que evidencia una *concepción objeto* de espacio cartesiano.

Tabla N°114: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 5 y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

Pregunta 5, apartado 5a)		
Estudiante	**Acciones que manifiestan los estudiantes.**	**Construcciones y mecanismos mentales que se manifiestan desde las acciones.**
E9	Según la Figura 196: **Ar11E9P4**: Aplica un teorema para mostrar que W es un sub-espacio vectorial.	**Ar11E9P4** evidencia una *concepción proceso* espacio vectorial $\mathbf{R}^3$.

a) En efecto si vemos las bases de W son (1,0,0), (0,1,0) las cuales son 2 de los 3 vectores que componen a la base canonica de $\mathbb{R}^3$ por lo que es trivialmente subespacio.

Figura 196: Respuesta de **E9** a la pregunta 5a)

Comentarios a la respuesta de E9 caso 2

E9 determina que *W* es un sub-espacio vectorial de $\mathbf{R}^3$ determinando dos vectores que generan a dicho conjunto, los que compara con la base del espacio vectorial $\mathbf{R}^3$. Lo anterior pone de relieve una *concepción proceso* de sub-espacio vectorial.

Tabla N°115: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 5 apartado 5b) y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

Pregunta 5, apartado 5b)		
Estudiante	**Acciones que manifiestan los estudiantes.**	**Construcciones y mecanismos mentales que se manifiestan desde las acciones.**
E3	Según la Figura 197: **Ar12E3P5b**: Reconoce que *f* es un homomorfismo y a la vez un isomorfismo.	**Ar12E3P5b** evidencia una *concepción objeto* de función.

b) En efecto se muestra un isomorfismo simple considerando la base canonica de $\mathbb{R}^2$ se asocian

$(1,0) \longleftrightarrow (1,0,0)$

$(0,1) \longleftrightarrow (0,1,0)$

El cual es trivialmente inyectivo y sobreyectivo, por lo que W y $\mathbb{R}$ son isomorfos

Figura 197: Respuesta de **E9** a la pregunta 5b)

Comentarios a la respuesta de E9 caso 2

E9 Al parecer está planteando que como son dos espacios vectoriales de dimensión dos son isomorfos, lo que evidencia una *concepción objeto* de espacio vectorial $\mathbf{R}^3$.

Tabla N°116: Sobre los argumentos que despliegan los estudiantes a la pregunta 5 y su relación con las construcciones y mecanismos mentales.

Pregunta 5, apartado 5c)		
Estudiante	**Acciones que manifiestan los estudiantes.**	**Construcciones y mecanismos mentales que se manifiestan desde las acciones.**
E9	Según la Figura 198: **Ar13E9P5c**: Da ejemplos de espacios isomorfos a $\mathbf{R}^2$ que no son sub-espacios de $\mathbf{R}^3$.	**Ar13E9P5b** evidencia una *concepción objeto* espacio vectorial.

c) Mientras se mantenga fijo 2 coordenadas son isomorfos ejemplo

$\{(a,0,c)\in\mathbb{R}^3 / a,c\in\mathbb{R}\}$; $\{(0,b,c)\in\mathbb{R}^3 / b,c\in\mathbb{R}\}$.

tambien cualquier espacio donde se dibuje un plano en $\mathbb{R}^3$ (es decir una componente dependa de las otras dos por ejemplo

$\{(a,b,a+b)\in\mathbb{R}^3 / a,b\in\mathbb{R}\}$ con base asociada

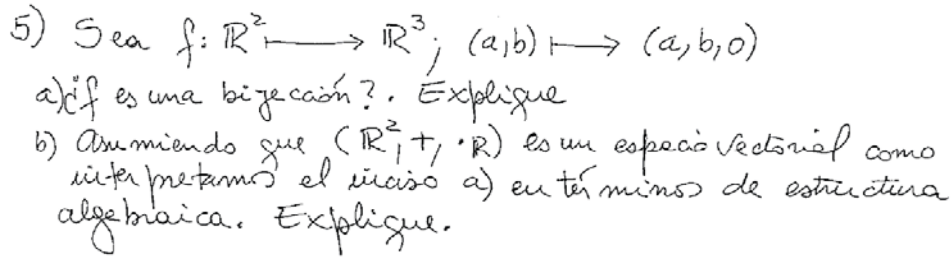
Figura 198: Respuesta de **E9** a la pregunta 5c)

Comentarios a la respuesta E9 caso 2

E9 muestra sub-espacios vectoriales de $\mathbf{R}^3$ que son isomorfos al espacio vectorial $\mathbf{R}^2$. Hace referencia a planos vectoriales y considera planos donde el vector todas las soluciones es combinación lineal de las otras dos componentes. Lo anterior evidencia una *construcción proceso* de cartesiano $\mathbf{R}^3$. Además da cuenta de una *concepción objeto* de espacio vectorial $\mathbf{R}^3$.

4.6.4.- Entrevistas a E3 y E4 caso 1 espacio vectorial $\mathbf{R}^3$

Para indagar en profundidad algunos aspectos del espacio vectorial $\mathbf{R}^3$ desde las respuestas del cuestionario 2 y hacer una aproximación a la articulación de los espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ considerando el cartesiano $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$, a continuación se presentan dos instancias de entrevista. La primera corresponde al **E4** del caso1 a quien, después de concluida la entrevista para el espacio vectorial $\mathbf{R}^2$, se le hizo la siguiente pregunta, en la Figura 199, relacionada con el espacio vectorial $\mathbf{R}^3$, la pregunta N°5.



5) Sea $f: \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^3$; $(a,b) \longmapsto (a,b,0)$

a) ¿f es una biyección? Explique

b) Asumiendo que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot_{\mathbb{R}})$ es un espacio vectorial como interpretamos el inciso a) en términos de estructura algebraica. Explique.

Figura 199: Pregunta N° de la entrevista a **E4** respecto del espacio vectorial $\mathbf{R}^3$.

La segunda instancia correspondió a una entrevista que se le aplicó al **E3** del caso1, preguntas que se pueden revisar en los anexos. A continuación el análisis a cada una de las respuestas de los **E3** y **E4**, en el orden en que fueron aplicadas.

4.6.4.1.-Entrevista a E4 caso 1

I: Qué opina Ud. respecto de la siguiente pregunta o si percibe alguna intención de ésta, pues Ud. algo planteo en el cuestionario 1...
E4: La primera pregunta me dice si *f* es una biyección, entonces no es biyección si la definimos sobre $\mathbf{R}^3$ como conjunto de llegada... claramente no sería epiyectiva pues cada elemento de $\mathbf{R}^3$ con coordenada no nula no tendrían pre-imagen. Si la restringimos al conjunto $\mathbf{R}^2\times\{0\}$ (escribe en la hoja de trabajo). Entonces calculamos ahora el kernel de la función (trabaja la definición y escribe en la hoja de trabajo.

En la Figura 200 se puede apreciar la respuesta dada a la pregunta 5.

(a) no es biyección sobre $\mathbb{R}^3$ como conjunto de llegada.

Restrinjida al conjunto $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ es epiyectiva.

$\ker(f) = \{ (a,b) \mid (a,b,0) = (0,0,0) \}$

$\{ (a,b) \mid a = 0 , b = 0 \}$

$\therefore \ \ker f = \{(0,0)\}$

$\therefore \ f$ es inyectiva.

Luego: $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ es isomorfismo.

Figura 199: Pregunta N° de la entrevista a **E4** respecto del espacio vectorial $\mathbf{R}^3$.

En primer lugar establece restricciones para que *f* sea una función biyectiva, lo que evidencia una *concepción objeto* de función. Por otro lado da cuenta de la propiedad inyectiva de *f*, asumiendo que es una transformación lineal, pues analiza el ker(*f*), lo que videncia una concepción *esquema* de espacio vectorial.

I: ¿También podríamos dotar de estructura a este conjunto (se le indica a $\mathbf{R}^2\times\{0\}$)
E4: A ese (se refiere a $\mathbf{R}^2 \times \{0\}$)
E4: De hecho es un espacio idéntico a éste va a tener una estructura e espacio vectorial idéntica al otro conjunto.
I: Podríamos pensar en que hay sub-conjuntos de $\mathbf{R}^3$ que son isomorfos a $\mathbf{R}^2$
E4: Sí
I: y podríamos definir otros que sean isomorfos a $\mathbf{R}^2$, ¿no tan sólo es el único?…y ¿geométricamente con quién asociamos éste?…si lo queremos mirar geométricamente…
E4: es que tomar esta función es como tomar un elemento del plano y verlo en la misma posición en $\mathbf{R}^3$ pues tiene la tercera coordenada nula…podríamos hacer cualquier función que nos generara una rotación del plano y ese plano sería un sub-espacio de $\mathbf{R}^3$.

El **E4**, interpreta asocia a la función como una relación entre un punto del plano y uno del espacio, además intenta ver un tipo de rotación entre un plano hacia un plano coordenado en el espacio. Lo anterior evidencia una concepción esquema de función y una concepción objeto de espacio cartesiano.

A continuación, se presentan las tres preguntas que se consideraron para trabajar la entrevista con el **E3** caso1.

1) Sea $2x + 3y + 5z = 0$ una ELH.
a) Muestre una solución de la ELH indicando el procedimiento a utilizar.
b) Con la solución anterior y sólo con la adición usual de pares ordenados, ¿es posible obtener las demás soluciones del conjunto solución de la ELH? Explique
c) Con la solución anterior y sólo con la multiplicación usual de un escalar real y par ordenados, ¿es posible obtener las demás soluciones del conjunto solución de la ELH? Explique.
d) Cuál es el mínimo número de soluciones necesarias para que, utilizando las dos operaciones usuales, sea posible obtener las demás soluciones del conjunto solución de la ELH. Explique

2) Sean los conjuntos $S_1 = \left\{(t, 2t, 3t) \in \mathbf{R}^3 / t \in \mathbf{R}\right\}$ y $S_2 = \left\{(2a, b, 3a - 2b) \in \mathbf{R}^3 / a, b \in \mathbf{R}\right\}$

a) ¿ $S_1 = \mathbf{R}^3$? Explique

b) ¿ $S_2 = \mathbf{R}^3$? Explique

3) Sabiendo que **R** y **R**^{2} son dos **R** espacios vectoriales (con las operaciones usuales). Considere las siguientes funciones:

i) $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R} \times \{0\} \times \{0\}; a \to (a, 0, 0)$ ii) $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2 \times \{0\};\ (a, b) \to (a, b, 0)$

a) Podemos afirmar que $\mathbf{R} \times \{0\} \times \{0\}$ y $\mathbf{R}^2 \times \{0\}$ son **R** espacios vectoriales con las operaciones usuales respectivas.

b) ¿Es **R**^{2} un sub-espacio vectorial de **R**^{3}? Explique

c) ¿Es **R**$^2 \times \{0\}$ un sub-espacio vectorial de **R**^{3}? Explique

d) ¿Cuáles son los sub-espacios propios del **R**^{3} espacio vectorial? Explique.

4.6.4.2.- Entrevista a E3 caso 1

A continuación en la Tabla N°117 los argumentos del **E3** caso 1 para indagar, pregunta 1, si con una operación binaria y un elemento se pueden obtener todos los elementos del CSELH.

Tabla N°117: Obtener todos los elementos del CSELH con una operación binaria y un elemento fijo.

Desempeño del E3 a la pregunta 1 de la entrevista
I: Ya que el cuestionario 1 y 2 se centró en la ELH, la entrevista también comenzará por ahí, podría Ud. mostrarme una solución de esa ELH. **E3**: La principal sería el (0,0,0) **E3**: y otra solución, tal vez una solución particular puede ser $x = 1$, $y = -1$ y $z = 1$ (verifica que satisface la ecuación, además se le pide si existe otra forma de escribirla) **E3**: Sí…como vector (escribe en la hoja)
1.- Solución trivial $x=0$, $y=0$, $z=0$ 2.- Solución particular $x=-1$ $y=-1$ $z=1$, $(-1,-1,1)$
I: …con una solución y la operación suma usual de **R**^{3} podríamos generar todas las demás **E3**: O sea yo creo que si se puede tal vez **E3**: Por ejemplo lo que había pensado…si multiplicamos por un escalar (se le explica que sólo con la suma usual de **R^3**) **E3**: …haber deje intentar hacer algo…se supone que el conjunto solución deberían ser… (escribe un conjunto por comprensión) **E3**: Bueno ahí como que generaría…ah ya… si se podría sumando otro vector…haber deje ver bien **E3**: Ya por ejemplo de aquí yo podría encontrar sumándolas ya que son combinaciones lineales **I**: Ya estamos de acuerdo…ha obtenido el conjunto generador y desde ahí va ir obteniendo… **E3**: Sí, ya que esta que encontré debería formarse con suma o multiplicación con estas otras **I**: Solamente con la que encontró podría obtener todo **R**^{3} (se insiste en la condiciones de la pregunta) **E3**: Yo diría que sí pero no logro verlo… (se le pide que sume el elemento consigo mismo, entendiendo finalmente lo que se le pide) **E3**: …Yo digo que no, por ejemplo este que es solución (-1, 1, 0) yo sumándolo nunca voy a obtener una fracción… **E3**: Yo puedo encontrar soluciones pero no todas…

b: $S: \{(x, y, z): 2x+3y+5z=0\}$ $\quad \langle (-\frac{3}{2}, 1, 0); (-\frac{5}{2}, 0, 1) \rangle$

$x = \frac{-5z-3y}{2}$ $\quad \{(\frac{-5z-3y}{2}), y, z\}$ $\quad (-1,-1,1)+(-1,-1,1) = (-2,-2,2)$

$-4-6+10=0$

No es posible, ya que por ejemplo $(-\frac{3}{2}, 1, 0)$ es solución de la ELH y no se puede obtener sumando una cantidad finita de veces el $(-1,-1,1)$, debido a que $-\frac{3}{2}$ es una fracción.

I: ¿Sólo con la multiplicación por escalar y un elemento puedo generar a todos los elementos del CSELH?
E3: No, porque bueno viendo esto (se refiere al conjunto generador) es claro que yo necesito el generador de las soluciones tal vez uno linealmente independiente. No, necesariamente uno linealmente independiente para poder generar… (se le pregunta si es posible interpretar geométricamente el conjunto)
E3: Eso es un plano (se le pregunta si cualquier plano)…un plano que pasa por el cero (se le pregunta además por el conjunto generado por un vector y la ponderación por escalar)
E3: El plano sí pero las otras soluciones se encuentran sobre el plano (no piensa en las rectas vectoriales)

c- No es posible, ya que el conjunto generador posee 2 vectores li, así para generar todas las soluciones de ELH necesito como mínimo otro vector li que sea solución particular.
d- 2 soluciones li

El **E3**, al argumentar su respuesta a la pregunta 1, evidencia una concepción *objeto* de espacio vectorial. Además muestra evidencia de la *construcción proceso* ponderación múltiplo escalar de una solución al tener sólo la suma usual de soluciones en el CSELH.

A continuación en la tabla N°118 se dan a conocer los argumentos del **E3** caso 1 en la, pregunta 2.

Tabla N°118: Obtener todos los elementos del CSELH con una operación binaria y un elemento fijo.

Desempeño del E3 a la pregunta 1 de la entrevista
I: Determine si S_1 ó S_2 es igual a $\mathbf{R}^3$ **E3**: No, porque para ser $\mathbf{R}^3$ tendría que tener una base y $\mathbf{R}^3$ es de dimensión 3. Este conjunto tiene dimensión 1 y este conjunto tiene dimensión 2. Entonces por ejemplo, esta es una recta y este deber ser un plano al igual que en el ejercicio anterior, entonces no puede ser $\mathbf{R}^3$.

2- $S_1 = \{(t, 2t, 3t) \in \mathbb{R}^3 / t \in \mathbb{R}\}$ $S_2 = \{(2a, b, 3a-2b) \in \mathbb{R}^3 / a, b \in \mathbb{R}\}$

$S_1 = \langle (1, 2, 3) \rangle$ $S_2 = \langle (2, 0, 3), (0, 1, -2) \rangle$

I: …Ud. rápidamente identificó rectas y planos, entonces dijo en S1…es una recta pues es de dimensión 1. ¿Si esa recta está en el plano, esa recta pasa por el origen?
E3: No necesariamente
I: Y como yo distingo si esa recta pasa por el origen
E3: Primero necesitaría…sí, esta debería pasar por el origen…viéndola geométricamente yo necesitaría de otro … un vector dirección y un vector soporte (hace alusión a la ecuación vectorial de una recta)

b- ¿$S_2 = \mathbb{R}^3$? No, ya que S_2 es de dimensión 2 y genera un plano. Haría falta un tercer vector li para generar a $\mathbb{R}^3$.

E3, trabaja sobre el vector todas las soluciones de cada uno de los conjuntos S_1 y S_2. Para luego determinar las soluciones generadoras, de cada conjunto. Luego determina la dimensión de cada espacio, comparando con la dimensión del espacio vectorial $\mathbf{R}^3$. Lo anterior evidencia una concepción *objeto* de $\mathbf{R}^3$. Además da cuenta de una concepción *proceso* de cartesiano $\mathbf{R}^3$. Por otro lado el hecho de relacionar rectas y planos vectoriales en cada conjunto, da cuenta de una concepción *proceso* de espacio cartesiano.

Tabla N°119: Obtener todos los elementos del CSELH con una operación binaria y un elemento fijo.

Desempeño del E3 a la pregunta 1 de la entrevista
I: Dadas estas dos funciones serán biyectivas **E3**:Buenos son biyectivas…se pueden ver como proyecciones …no me acuerdo si el nombre es proyecciones…entonces si serían… acá con el (0,0) no se mueven y el a se mueve, sería como una identidad para la primera variable I: El conjunto de llegada es un subconjunto de $\mathbf{R}^3$…podríamos decir que $\mathbf{R}$ es isomorfo a un sub-conjunto de $\mathbf{R}^3$. E3: Sería bien fome…acá se representaría como el Eje X. I: Podríamos decir que los conjuntos asociados a la función son R espacios vectoriales E3: Como decimos que son isomorfos son espacio vectorial **R** (responde lo mismo para la otra función) E3: Si también los dos serían **R** espacios vectoriales…incluso si lo hacemos por la definición, en ambos está la función nula…ah pero también lo puedo ver como sub-espacios.

3-. a-. i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\times\{0\}\times\{0\}$
$a \rightsquigarrow (a,0,0)$ es una función que es biyectiva.
Luego f es un isomorfismo de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}\times\{0\}\times\{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$
Como $\mathbb{R}$ es un $\mathbb{R}$-esp.vectorial, tenemos que $\mathbb{R}\times\{0\}\times\{0\}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial ($\mathbb{R} \cong \mathbb{R}\times\{0\}\times\{0\}$)
ii) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\times\{0\}$ igual que en (i) $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2\times\{0\}$. Como $\mathbb{R}^2$ es
$(a,b) \rightsquigarrow (a,b,0)$ un $\mathbb{R}$-espvect tenemos que $\mathbb{R}^2\times\{0\}$ es un $\mathbb{R}$-espvect.
* Además por def. podríamos ver que $(0,0,0) \in \mathbb{R}\times\{0\}\{0\}$.
además $\alpha u + v \in \mathbb{R}\times\{0\}\times\{0\}$, donde $u, v \in \mathbb{R}\times\{0\}\times\{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$
Análogamente para $\mathbb{R}^2\times\{0\}$.

I: **R**^{2} será un sub-espacio vectorial de **R**^{3}
E3: lo puedo ver evidente este es un subconjunto de **R**^{3}. (Duda un poco…) ya no lo veo tan evidente… (termina de escribir lo anterior)
E3: Si lo veo como, sí, si lo veo primero que **R**^{2} es un subconjunto de **R**^{3} yo sería que el espacio donde la tercera coordenada es cero, es decir el plano XY y ahí tengo que **R**^{2} es un subconjunto de **R**^{3} y si tomo dos vectores de **R**^{2} y lo sumo pues están en el mismo plano, la suma debería estar en el mismo plano…entonces sabemos que está la clausura…entonces podría verlo por definición…yo diría que sí.
E3: es que lo vi como subconjunto…
I: Para que sea subconjunto
E3: Tiene que tener elementos …igual es como raro … pucha es que tiene que tener elementos …
I: el (a, b) no pertenece a **R**^{3}, pero si lo veo como espacio…
E3: …decir de lo de subconjunto que como raro…**R**^{3} podría restringirlo y llevarlo a **R**^{2}…tendría elementos de la forma (a,b,0) que no pertenecen a **R**^{2}…yo juraba que eso era…(se conversan las ideas desplegadas)

b-. ¿$\mathbb{R}^2 < \mathbb{R}^3$? Lo primero que se necesita es que $\mathbb{R}^2$ sea un subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Sin embargo, los vectores de $\mathbb{R}^2$ son de la forma (a,b), con $a,b \in \mathbb{R}$, mientras que ~~R~~ los de $\mathbb{R}^3$ son (a,b,c) con $a,b,c \in \mathbb{R}$. así (a,b) no pertenece a $\mathbb{R}^3$. por lo que $\mathbb{R}^2 \neq \mathbb{R}^3$.

E3: Es cerrado con la suma y la multiplicación, es un sub-espacio...
E3: El (0, 0, 0) pertenece…pero el (0, 0, 0) en realidad es distinto de vacío…

c-. ¿$\mathbb{R}^2\times\{0\} < \mathbb{R}^3$? Sí, porque $\mathbb{R}^2\times\{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ el cual es cerrado con la suma y multiplicación por ~~escalar~~ escalar.
posee el $(0,0)$ así es distinto de vacío

I: ¿Cuáles son los sub-espacios propios de $\mathbf{R}^3$?
E3: A qué se refiere con los sub-espacios propios de $\mathbf{R}^3$… ¿los triviales?
I: Pues los sub-espacios vectoriales son…
E3: El (0,0,0) y el $\mathbf{R}^3$…pucha hay muchos, por ejemplo hay varios subconjuntos que cumplirían
I:Cuáles
E3: Donde todas las coordenadas s ahhh no, no cumplirían estaba pensando en un ejemplo que no cumplía (se le indica que con operaciones usuales)
E3: …Donde todas las coordenadas son pares…si los sumo da par y se multiplico por escalar dar par…sí
I: Y geométricamente…Ud. ha hablado de rectas y planos…
E3: Sí cualquier recta que pase por el origen, cualquier plano que pase por el origen…
I: A parte de las rectas que pasan por el origen y los planos que pasan por el origen Ud. dice que pueden existir otros…
E3: Si vamos a catalogarlas serían rectas y planos, por ejemplo yo antes dije una pero esa pertenecen a una…puede estar en una recta o en un plano (se hace notar respecto de las rectas y planos vectoriales)
E3: …viéndolo en la parte de la dimensión deberían tener dimensión una o dos porque $\mathbf{R}^3$ tiene dimensión 3, entonces solamente serían las rectas y los planos.
I: Atendiendo a la dimensión…

d. Como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, tenemos que los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ deben poseer dimensión 1 o 2.
Por tanto los subespacios propios de $\mathbb{R}^3$ son las rectas y planos que pasan por el origen.

A la luz de los argumentos que entrega el **E3**, en los apartados a), c) y d) de la pregunta 3, en la tabla 116, se evidencia una concepción *objeto* de espacio vectorial y una concepción *objeto* de función. Por otro lado, considerando la pregunta 3b, es iluminador el hecho de que el estudiante en una primera instancia argumente que $\mathbf{R}^2$ es un sub-espacio de $\mathbf{R}^3$. Necesita un tiempo para poder reconciliar su idea de que $\mathbf{R}^2$ no es un sub-espacio vectorial de $\mathbf{R}^3$ y que en definitiva hay sub-espacios vectoriales que son isomorfos al espacio vectorial. Un hecho que hace que se produzca la duda es que se da cuenta de que $\mathbf{R}^2 \not\subset \mathbf{R}^3$. Es probable que la idea geométrica de plano cartesiano y espacio cartesiano, con los planos coordenados, genere esa confusión.

Es probable, atendiendo a lo que manifiesta el **E3** que sea necesario *coordinar* previamente la construcción proceso cartesiano $\mathbf{R}^2$ con la construcción proceso cartesiano $\mathbf{R}^3$ para obtener la construcción proceso sub-espacios isomorfos y luego pensar en articular el espacio vectorial **R** y espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ con el espacio vectorial $\mathbf{R}^3$ a través de la comparación de su estructura desde sub-conjuntos isomorfos.

5.-CONCLUSIONES Y PROYECCIONES DE ESTA INVESTIGACIÓN

En primer lugar se hace notar que en esta investigación se indagó, desde una postura cognitiva, principalmente en las construcciones y los mecanismos mentales considerados fundamentales, a la luz del análisis teórico que propone el ciclo metodológico de la teoría APOE, para dar cuenta de la construcción de los conceptos espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ desde aquellas nociones e ideas matemáticas más elementales como son: Ecuación lineal homogénea, ecuación lineal no homogénea, sistema de ecuaciones lineales homogéneo, sistema de ecuaciones lineales no homogéneo, conjunto solución de ecuaciones lineales homogéneas, conjunto solución de ecuaciones lineales no homogéneas.

Los datos que aportaron los informantes de los tres casos de estudio, desde los argumentos que se desplegaron a través de las respuestas a los cuestionarios, entrevistas y las distintas actividades en la experiencia de aula, dan cuenta de la importancia de comenzar a construir el espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ atendiendo a la relación entre los términos de una ecuación lineal homogénea y un par de números reales específicos, como punto de partida. Luego se da paso, gradualmente, a la obtención de todas las soluciones de una ecuación lineal homogénea, al igual que para una ecuación lineal no homogénea, y pensar en dotar de operaciones tanto al conjunto solución de una ecuación lineal homogénea como al conjunto solución de una ecuación lineal no homogénea, e instalar así una operatoria de soluciones para establecer un álgebra de soluciones.

Los resultados encontrados muestran con claridad que las construcciones de los estudiantes están en sintonía con las construcciones y mecanismos mentales dispuestos en la descomposición genética y dan cuenta de la pertinencia de comenzar la construcción de los espacios vectoriales aludidos desde la construcción del cartesiano $\mathbf{R}^2$ y cartesiano $\mathbf{R}^3$. Se encontró evidencia de que el relacionar un parámetro con un par de inversos aditivos actúa como *mecanismo* de *interiorización* y a la vez permite reescribir la definición de conjunto solución de una ELH, al tiempo que posibilitan el trabajo con el álgebra de soluciones y sus propiedades.

5.1.-Sobre los aspectos matemáticos y cognitivos que se activan con la manipulación algebraica de una ELH y el CSELH

Desde un punto de vista matemático, manipular algebraicamente una ecuación lineal homogénea para obtener una solución de ésta, pone de relieve no tan sólo la estructura de **R** como cuerpo sino que además permite conectar con la función lineal y, por ende, con su gráfico y su respectiva representación gráfica al relacionar la ponderación por un escalar con la dilatación y contracción de un segmento dirigido; lo que a su vez se relaciona con el conjunto solución de una ecuación lineal homogénea. Por otro lado, desde un punto de vista cognitivo, se pone de manifiesto la *construcción acción* asociar un número real a una de las incógnitas de la ecuación lineal homogénea. Esta *acción* permite relacionar las variables de una ecuación mediante dos ecuaciones paramétricas de tal forma que el uso del parámetro actúa como *mecanismo* de *interiorización*, mientras que reescribir el conjunto solución en términos de la relación de las variables en un par ordenado actúa como *mecanismo de coordinación*, permitiendo avanzar a la *construcción proceso* ponderación de una solución.

La relación gráfica entre las soluciones de una ecuación lineal homogénea y la ecuación lineal no homogénea asociada, pone de relieve aspectos geométricos como la traslación de una recta en el plano cartesiano, o bien, la relación entre una recta vectorial y las respectivas rectas afines asociadas con las ecuaciones que las representan resaltando, de esta manera, el concepto de pendiente de una recta.

Por otro lado, la posibilidad de realizar un cambio de variable para trasformar una ecuación lineal no homogénea en una homogénea pone de manifiesto la traslación de los ejes coordenados, lo cual permite articular la adición de pares ordenados con la traslación paralela en el plano cartesiano, rescatando aspectos geométricos desde una geometría sintética y una geometría analítica, en un sentido clásico de los términos. Desde el punto de vista cognitivo, estas relaciones están asociadas a la *concepción objeto* de plano cartesiano.

En definitiva, se hace notar que los conceptos elementales mencionados al comienzo de este capítulo y los conceptos previos que se dieron a conocer en el capítulo 4, página 80, constituyen un núcleo de conceptos que inciden fuertemente en la construcción del concepto espacio vectorial $\mathbf{R}^2$. Conceptos que ameritan ser considerados y articulados desde un punto de vista matemático, atendiendo a su definición, notación y, fundamentalmente, poniendo énfasis en su relación con aquellas construcciones y mecanismos mentales declaradas en la Descomposición Genética para la construcción del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$.

5.2.- Sobre las construcciones y mecanismos mentales en la construcción del concepto espacio vectorial $\mathbf{R}^2$

Desde un punto de vista cognitivo, a la luz de la teoría APOE, cabe destacar desde los resultados que se dieron a conocer en el capítulo 4, la importancia que cobran las *construcciones acción* y las *construcciones proceso*, como punto de partida, para dar paso, de manera gradual a la *construcción objeto* del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$. Es importante resaltar que en este trabajo se entrega evidencia, como se aprecia en la página 164, de algunas *construcción acción* que permiten dar inicio las construcciones dispuestas en la Descomposición Genética a partir de los conceptos previos considerados relevantes en la construcción del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$, como son el concepto de grupo y el concepto de operación binaria.

Dentro de las construcciones que juegan un papel importante en la *construcción proceso* cartesiano $\mathbf{R}^2$ se encuentra la *coordinación* del *proceso* de considerar todos los elementos del conjunto solución de una ecuación lineal homogénea con el *proceso* operación binaria, misma que permite finalmente, la *construcción objeto* espacio vectorial $\mathbf{R}^2$. Desde un punto de vista matemático se estarían articulando aspectos geométricos y algebraicos desde los segmentos dirigidos y el álgebra de pares ordenados en atención a los conceptos producto cartesiano y plano cartesiano.

Como resultado de esta investigación queda claro que los conceptos de ecuación lineal homogénea y ecuación lineal no homogénea y sus respectivos conjuntos solución resultan ser el punto de partida para construir el concepto espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ a la par del concepto sub-espacio vectorial; sub-espacios que pueden ser vistos como rectas vectoriales.

En suma, la *encapsulación* de la *construcción objeto* espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ está sujeta la *construcción proceso* cartesiano $\mathbf{R}^2$ desde la *coordinación* de *construcciones proceso* que están asociadas a la *construcciones objeto* conjunto solución de una ecuación lineal homogénea y conjunto solución de una ecuación lineal no homogénea. Donde la *construcción objeto* plano cartesiano juega un papel preponderante para *coordinar construcciones proceso* que atiendan a cuestiones de orden geométrico, como la dilatación y construcción de un vector desde la ponderación escalar de una solución del conjunto solución de una ecuación lineal homogénea.

5.3.-El carácter de la Descomposición Genética para la construcción del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$

Atendiendo a los distintos elementos que se desplegaron en los párrafos anteriores se puede decir, desde un punto de vista matemático y cognitivo, que la DG diseñada, siguiendo el ciclo de investigación que propone APOE, describe de manera adecuada las construcciones y mecanismos mentales que son necesarios para modelar el aprendizaje del concepto espacio vectorial $\mathbf{R}^2$. En esta construcción lo geométrico y lo algebraico conviven de manera armoniosa; lo que está en sintonía con los aspectos epistemológicos del período 1630 a 1888, donde se pone de relieve la búsqueda de un nuevo cálculo geométrico que decanta en la axiomatización de un espacio vectorial (capítulo I, página 14).

Los resultados de este estudio contribuyen al campo de la educación matemática al proveer y validar una posible descomposición genética para la construcción del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ que ha sido además, puesta a prueba exitosamente a través del trabajo experimental del que se ha dado cuenta en la misma investigación.

5.4.-Sobre los instrumentos diseñados para la validación de la DG del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$

En particular, el cuestionario que se diseñó y que luego se validó a través de la opinión de expertos, se puso en sintonía con los distintos aspectos que se trazaron en la DG (páginas 90 a 99). Aunque, cabe hacer notar que, independiente de lo anterior, el apartado 2d) de la pregunta 2 del cuestionario 1 no fue interpretada como se supuso, generando una respuesta no esperada por parte de los estudiantes del caso 1.

Por esa razón se consideró la posibilidad de refinar el modelo, pero a la luz de los resultados de las entrevistas fue posible observar que no era necesario, dado que, por un lado, para salvaguardar la validez de los resultados algunos de los estudiantes entrevistados corresponden a aquellos que ofrecieron una adherencia menor a la Descomposición Genética en sus respuestas al cuestionario; y por otro, que con estos informantes se logró verificar, a partir de la entrevista, que la Descomposición Genética cumplió con su rol de describir las construcciones mentales necesarias para la (re)construcción del concepto espacio vectorial $\mathbf{R}^2$.

5.5.-Importancia de haber construido el espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ a partir de *acciones* asociadas a una ecuación lineal homogénea y su conjunto solución

En primer lugar, dada la evidencia que se recopiló a través de los tres casos de estudio, se reconoce la importancia de las *construcciones objeto* conjunto solución de una ecuación lineal homogénea y conjunto solución de una ecuación lineal no homogénea como un eslabón en la *construcción objeto* del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$. Por otro lado la *construcción proceso* cartesiano $\mathbf{R}^2$ resulta importante como eslabón a considerar. Teniendo en cuenta que es importante *desencapsular* la *construcción objeto* plano cartesiano en la *construcción proceso* sistema de coordenadas para *revertirlo* en la *construcción proceso* recta vectorial y *coordinarlo* con la *construcción proceso* álgebra de soluciones para obtener la *construcción proceso* cartesiano $\mathbf{R}^2$. Para, finalmente, *encapsular* la *construcción proceso* cartesiano $\mathbf{R}^2$ en el *objeto* espacio vectorial $\mathbf{R}^2$.

Lo anterior permite mostrar que el espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y el sub-espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ se construyen en forma paralela en la construcción de los conjuntos solución de la ecuación lineal homogénea y la ecuación lineal no homogénea y, de esta manera, poder articular los conceptos conocidos por los estudiantes que subyacen al concepto de espacio vectorial $\mathbf{R}^2$. Esto nos permite dar respuesta a la primera pregunta de investigación (página 34).

5.6.-Sobre las consideraciones a los conceptos matemáticos y su respectiva articulación en la construcción del concepto espacio vectorial $\mathbf{R}^3$

Un primer aspecto a considerar, desde un punto de vista matemático, es la distinción que un estudiante debe establecer entre un punto, un par ordenado, un segmento dirigido y un vector geométrico para dar paso, gradualmente, a la construcción del cartesiano $\mathbf{R}^2$ y del cartesiano $\mathbf{R}^3$, poniendo de relieve la operación. Por otro lado, un estudiante debe familiarizarse con el trabajo de relaciones de incidencia entre conjuntos de puntos, conjunto de líneas rectas y conjuntos de planos; las cuales son necesarias para articular el concepto de sub-espacio vectorial con el concepto de recta y plano vectorial; y de esta manera acceder, cognitivamente hablando, a una representación geométrica para conceptos como dependencia lineal, conjunto generador, base y dimensión en el espacio vectorial $\mathbf{R}^3$.

Articular el cartesiano $\mathbf{R}^3$ con el espacio cartesiano desde el conjunto solución de una ecuación lineal homogénea o el de una ecuación lineal no homogénea, pone de relieve el concepto de operación binaria y el concepto de estructura. Obtener todas las soluciones del conjunto solución de una ecuación lineal homogénea, desde una o más soluciones con la adición y ponderación por escalar, permite replicar lo ya planteado para el espacio vectorial $\mathbf{R}^2$, permitiendo además relacionar sub-espacios isomorfos a sub-conjuntos de $\mathbf{R}^3$, donde el concepto de función, en su especificidad desde el concepto de homomorfismo y función biyectiva, puede propiciar el tránsito del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ al espacio vectorial $\mathbf{R}^3$. Los resultados obtenidos ponen de manifiesto la importancia de la *construcción proceso* sub-espacio isomorfo a $\mathbf{R}^2$ para promover dicho tránsito, activando desde el cartesiano $\mathbf{R}^3$ la *construcción proceso* sub-espacio vectorial $\mathbf{R}^3$.

El uso de parámetros en los conjuntos solución es la antesala para avanzar y poner de relieve conceptos como combinación lineal, conjuntos generador, base y dimensión de un espacio vectorial. Junto con ello dar paso a la construcción de un espacio vectorial con operaciones usuales y operaciones no usuales de dimensión tres, desde la traslación y el cambio de variable al transformar algebraicamente una ecuación lineal no homogénea en una homogénea.

Considerando lo expresado en los párrafos anteriores y atendiendo a los antecedentes recopilados en las páginas 208 a 231, respecto de la segunda pregunta de investigación se puede decir que hay por lo menos dos elementos a tener en cuenta para avanzar en la construcción del espacio vectorial $\mathbf{R}^3$, en términos cognitivos. Lo primero es poner de relieve el representar objetos tridimensionales en objetos bidimensionales en un plano, donde la proyección ortogonal permite, indirectamente, estimular el tránsito entre los espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$, pues pone de relieve, de manera sutil, desde las coordenadas la incorporación de operaciones a $\mathbf{R}^3$ para pensar así en el cartesiano $\mathbf{R}^3$, resaltando el papel de las rectas afines y vectoriales como un sistema organizado que pone en juego relaciones de incidencia tanto en el espacio como en el plano.

Por otro lado, manipular algebraicamente una ecuación lineal homogénea asignando números reales a sus incógnitas da paso a la *construcción acción* asociar números reales a las incógnitas de una ecuación lineal homogénea para que, desde el uso de parámetros y escribiendo ecuaciones paramétricas, *interiorice* en la *construcción proceso* todas las soluciones y se fomente la articulación del concepto recta vectorial con el de espacio cartesiano desde el espacio vectorial $\mathbf{R}^2$, al ponerse de relieve la combinación lineal de dos componentes del par ordenado todas las soluciones, de una ecuación lineal homogénea, respecto de la tercera componente y así avanzar a la estructura del conjunto de todas soluciones de una ecuación lineal homogénea.

5.7.-Proyecciones de esta investigación

A continuación se listan y detallan un conjunto de iniciativas que se consideran como proyecciones de investigación ya concluida, a saber:

- Profundizar, desde la noción de homomorfismo, en el tránsito de los espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ para describir en detalle cuáles son las construcciones y mecanismos mentales en términos de la teoría APOE que intervienen y que estarían favoreciendo la articulación de éstos dos espacios vectoriales ya estudiados. Teniendo en claro que la idea de isomorfismo, como se documentó con los estudiantes del caso 1, da pistas para profundizar en este tránsito.

- Diseñar y validar fichas explicativas, de ejecución y de resolución de problemas, fundidas en un texto, que vayan en apoyo a un curso de álgebra lineal inicial, fundamentalmente para trabajar los conceptos: CSELH, CSELNH, plano cartesiano, espacio cartesiano, Cartesiano $\mathbf{R}^2$, Cartesiano $\mathbf{R}^3$ y espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$. Para promover la construcción *esquema* espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y *esquema* espacio $\mathbf{R}^3$. Incorporando el uso de actividades, problemas y situaciones problemáticas que fomenten la activación de *mecanismos mentales* y se dé paso, de esta manera a *construcciones mentales* donde el uso de un software es un aspecto a tener en cuenta.

- Diseñar un curso taller, a nivel universitario para distintas carreras, en particular para pedagogías que consideren la enseñanza de estos conceptos, que fomente la construcción de conceptos matemáticos básicos ligados al álgebra lineal como son: CSELH, CSELNH, plano cartesiano, espacio cartesiano, cartesiano $\mathbf{R}^2$, cartesiano $\mathbf{R}^3$, espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y espacio vectorial $\mathbf{R}^3$. Instancia que permitirá seguir estudiando las construcciones y mecanismos mentales y fundamentalmente coleccionar *construcciones acción* y *construcciones proceso* para abordar la construcción cognitiva de otros conceptos matemáticos ligados por ejemplo al álgebra abstracta.

- Incorporar el uso de la estadística implicativa para que desde el diseño de un árbol de similaridad y un árbol jerárquico se establezcan criterios para seleccionar los informantes desde el trabajo de aula a la luz del ciclo ACE. Además incorporar el análisis del grafo implicativo para ver la incidencia de *construcciones acciones* y *construcciones proceso* en la *construcción objeto* de alguna porción de conocimiento matemático.

- Desarrollar una actividad que se proyecta como una iniciativa en base a esta investigación que ayudaría al tránsito del espacio vectorial $\mathbf{R}$ al espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ utilizando una aplicación a la física.

- Sistematizar un conjunto de actividades que pongan de relieve el trabajo sobre el rol de los sistemas de proyección ortogonal y no ortogonal para representar objetos tridimensionales en objetos bidimensionales en un plano y que a la vez permitan estimular el tránsito entre los espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$.

Referencias Bibliográficas

Aburto, L.; Jiménez, D.; Johnson, R. (2008). *Álgebra Lineal*. Chile: Instituto de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Álvarez, C. (1995). *Estadística Multivariante y no paramétrica con SPSS: Aplicación a las ciencias de la salud*. MAdrid: Ediciones Díaz de Santos, S.A.

Alves Dias, M.; Artigue, M. (1995). Articulation Problems Between Different Systems of Symbolic Representaations in Linear Algebra. *The Proceeddigs of PME 19* (2), 34-31.

Andreoli, D. (2009). *Análisis de los obstáculos en la construcción del concepto de Dependencia Lineal de vectores en alumnos de primer año de la universidad.* Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, México.

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York: Springer.

Artigue, M. (2003). ¿Qué se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Universitario? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10*(2), 117-134.

Artin, E. (1963). Les points de vue extrêmes sur l'enseignement de la géometrie". L' *enseignement mathématique 9*, 1-4. En Hernández, J. (1978). *J. Piaget G. Choquet J. Dieudonné R. Thom y otros: La enseñanza de las matemáticas modernas* (pp. 260-263). España: Editorial Alianza.

Asiala, M., Brown, A., Devries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, A.H. Schoenfeld, E. Dubinsky (Ed.s) *Research in collegiate mathematics education 2*, 1-32.

Ausubel, D.; Novak, D.; Hanesian, H. (1983). *Educational Psychology*. Nueva York: Holt, Reinehart & Wiston.

Bell, E.T. (1985). *Historia de las matemáticas*. México: Fondo de Cultura Economica.

Bkouche, R.; Charlot, B.; Rouche, N. (1991). *Faire des mathématiques: le plaisir du sens*. Paris: Armand Colin.

Boyer, C. (1968). *A History of Mathematics*. New York: Jhon Wiley & Sons.

Bourbaki, N. (1976). *Elementos de la historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza Editorial, S. A.

Coll, C. (1996). *Aprendizaje escolar y construcción del conocimiento*. Barcelona: Ediciones Paidós Ibérica, S.A.

Castillo, M. (2008). *Proyectos de Investigación. Metodología de investigación científica USN. Método de estudio de caso*. Recuperado el 12 de junio de 2013 de http://itescham.com/Syllabus/Doctos/r1614.DOC.

Coxeter, H. (1971). *Fundamentos de geometría*. México: Editorial Limusa-Wiley, S.A.

Carlson, D.; Johnson, C. R.; Lay, D. C.; Porter, A. D.; Watkins, A. E. y Watkins, W. (Eds.). (1997). *Resources for Teaching Linear Algebra*. MAA Notes, 42.

Choquet, G. (1964). L' enseignement de la géometrie. Paris: Hermann (incluida en la colección Enseignement des sciences). En Hernández, J. (1978). *J. Piaget G. Choquet J. Dieudonné R. Thom y otros: La enseñanza de las matemáticas modernas* (264-269). España: Editorial Alianza.

Cvitanich, C.; Flores Mario; Neuburg, M.; Suazo A. (1999). *Algebra Lineal: Teoría y ejercicios*. Chile: Departamento de Matemática de la Universidad de la Serena.

Dorier, J. L. (1995a). A general outline of the genesis of vector space theory. *Historia Mathematica*, *22*(3), 227-261.

Dorier, J. L. (1995b). Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *29*(2), 175-197.

Dorier, J. L.; Harel, G.; Hillel, J.; Rolgaski, M.; Robinet; J.; Robert, A.; Sierpinska, A. (1997) (ed.). *L'enseignement de l'Algèbre Linéaire en Question*. Grenoble: La penséee Sauvage editions.

Dorier, J. L. (2000). Epistemological analysis of the genesis of the theory of vector spaces, in Dorier (ed.): *On the Teaching of Linear Algebra* (3-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dorier, J. L.; Sierpinska A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. In Derek Holton (Ed.), *The teaching and Learning of Mathematics at University Level* (255-273). Netherlands : Kluwer Academic Publisher.

Dorier, J. L.; Sierpinska, A. (2002). The Teaching and Learning of Mathematics at University Level. *New ICMI Study Series*, *7*(3), 255-273.

Dubinsky, E (1991a). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, in Tall, D. (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (95-126). Dordrecht: Kluwer.

Dubinsky, E. (1991b). The constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics, in L. P. Steffe (ed.) *Epistemological Foundations of Mathematical Experiences* (160-220). New York: Springer-Verlag.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*. *8*(3), 25 – 41.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Berne: Éditions Peter Lang.

Eves, H. (1969). *Estudio de las geometrías*. Barcelona: Editorial Hispano Americana.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics. An Educational Approach*. Dortretch: D. Reidel Publishing Company.

Grattan-Guinness, I. (1984). *Del cálculo a la teoría de conjunto, 1630-1910. Una introducción histórica*. Madrid: Alianza Editorial.

Gueudet-Chartier, G. (2000). Rôle du géométrique en algèbre linéaire. Thèse de Doctorat, Laboratoire Leibniz,Université Joseph Fourier, Grenoble.

Gueudet-Chartier, G. (2004). Should we teach linear algebra through geometry? Elsevier. Linear Algebra and its Applications 379, 491–501.

Guisande, C.; Barreiro, A.; Maneiro, I.; Riveiro, I., Vergara, A.; Vaamonde, A. (2006). *Tratamiento de datos*. Barcelona: Ediciones Díaz de Santos, S.A.

Harel, G. (1987). Variations and linear algebra contents presentations. *For the learning of mathematics, 7*, 29-32.

Harel, G. (1989a). Applying the principle of multiple embodiments in teaching linear algebra: aspects of familiarity and mode of representation. *School Science and mathematics, 89*, 49-57.

Harel, G. (1989b). Teaching in learning linear algebra; difficulties and an alternative approach to visualizing concepts and processes. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *11*(1-2), 139-148.

Harel, G. (1990). Using geometric models and vector arithmetic to teach highschool students basic notions in linear algebra. *International Journal of Mathematics Education, Science and Technology*, *21*(3), 387-392.

Hernández, J. (1972). *Elementos de la historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza

Hernández, J. (1978). *J. Piaget G. Choquet J. Dieudonné R. Thom y otros: La enseñanza de las matemáticas modernas*. Madrid: Editorial Alianza.

Hillbert, D. (1930). *Grundlagen der Geometrie*, 7.a ed., Leipzing-Berlin :Teubner.

Hillel, J.; Sierpinska, A. (1994). On One Persistent Mistake in Linear Algbera. *Proccedings PME 18*, pp. 65-72, University of Lisbon, Portugal.

Hillel, J. (2000). Modes de descripción and the problem of representation in Linear Algebra. En J-L. Dorier (Ed), *On the Teaching of Linear Algebera*, (191-207). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Klein, F. (1872). Vergleichende Bertrachtungen uber neuere geometrische orschungen Erlangen. Reprinted with additional footnotes in Mathematische Annalen 43 (1893): 63-100 and in GMA, *1*, 460-97.

Klein, F. (1908). *Matemática Elemental: desde un punto de vista superior*. Recuperado desde http://dmle.cindoc.csic.es/libros.php

Kleiner, I. (2007). *A History of abstract algebra*. Boston: Birkhaüser

Kline, M. (1992). *Matemáticas para los estudiantes de humanidades*. México: Fondo de cultura económica, S.A. de C.V.

Kú, D., Trigueros, A. y Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática 20*(2), 65- 89.

Luzardo, D; Peña, A. (2006). Historia del álgebra lineal hasta los albores del siglo XX. *Divulgaciones matemáticas*, *14*(2), 150-173.

Maracci, M. (2005). On some difficulties in vector space theory. In European Research in Mathematics Education IV. *Proceedings of the fourth congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 1778–1787. Sant Feliu de Guixols, Spain.

Maracci, M. (2006). On students' conceptions in vector space theory. In Proceedings of the 30th PME conference, 4, 129 -136. Prague, Czech Republic.

Máltasev, A. (1978). *Fundamentos del álgebra lineal*. Moscú: Editorial MIR.

Molina, G., y Oktaç, A. (2007). Concepciones de la transformación lineal en contexto geométrico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 10* (1), 241-273.

Nevanlinna, R. (1966). Reform in teaching mathematics. *American Mathematical Monthly*,73, 451-464. En Hernández, J. (1978). *J. Piaget G. Choquet J. Dieudonné R. Thom y otros: La enseñanza de las matemáticas modernas* (98-114). Madrid: Editorial Alianza.

Novak, J.; Gowin, D. (1988). *Aprendiendo a aprender*. Barcelona: Ediciones Martínez Roca, S.A.

Parraguez, M. (2009). *Evolución Cognitiva del Concepto Espacio Vectorial*. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. Unidad Legaria. México.

Parraguez, M. & Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. *Linear Algebra and its Applications*, *432*(8), 2112-2124.

Pavlopoulou, K. (1993). Un problème décisif pour l´apprentissage de l´algèbre linéaire: la coordination des registres de représentation. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 5, 67-93.

Pavlopoulou, K. (1994). Propédeutique de l`algèbre linèaire: la coordination des registres de représentation sémiotique, Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur (Strasbourg 1); prépublication de l`Institut de Recherche Mathématique Avancée. France.

Piaget, J. & García, R. (1989). *Psychogenesis and history of science*. New York: Columbia University Press.

Roa, S. & Oktaç, A. (2009). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto de transformación lineal. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, 13*(1), 89-112.

Robert, A. Robinet, J.; Tenaud, I. (1987). *De la géométrie à l' algèbre linéare*, Brochure 72, IREM de Paris VII.

Rogalski, M. (1991). Un enseignement de algèbre linéare en DEUG a première année, *Cahier des Didactique des Mathématiques* 53, IREM de Paris VII.

Robinet, J. (1986). Esquisse d'une Genèse des Concepts d'Algèbre Linèaire. *Cahier des Didactique des Mathèmatiques,* 29 IREM de Paris VII.

Revuz, A. (1971). The position of geometry in mathematical educaction. Editorial Studies in Mathematics *4*. 48-52. En Hernández, J. (1978). *J. Piaget G. Choquet J. Dieudonné R. Thom y otros: La enseñanza de las matemáticas modernas* (291-297). Madrid: Editorial Alianza.

Rodríguez, G.; Gil Javier; García E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa.* Málaga: Ediciones Aljibe.

Rodríguez, M. (2006). Sobre la Enseñanza de Conceptos matemáticos: Una reflexión pedagógica. *Revista Chilena de Educación Matemática RECHIEM, 2*(1), 61 - 78.

Rodríguez, M. & Parraguez, M. (2012). *Algunas herramientas para el trabajo de la matemática en el aula*. España: Editorial Académica Española.

Rodríguez, M. & Parraguez, M. (2013). Un reporte de la investigación: Construcción cognitiva de los conceptos espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ desde la teoría APOE. En Flores, R. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 26,* 573-581. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Schaaf, W. (1964). How modern matehmatics? *The Matthematics Teacher 57*. 89-97. En En Hernández, J. (1978). *J. Piaget G. Choquet J. Dieudonné R. Thom y otros: La enseñanza de las matemáticas modernas*. España: Editorial Alianza. 59-72.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as differents sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics,* 22, 1-36. En Hernández, J. (1978). *J. Piaget G. Choquet J. Dieudonné R. Thom y otros: La enseñanza de las matemáticas modernas* (59-72). Madrid: Editorial Alianza.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de Caso*. Madrid: Editorial Morata, S.L.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. En J. L. Dorier (ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*. Kluwer Academic Publishers, 209-246.

Soto, J. (2003). *Un estudio sobre las dificultades para la conversión gráfico-algebraica, relacionadas con los conceptos básicos de la teoría de los espacios vectoriales* $\mathbf{R}^2$ *y* $\mathbf{R}^3$. Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada. Unidad Zacatengo. México

Stone, M. (1961). The revolution in mathematics. The Bulletin of the association of american colleges. Vol. XLVII, p.304-327. En Hernández, J. (1978). *J. Piaget G. Choquet J. Dieudonné R. Thom y otros: La enseñanza de las matemáticas modernas* (73-97). Madrid: Editorial Alianza.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. *EducationalStudies in Mathematics*, *12*(2), 151-169.

Taylor, S.J. & Bodgan, R. (2010). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. España: Editorial Paidós.

Thom, R. (1970). Les mathématiques modernes: une erreur pédagogique et philosophique *? L'Age de la Science 3*. p. 225-236. En Hernández, J. (1978). *J. Piaget G. Choquet J. Dieudonné R. Thom y otros: La enseñanza de las matemáticas modernas*. Madrid: Editorial Alianza. 115-129.

Thom, R. (1974). Mathématiques modernes et mathématiques de toujours. *L'Age de la Science 3*. p. 39-536. En Hernández, J. (1978). *J. Piaget G. Choquet J. Dieudonné R. Thom y otros: La enseñanza de las matemáticas modernas*. Madrid: Editorial Alianza. 140-156.

Trigueros, M. (2005). La noción del esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática 17* (1), 5-31.

Trigueros, M., Oktaç, A. y Manzanero, L. (2007). Understanding of Systems of Equations in Linear Algebra. Demetra Pitta-Pantazi & George Philippou (Eds.), *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME*, 2359-2368

Trigueros, M. & Oktaç, A. (2005). La Théorie APOS et l'Enseignement de l'Algèbre Linéaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 10*, 157-176.

Uicab, R.; Oktaç, A. (2006). Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica. En *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 9*(3), 459-490.

Van der Waerden, B.L. (1937). *Modern Algebra*, vol. 2. Berlin: Springer-Verlag.

Vargas, X. N. (2007). *El estudio de los espacios vectoriales desde el punto de vista de la teoría APOE*. Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN.

Weller, K., Montgomery, A., Clark, J., Cottrill, J., Arnon, I., Trigueros, M. y Dubinsky E. (2002). *Learning Linear Algebra with ISETL*. Recuperado de http://homepages.ohiodominican.edu/~cottrilj/datastore/linear-alg/LLAWI-P3.pdf.

Yacuzzi, E. (2005). *El estudio de caso como metodología de investigación: teoría, mecanismos causales, validación*. Recuperado el 12 de junio de 2013 de: http://www.cema.edu.ar/publicaciones/download/documentos/296.pdf.

ANEXOS

ANEXOS 1
Cuestionarios

Cuadernillo de Trabajo:

Nombre: ____ Fecha: _______

Instrucciones: Considere la siguiente información, que a continuación se presenta, para responder algunas de las preguntas del cuestionario que le precede.

a).-Debe usar lápiz pasta para desarrollar el cuestionario
b).-No un hay tiempo límite para trabajar el cuestionario.

I) Procedimiento para obtener pares ordenados del conjunto solución de una ecuación lineal homogénea.

Tabla1: Procedimiento para obtener elementos del conjunto solución de una ELH.

Ecuación lineal homogénea: $3x+2y=0$
Procedimiento
Consideremos un par de números reales, uno el inverso aditivo del otro. Para simplicidad en los cálculos consideremos 5 y -5. Luego la ecuación lineal homogénea se puede descomponer de la siguiente manera: $3x=5 \wedge 2y=-5 \Rightarrow x=\frac{5}{3} \wedge y=\frac{-5}{2} \quad \vee \quad 3x=-5 \wedge 3y=5 \Rightarrow x=\frac{-5}{3} \wedge y=\frac{5}{2}$ Donde, $\left(\frac{5}{3},\frac{-5}{2}\right)$ y $\left(\frac{-5}{3},\frac{5}{2}\right)$ son dos elementos del conjunto solución de la ELH: $S=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}\times \boldsymbol{R} / 3x+2y=0\}$

II) Dado un conjunto G no vacío y K= **R** un cuerpo. Si (G,+) es un grupo y además una operación $\bullet : K\times G \rightarrow G$, $(p,v)\rightarrow p\bullet v$ que cumple con las siguientes propiedades:

(i) $(pq)\bullet v = p\bullet(q\bullet v)$; $p,q\in K; v\in G$
(ii) $(p+q)\bullet v = p\bullet v + q\bullet v$; $p,q\in K; v\in G$
(iii) $1\bullet v = v$; $1\in K; v\in G$
(iv) $p\bullet(v+w) = p\bullet v + p\bullet w$; $p\in K; v,w\in G$

G, con las operaciones dadas, es un **R** espacio vectorial.

1) Dada la Ecuación Lineal Homogénea (ELH) $3x + 5y = 0$, y su conjunto solución $S = \{(x, y) \in \boldsymbol{R^2} / 3x + 5y = 0\}$, responda las siguientes preguntas:

a) Determine, utilizando el procedimiento de la tabla 1, cinco pares ordenados que pertenezcan al conjunto solución de la ELH.

b) Considerando el apartado **a)**, reescriba el conjunto solución de la ELH.

c) ¿Existirá una ecuación lineal homogénea de dos incógnitas cuyo conjunto solución sea el conjunto vacío? Explique.

d) Considerando los pares ordenados del apartado **a)**, y el conjunto solución de apartado **b)**, ¿qué operaciones binarias se sugieren para el conjunto *S*? Explique.

2) Sean S_1, S_2 y S_3, los conjuntos solución de tres ELH distintas. Cada uno de los siguientes pares ordenados (-4,3), (-3,1) y (-1,2) pertenecen a S_1, S_2 y S_3, respectivamente.

a) ¿Cómo explica, geométricamente, la igualdad (-4,3) = -1(3,-1) + 1(-1,2)? Explique en la Figura 1.
b) Determine otro elemento de S_2 y de S_3 y luego escriba, de acuerdo a lo explicitado en el inciso **a)**, una nueva igualdad para (-4,3). Comente lo realizado.
c) Considerando dos pares ordenados de S_1, escriba una igualdad para el par ordenado (0,0).
d) Repita el inciso **c)** pero considerando un par ordenados de S_2 y otro de S_3. ¿Qué puede conjeturar? Explique.
e) Determine las ELH asociadas a S_1, S_2 y S_3, respectivamente, y establezca una relación entre ellas. Explique.

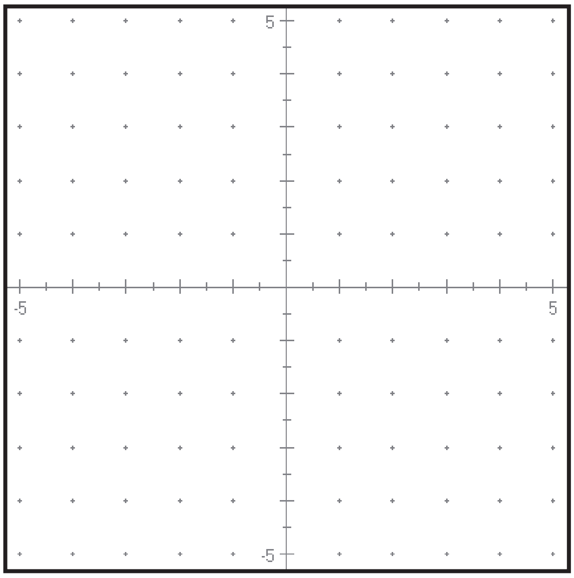


Figura1

3) Dada la ecuación lineal homogénea $ax + by = 0$ con $a,\ b \in$ **R**, responda a las siguientes preguntas:

a) Determine el conjunto solución para dicha ecuación. Explique
b) ¿Qué describe la ecuación $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1,0) + b(0,1)$; $\forall (a, b) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}$?
c) ¿Es la función biyectiva $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \times \{0\};\ a \to f(a) = (a, 0)$ un isomorfismo? Argumente.

4) Considere la Figura 2 para responder lo siguiente:

a) Determine 5 pares ordenados asociados a la gráfica de la Figura 2.

b) ¿Qué relación percibe Ud. de $f:\mathbf{R}\times\{(1,-3)\}\rightarrow\mathbf{R}^2$; $t\bullet(1,-3)=(t,-3t)$ y la gráfica de la Figura 2? Explique.

c) ¿Cómo interpreta el recorrido de la función f ?

d) Interprete geométricamente el hecho que la ELH $3x+2y=0$ escriba aditivamente en términos de las dos ecuaciones homogéneas: $x+y=0$ y $2x+y=0$.

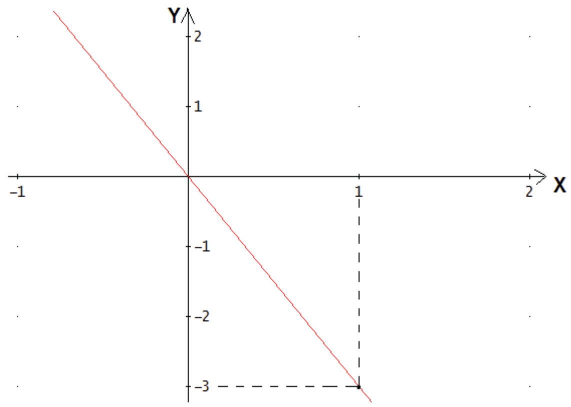
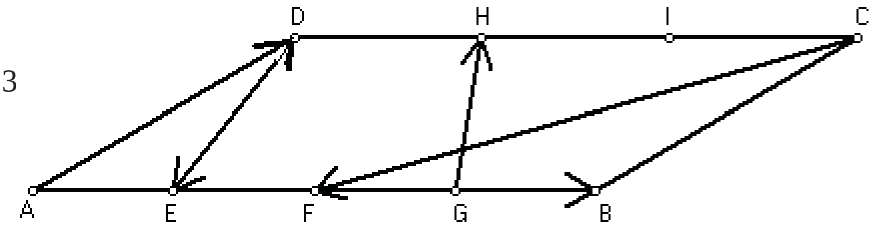


Figura 2

5) En la Figura 3, A, B, C y D son los vértices de un paralelogramo. El lado $\overline{AB}$ se divide en cuatro partes iguales y el lado $\overline{DC}$ en tres partes iguales.

Figura 3



a) Siendo $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DE} = \vec{u}$, $\overrightarrow{CF} = \vec{v}$ y $\overrightarrow{GH} = \vec{w}$. Escriba cada uno de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ en función de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

b) Escriba $\vec{w}$ en términos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

6) Sea $V = \{(a,b) / a,b \in \mathbf{R}^+\}$. Se define:

i) $(a,b) + (a_1,b_1) = (aa_1, bb_1)$; para todo (a, b); (a_1, b_1) en V

ii) $p(a,b) = (a^p, b^p)$; para todo $p \in \mathbf{R}$; para todo (a, b) en V

Determine si V , con las operaciones definidas anteriormente, es o no un espacio vectorial sobre $\mathbf{R}$.

ANEXOS 2
Entrevistas

Entrevista para el espacio vectorial $\mathbf{R}^2$

1) Si (-3,-2) es una solución de una ELH.

a) Determine una ELH que tenga por solución a (-3,-2)
b) Se pueden obtener todas las soluciones de la ELH a partir de un elemento cualquiera de *S*, utilizando la adición. Explique.
c) Repita la pregunta anterior pensando en la otra operación usual, multiplicación por escalar, de $\mathbf{R}^2$. Explique.
d) Si $S = \{(5a,-3a) \in \mathbf{R}^2 / a \in \mathbf{R}\}$, ¿es *S* todo $\mathbf{R}^2$? Explique.
e) Para dos elementos cualesquiera de *S*, ¿qué puede decir de los escalares α y β en la ecuación $\alpha \cdot (a,b) + \beta \cdot (c,d) = (0,0)$. Explique geométricamente

2) Dada la Ecuación Lineal No Homogénea (ELNH) $3x + 5y = 5$ y *S*' el CSLNH

a) Transforme dicha ecuación en una ELH. Explique geométricamente dicha transformación.
b) (*S*', +, $\cdot_{\boldsymbol{R}}$) es un R espacio vectorial. Explique.
c) Es posible definir operaciones no usuales a las de $\mathbf{R}^2$ en *S*' para que se obtenga todas las soluciones de *S*'. Ejemplifique y explique lo realizado.

3) Tenga en cuenta las dos operaciones usuales de $\mathbf{R}^2$ y dos elementos no nulos de los conjuntos solución de dos ELH no equivalentes. Responda.

a) ¿Se pueden obtener todos los elementos de $\mathbf{R}^2$ considerando sólo una operación binaria usual? Explique geométricamente.
b) Cómo se podría nombrar la estructura que permite obtener todos los elementos de $\mathbf{R}^2$. Explique.

4) ¿Existirá un sub-espacio vectorial de $\mathbf{R}^2$ que contengan los puntos A(2,5) y B(5,5)? Explique.

Entrevista espacio vectorial $\mathbf{R}^3$

Tenga presente las operaciones de adición de pares ordenados y multiplicación de un par ordenado y un escalar.

1) Sea $2x+3y+5z=0$ una ELH.

a) Muestre una solución de la ELH indicando el procedimiento a utilizar.

b) Con la solución anterior y solo con la adición usual de pares ordenados, ¿es posible obtener las demás soluciones del conjunto solución de la ELH? Explique

c) Con la solución anterior y solo con la multiplicación usual de un escalar real y par ordenados, ¿es posible obtener las demás soluciones del conjunto solución de la ELH? Explique.

d) Cuál es el mínimo número de soluciones necesarias para que, utilizando las dos operaciones usuales, sea posible obtener las demás soluciones del conjunto solución de la ELH. Explique

2) Sean los conjuntos $S_1=\left\{(t,2t,3t)\in \boldsymbol{R}^3 / t\in \boldsymbol{R}\right\}$ y $S_2=\left\{(2a,b,3a-2b)\in \boldsymbol{R}^3 / a,b\in \boldsymbol{R}\right\}$

a) ¿ $S_1=\boldsymbol{R}^3$? Explique

b) ¿ $S_2=\boldsymbol{R}^3$? Explique

3) Sabiendo que $\mathbf{R}$ y $\mathbf{R}^2$ son dos $\mathbf{R}$ espacios vectoriales (con las operaciones usuales). Considere las siguientes funciones:

i) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}\times\{0\}\times\{0\}; a\to(a,0,0)$ ii) $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2\times\{0\};\ (a,b)\to(a,b,0)$

a) Podemos afirmar que $\mathbf{R}\times\{0\}\times\{0\}$ y $\mathbf{R}^2\times\{0\}$ son $\mathbf{R}$ espacios vectoriales con las operaciones usuales respectivas.

b) ¿Es $\mathbf{R}^2$ un sub-espacio vectorial de $\mathbf{R}^3$? Explique

c) ¿Es $\mathbf{R}^2\times\{0\}$ un sub-espacio vectorial de $\mathbf{R}^3$? Explique

d) ¿Cuáles son los sub-espacios propios del $\mathbf{R}^3$ espacio vectorial? Explique

ANEXOS 3
Planificación Curso Optativo

Ficha Resumen
Asignatura Optativo II: Taller Fundamental de Matemática

Objetivos del Taller

Objetivo General:
Analizar estructura en subconjuntos de $\mathbf{R}^2$

Objetivos específicos:
.-Establecer el rol de una operación binaria, desde el trabajo de una Ecuación Lineal Homogénea (ELNH), en el conjunto solución de ésta.
.-Dotar de estructura al CSELH comparando el CSELNH.
.-Caracterizar el cartesiano $\mathbf{R}^2$ desde el trabajo de una ELH y su respectivo conjuntos solución (CSELH) desde el plano cartesiano.

Horario: 9:30- 11:00 / 11:10 a 12:20 **Duración**: Un semestre académico (16 semanas)

Unidades Temáticas

1.-Operaciones Binarias
.-Tablas de doble entrada y operaciones binarias en conjuntos finitos
.-Operación binaria interna y externa
.- Estructura algebraica (Estructura de grupo)

2.-Ecuación lineal homogénea y no homogénea.
.-Técnicas para resolver una ELH
.-Solución de una ELH y una ELNH
.-Conjunto solución de una ELH y Conjunto Solución de una ELNH
.-Estructura del CSELH y CSELNH

3.-El plano cartesiano
.-Ejes coordenados
.-Sistema de coordenadas rectangulares
.- Subconjuntos de $\mathbf{R}^2$.
.-Rectas vectoriales y afines

4.-El espacio vectorial $\mathbf{R}^2$
.-El cartesiano $\mathbf{R}^2$ y su estructura algebraica
.-Segmentos dirigidos en el plano cartesiano, la dilatación y contracción de un segmento
.-La estructura de espacio vectorial
.-Conexión con las ELH, ELNH, SELH, SELNH

Forma de trabajo: Trabajo grupal e individual. Utilización de fichas didácticas y discusión de clases.

Sobre las evaluaciones: Las evaluaciones se focalizarán en indagar como se aplica los distintos aspectos referidos a los conceptos matemáticos a trabajar. El nivel de exigencia es de un 60%.
Requisito: 100% asistencia, excepto situaciones médicas y de fuerza mayor debidamente justificadas en los plazos establecidos por el reglamento de la carrera.

Calendario de Evaluaciones:
Certamen1: 08 de Octubre / Certamen2: 12 de Noviembre / Certamen3: 03 de Diciembre / Examen: 10 de Diciembre

Observaciones al Curso Optativo
.- Se informa que el curso que se dictará está adaptado para sustentar un proceso investigativo.
.- Los certámenes corresponderán actividades que realizarán de manera individual o grupal lo que se irá comunicando en cada instancia.
.- Se aplicará una evaluación diagnóstica para indagar respecto de los conceptos previos operación binaria.

ANEXOS 4
Modelos de fichas didácticas

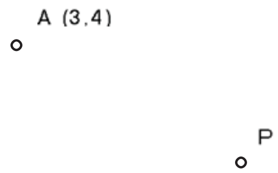
FICHA EXPLICATIVA

Objetivo: Identificar los elementos estructurales de un plano cartesiano

Para recordar:
-La geometría euclidiana plana se estructura en base a conceptos primitivos, definiciones, postulados, axiomas y teoremas.
.-Un Lugar Geométrico (L.G.), en el plano o espacio, es el conjunto de todos los puntos que satisfacen una o más condiciones a la vez.

Para trabajar

1) En el plano se tiene el punto A(3,4) y el punto P. ¿Cuáles son las coordenadas del punto P? Explique



2) Represente el LG de todos los puntos del plano que tienen abscisa cero para cualquier valor real de su ordenada. Exprese en notación conjuntista dicho conjunto.

3) Represente geométricamente el siguiente conjunto

a) $]3,5] \times [1,3[$

b) $A = \{(x, y) / x, y \in R^{+}\}$

Programa de Doctorado
Didáctica de la Matemática
Pontificia Universidad Católica Valparaíso

FICHA EJECUCIÓN

Objetivo: Identificar los elementos estructurales de un plano cartesiano

Para discutir: En relación al plano cartesiano, discutan cada una de las preguntas y organicen las distintas ideas para luego responder individualmente cada una de ellas:

1.- ¿Qué rol desempeña un par de ejes perpendiculares en un plano cartesiano? Explique

3.- ¿Qué son las coordenadas de un punto en el plano cartesiano? Explique.

4.- ¿Qué es un sistema de coordenadas rectangulares en el plano cartesiano? Explique

5.- ¿Qué es el plano cartesiano?

6.-Para cada una de las expresiones matemáticas, dé una representación geométrica
.

(a, b)	$\mathbf{R} \times \{0\}$	$\mathbf{R}$
$x = 0, y \in \mathbf{R}$	$y = 3, x \in \mathbf{R}$	$(y = 0, x \in \mathbf{R}) \wedge (x = 0, y \in \mathbf{R})$

7.- Para localizar puntos en el plano euclidiano, ¿es necesario utilizar más de dos ejes? ¿Es necesario que los ejes sean perpendiculares? Comente y explique.

8.- ¿Cuál es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de una recta L? Explique.

9.- Coloque, en la línea que antecede a cada proposición, una V si la proposición es verdadera o una F si esta es falsa. En caso de que su respuesta sea falsa justifique su respuesta.

1.___ Si A es una punto de una recta L, por dicho punto es posible trazar infinitas rectas perpendiculares a L.

____

2.___ La única manera de localizar un punto en el plano euclidiano es haciendo referencia a dos rectas secantes.

____

3.____ En la geometría euclidiana la idea de punto sugiere posición y la idea de recta dirección

FICHA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

1) Considere el punto P(2,5) en el plano cartesiano. Si se trasladan los ejes coordenados paralelamente ¿cómo se expresaría el punto *P* desde este nuevo sistema de coordenadas? Explique.

2) Sean $M_1(1,2)$; $M_2(4,3)$ y $M_3(2,5)$ los puntos medios de los lados de un triángulo. Determine los vértices de dicho triángulo.

3) Muestre y explique, por lo menos, tres procedimientos distintos para obtener una solución de la ecuación lineal homogénea $5x + 3y = 0$

FICHA EXPLICATIVA

Objetivo: Reconocer operaciones binarias y averiguar propiedades.

Para recordar:
(1) Una operación binaria se dice interna o ley de composición interna si:
$\otimes : A \times A \to A; (a_1, a_2) \to a_1 \otimes a_2 = a$ **,** $\forall a_1, a_2 \in A$
(2) Una operación binaria se dice externa o ley de composición externa si se da algunos de los siguientes casos:
$\oplus : B \times A \to A$; $\oplus : B \times A \to B$; $\oplus : A \times A \to B$; $\oplus : A \times B \to C$

Observación:
(3) Las operaciones binarias pueden cumplir ciertas propiedades, a saber: Clausura, asociativa, elemento neutro, elemento inverso, conmutativa y distributiva (en el caso de dos operaciones binarias).
(4) Un conjunto con una o dos operaciones binarias puede determinar una estructura algebraica; por ejemplo un grupo, un anillo.

Para discutir: Considere el conjunto $A = \{a, b, c\}$ y la operación binaria $*$ en dicho conjunto, la que se define por la tabla de doble entrada, Figura 1.

a) ¿Por qué la tabla, Figura 1, representa una operación binaria interna? Explique.

$*$	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

Figura 1

b) Determine (a $*$ b) $*$ b

c) Averigüe las propiedades que satisface $*$. Explique

Considere el conjunto $A = \{(x, y) / x, y \in \mathbf{R}^+\}$ y la operación binaria, para dicho conjunto, definida por:
$k \otimes (x, y) =: (x^k, y^k)$ con $k \in \mathbf{R}$.

a) ¿Por qué $\otimes$ es una operación binaria externa? Explique.

b) Como resolvería $2 \cdot 3 \otimes (1,2)$. Explique (donde $\cdot$ es la operación usual en **R)**

c) ¿Qué propiedades cumple $\otimes$? Explique

FICHA EJECUCIÓN

Objetivo: Reconocer operaciones binarias y averiguar propiedades.

1) Sea $A = \{a, b, c, d\}$ y la operación ♦ definida sobre *A*. Determine si (A,♦) es un grupo conmutativo. Explique.

♦	*a*	*b*	*c*	*d*
a	*a*	*b*	*c*	*d*
b	*b*	*a*	*d*	*c*
c	*c*	*d*	*a*	*b*
d	*d*	*c*	*b*	*a*

2) Sea $B = \{a, b\}$ un conjunto dadas las operaciones ♥ y ◊ definidas sobre *B*. Determine las propiedades que satisfacen en (*B*, ♥, ◊). Explique.

♥	*a*	*b*
a	*a*	*b*
b	*b*	*a*

◊	*a*	*b*
a	*a*	*a*
b	*a*	*b*

3) Sea $A = \{a, b, c, d, e\}$ y la operación ◊ definida sobre *A*, tabla adjunta. Tal que (A, ◊) es un grupo

Considerando que 3*a* = *a* ◊ *a* ◊ *a*, resuelva las siguientes ecuaciones:

a) *x* ◊ 3*c* = 2*e* ◊ *b*   b) *x* ◊ *a* = *a*   c) *x* ◊ 2*c* ◊ *d* = 2*a*

◊	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*
a	*e*	*a*	*b*	*c*	*d*
b	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*
c	*b*	*c*	*d*	*e*	*a*
d	*c*	*d*	*e*	*a*	*b*
e	*d*	*e*	*a*	*b*	*c*

4) Defina una operación no usual para **R** y averigüe qué operaciones satisfacen.

FICHA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Objetivo: Reconocer operaciones binarias y averiguar propiedades.

1) Considere un cuadrado que gira, con centro de giro el centro del cuadrado, según las manecillas del reloj en 90°, 180° y 270°. Siendo la posición (*a*) la rotación cero, (*b*) la rotación 90°, (*c*) rotación 180° y (*d*) rotación 270°, Figura 1.

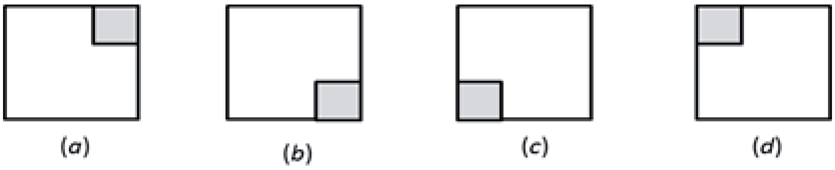


Figura 1: Rotaciones de un cuadrado según las manecillas del reloj.

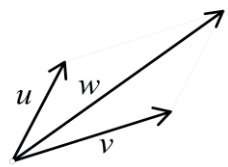
a) Defina una operación □ para las letras asociadas a la Figura 1 y luego determine:

i) b □ d ii) b □ b iii) d □ b iv) a □ b

b) ¿Qué propiedades satisface □ ? Explique

2) Sea **R** el conjunto de los número reales, ¿(**R**, $\cdot$) será un grupo? ¿Existirá un subconjunto, *S*, finito de R tal que (*S*, $\cdot_{\boldsymbol{R}}$) sean también un grupo. Explique.

3) Sean *u*, *v* y *w* tres vectores geométricos. Se define $u + v = w$ como se muestra en la figura de la derecha:



a) Investigue que propiedades tiene la suma de vectores. Explique
b) Qué ocurriría con $u + v$ si $u = v$. Explique
c) Si se define $k \cdot u$, con k en **R**. ¿Cómo clasifica dicha operación? ¿Interprete geométricamente?

FICHA EXPLICATIVA

Objetivo: Escribir por comprensión el conjunto solución de una Ecuación Lineal Homogénea (ELH) y una Ecuación Lineal no Homogénea (ELNH) en términos de un parámetro.

1.- Considere el siguiente procedimiento para obtener soluciones de la ELH $3x+5y=0$.

Procedimiento
Considere los números reales 4 y -4 para descomponer la ecuación lineal homogénea en dos ecuaciones:
i) $3x=4 \wedge 5y=-4 \Rightarrow x=\frac{4}{3} \wedge y=\frac{-4}{5}$ o bien ii) $3x=-4 \wedge 5y=4 \Rightarrow x=\frac{-4}{3} \wedge y=\frac{4}{5}$
Donde, $\left(\frac{4}{3},\frac{-4}{5}\right)$ y $\left(\frac{-4}{3},\frac{4}{5}\right)$ son dos soluciones de la ELH

a) ¿Qué propiedad permite justificar el procedimiento anterior? Explique.

b) ¿Cuántas soluciones tendrá la ELH en cuestión? Explique.

c) Determine, utilizando el procedimiento dado, otras 5 soluciones para la ELH $3x+5y=0$.

$\left(\frac{4}{3},\frac{-4}{5}\right)$	$\left(\frac{-4}{3},\frac{4}{5}\right)$					

d) Escriba por comprensión el conjunto solución de $3x+5y=0$. Explique

2.- Considere la ELNH $3x+5y=2$, ajuste el procedimiento dado en la pregunta 1 para obtener dos soluciones de la ELNH. Además escriba por comprensión el conjunto solución de esta.

3.- Escriba por comprensión el CSELH de $3x-2y=0$ y el CSELNH de $3x-2y=1$.

FICHA EJECUCIÓN

Objetivo: Determinar el conjunto solución de una Ecuación Lineal Homogénea (ELH)

1.-Para cada ELH o ELNH, escriba por comprensión el conjunto solución de estas.

ELH	Conjunto Solución
$5x+4y=0$	
$3x-2y=0$	
$5x+4y=3$	
$3x-2y=4$	
$\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}y=0$	
$\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}y=2$	

2.-Determine el conjunto solución de una ELH y una ELNH en términos de los parámetros que las definen:

a) $ax+by=0$ con $a,b \in \mathbf{R}$	b) $ax+by=c$ con $a,b,c \in \mathbf{R}$; $c \neq 0$

3.- Asigne un número real a una de las incógnitas de una ELH o una ELNH para obtener una solución.

Ecuación	Procedimiento	Solución
$3x+2y=0$		
$3x+2y=1$		

4.-Escriba por comprensión el CSELH y CSELNH de las ecuaciones en 3) considerando este nuevo procedimiento.

FICHA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

1) Si el par ordenado $(2,-5)$ es una solución de una ELH, indique otras dos soluciones sin recurrir a ningún procedimiento. ¿Cuál es la ELH? Explique en cada caso.

2) Considere la ELH $3x+5y=0$, de la cual se pueden obtener, por ejemplo pares de ELH como se presentan a continuación.

$x+2y=0 \wedge 2x+3y=0$; $x+2y=2 \wedge 2x+3y=-2$; $x+2y=\frac{1}{2} \wedge 2x+3y=\frac{-1}{2}$.

a) ¿Cómo esto es posible? Explique.

b) ¿Qué relación existe entre las soluciones de las ecuaciones que se desprenden y las soluciones de la ELH? Conjeture.

3) Considere la ELH $3x+2y=0$ de la cual se pueden obtener por ejemplo $6x+4y=0$; $\frac{3}{2}x+y=0$

a) ¿Cómo esto es posible? Explique

b) ¿Qué relación existe entre las soluciones del CSELH y las ELH que se obtienen a partir de ELH original? Conjeture.

Programa de Doctorado
Didáctica de la Matemática
Pontificia Universidad Católica Valparaíso

FICHA EXPLICATIVA

Fecha: _______

Nombre Alumno: ________________________________ Carrera: ______________

Objetivo: Identificar los elementos estructurales de un plano cartesiano

Para utilizar:

Un mapa conceptual de un concepto, es un diagrama que muestra relaciones conceptuales. En la Figura 1, se presenta el modelo Ausubeliano que se caracteriza por establecer niveles jerárquicos entre los conceptos de acuerdo al grado de inclusividad de estos, con la posibilidad de establecer relaciones cruzadas. La inclusividad se explicita a través de preposiciones entre los conceptos. Un mapa conceptual no es único.

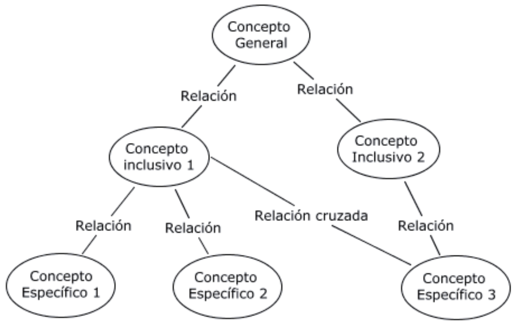


Figura 1: Modelo Ausubeliano de un mapa conceptual.

Actividad 1:

Liste conceptos ligados al concepto plano cartesiano.

Elabore un mapa conceptual para el concepto *plano cartesiano*.

Para discutir: En relación a la geometría euclideana, geometría analítica y el plano cartesiano, responda lo siguiente:

1.- Elabore un cuadro comparativo, con los elementos más representativos, en relación a la geometría euclideana plana y la geometría analítica plana.

2.- ¿Cuál es el rol que juegan un par de ejes en un plano cartesiano? Explique

3.- ¿Cómo define las coordenadas de un punto? Explique.

Programa de Doctorado
Didáctica de la Matemática
Pontificia Universidad Católica Valparaíso

FICHA EJECUCIÓN

Fecha: ___________

Nombre Alumno:_______________________________ Carrera: ________________

Objetivo: Identificar los elementos estructurales de un plano cartesiano

1.-Para cada una de las expresiones matemáticas, dé una representación geométrica
.

(a, b)	$\boldsymbol{R} \times \{0\}$	$\boldsymbol{R}$
$x = 0, \forall y \in \boldsymbol{R}$	$y = 3, x \in \boldsymbol{R}$	$(y = 0, x \in \boldsymbol{R}) \wedge (x = 0, y \in \boldsymbol{R})$

2.-Javiera plantea que para localizar puntos en el plano euclidiano es necesario utilizar más de dos ejes. ¿Javiera estará en lo correcto? Comente y explique.

3.- ¿Cuál es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de una recta L? Explique.

4) Coloque, delante de cada proposición, una V si la proposición es verdadera o una F si ésta es falsa. En caso de ser falsa justifique su respuesta.

a.___ Si A es una punto de una recta L, por dicho punto es posible trazar infinitas rectas perpendiculares a L.

____

b.___ La única manera de localizar un punto en el plano euclidiano es haciendo referencia a dos rectas secantes.

____

c.__ En la geometría euclideana la idea de punto sugiere posición y la idea de recta dirección

____

Programa de Doctorado
Didáctica de la Matemática
Pontificia Universidad Católica Valparaíso

FICHA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Fecha: ________________

Nombre Alumno:______________________________ Carrera: ________________

1) Considere el punto $P(3,4)$ en el plano cartesiano. Si se trasladan los ejes coordenados paralelamente, ¿cómo se denotaría el punto P desde este nuevo sistema de coordenada. Explique.

2) Sean $M_1(1,2)$; $M_2(4,3)$ y $M_3(2,5)$ los puntos medios de los lados de un triángulo. Determine los vértices de dicho triángulo.

3) Muestre y explique, por lo menos, tres procedimientos distintos para obtener una solución de la ecuación lineal homogénea $5x + 3y = 0$

ANEXOS 5

Respuestas **E1** Caso1 Cuestionario 1

a) $\cdot\ 3x=1 \wedge 5y=-1$, luego $x=\frac{1}{3} \wedge y=\frac{-1}{5}$, análogamente

$\cdot\ 3x=-1 \wedge 5y=1$, luego $x=-\frac{1}{3} \wedge y=\frac{1}{5}$

$\cdot\ 3x=2 \wedge 5y=-2$, luego $x=\frac{2}{3} \wedge y=-\frac{2}{5}$

$\cdot\ 3x=-2 \wedge 5y=2$, luego $x=\frac{-2}{3} \wedge y=\frac{2}{5}$

$\cdot\ 3x=95876 \wedge 5y=-95876$, luego $x=\frac{95876}{3} \wedge y=\frac{-95876}{5}$.

Así hemos obtenido 5 elementos del conjunto solución ya que $\left\{\left(\frac{1}{3},\frac{-1}{5}\right),\left(\frac{-1}{3},\frac{1}{5}\right),\left(\frac{2}{3},\frac{-2}{5}\right),\left(\frac{-2}{3},\frac{2}{5}\right),\left(\frac{95876}{3},\frac{-95876}{5}\right)\right\} \in S$

b) $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 3x+5y=0\}$ siguiendo la conjetura anterior.

$=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, x=\frac{a}{3} \wedge y=\frac{-a}{5} \text{ tq } a\in\mathbb{R}\}$

c) Si por ec. lineal homogénea se entiende una expresión igualada a cero (ya que no sé la definición formal o no lo recuerdo, pero infiero lo anterior de los ejemplos) no es posible encontrar uno con solución vacía ya que siempre estará la solución trivial en el conjunto solución.

d) tomaré dos pares ordenados especificos, particulares que pertenecen a $S\neq\emptyset$ y probaré, mas bien conjeturaré si sumándose y/o multiplicándose aún pertenecen a S (resultado)

$\left\{\left(\frac{1}{3},\frac{-1}{5}\right),\left(\frac{2}{3},\frac{-2}{5}\right)\right\} \in S$

$\cdot \left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{5}\right) + \left(\frac{2}{3}, \frac{-2}{5}\right) = \left(\frac{3}{3}, \frac{-3}{5}\right)$, luego $3\left(\frac{3}{3}\right) + 5\left(\frac{-3}{5}\right) = 0 \quad \therefore \left(\frac{3}{3}, \frac{-3}{5}\right) \in S$

$\cdot \left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{5}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}, \frac{-2}{5}\right) =$

según lo anterior

- la suma de dos pares ordenados, comúnmente definida como la suma término a término para ser una operación binaria en S.

$\left\{\left(\frac{a}{3}, \frac{-a}{5}\right), \left(\frac{b}{3}, \frac{-b}{5}\right)\right\} \in S \qquad \left(\frac{a+b}{3}, \frac{-(a+b)}{5}\right) \in S$

- $a(-b) - b(-a) \quad , \quad b(-a) - a(-b)$

  $-ab + ab \; 0 \; , \; -ab + ab$

si se define el producto entre los pares ordenados de la siguiente forma

$\left(\frac{a}{3}, \frac{-a}{5}\right) \cdot \left(\frac{b}{3}, \frac{-b}{5}\right) =$

$= \left(\left(\frac{a}{3}\right)\left(\frac{-b}{5}\right) - \left(\frac{b}{3}\right)\left(\frac{-a}{5}\right), \left(\frac{b}{3}\right)\left(\frac{-a}{5}\right) - \left(\frac{a}{3}\right)\left(\frac{-b}{5}\right)\right)$

$= (0, 0) \in S$

2) Sean S_1, S_2 y S_3, los conjuntos solución de tres ELH distintas. Cada uno de los siguientes pares ordenados (-4,3), (~~4~~3,1) y (-1,2) pertenecen a S_1, S_2 y S_3, respectivamente.

a) ¿Cómo explica, geométricamente, la ecuación (-4,3) = ~~-1(3,-1)~~ + 1(-1,2) ? Explique en la Figura 1.
(-3,1) = -1(3,-1)

b) Determine otro elemento de S_2 y de S_3 y escriba, de acuerdo a lo explicitado en el inciso a), una nueva ecuación para (-4,3). Comente lo realizado.

c) Considerando dos pares ordenados de S_1, escriba una ecuación para el par ordenado (0,0).

d) Repita el inciso c) para un par ordenados de S_2 y otro de S_3. ¿Qué puede conjeturar? Explique.

e) Determine las ELH asociadas a S_1, S_2 y S_3, respectivamente, y establezca una relación entre ellas. Explique.

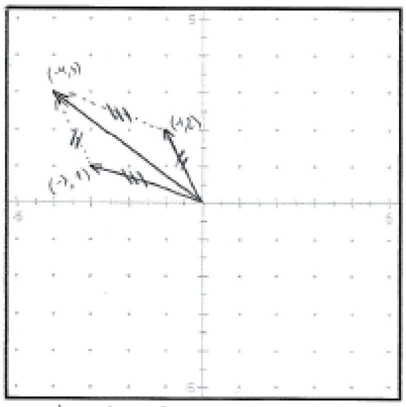


Figura1

b) ~~[illegible]~~ según ejercicio anterior si $(a,b) \in S \Rightarrow (-a,-b) \in S$. simplemente pensé no cierto para elegir elementos de S_2, S_3

Sean $(-3,1) \in S_2$ ∧ $(1,-2) \in S_3$

$(-4,3) = 1(-3,1) - 1(1,-2)$

• bueno si son pares ordenados las soluciones, entonces la ELH es de dos incognitas entonces conjunto solución imaginé es una recta (ya que si no pido otra solución deben haber infinitas), así si $(a,b) \in S \Rightarrow (-a,-b) \in S$ ya que están en la misma recta. (son proporcionales) ~~¿paralelos?~~ por lo que ...

c) sean $(-4,3), (4,-3) \in S_1$ luego $(0,0) = 1(-4,3) + 1(4,-3)$.

d) · sean $(-3,1), (3,-1) \in S_2$ luego $(0,0) = 1(-3,1) + 1(3,-1)$

· sean $(-1,2), (1,-2) \in S_3$ luego $(0,0) = 1(-1,2) + 1(1,-2)$.

Que dados dos elementos del conjunto solución de una ELH de dos incognitas ~~[illegible]~~ estos son LD. linealmente dependiente, pues son proporcionales.

(-4, 3)   (3, -1)   (-1, 2)

e) $\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y = 0 \leftarrow ELH(S_1) \rightarrow 3x + 4y = 0$ ①

$\frac{1}{3}x + y = 0 \leftarrow ELH(S_2) \rightarrow x + 3y = 0$ ②

$x + \frac{1}{2}y = 0 \leftarrow ELH(S_3) \rightarrow 2x + y = 0$ ③

La única relación que veo es que son de 2 incógnitas

que puedo sumar ② y ③ para obtener ①.

en realidad hacer "combinaciones lineales" entre ellas para obtener la otra

al igual que con las soluciones

3) Dada la ecuación lineal homogénea $ax + by = 0$ con $a,\ b \in \boldsymbol{R}$. Responda a las siguientes preguntas:

a) Determine el conjunto solución para dicha ecuación. Explique
b) ¿Qué describe la ecuación $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1,0) + b(0,1);\ \forall(a, b) \in \boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$?
c) ¿Es la función biyectiva $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}\times\{0\};\ a \to f(a) = (a, 0)$ un isomorfismo? Argumente.

a) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ ax + by = 0 \ ;\ a,b \in \mathbb{R}\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ x = \frac{t}{a} \wedge b = \frac{-t}{b}$, con $t \in \mathbb{R} \wedge a,b \neq 0\}$.

si $a,b = 0 \Rightarrow S = \mathbb{R}^2$.

b) ¿cómo encontrar las bases canónica de $\mathbb{R}^2$?
La combinación lineal para llegar a un elemento de $\mathbb{R}^2$ dada la base canónica?

c) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\times\{0\}$
$a \longrightarrow f(a) = (a,0)$

no recuerdo que era isomorfismo. ¿que era invertible? no sé

4) Considere la Figura 2 para responder lo siguiente:

a) Determine 5 pares ordenados asociados a la gráfica de la Figura 2.

b) ¿Qué relación percibe Ud. de $f:\mathbf{R}\times\{(1,-3)\}\rightarrow\mathbf{R}^2$; $t\bullet(1,-3)=(t,-3t)$ y la gráfica de la Figura 2? Explique.

c) ¿Cómo interpreta el recorrido de la función f?

d) Interprete geométricamente el hecho que la ELH $3x+2y=0$ se pueda escribir aditivamente en términos de las dos ecuaciones homogéneas: $x+y=0$ y $2x+y=0$.

a) $(1,-3)$, $(-1,3)$, $(\frac{1}{3},-1)$, $(\frac{-1}{3},1)$, $(\frac{2}{3},-2)$

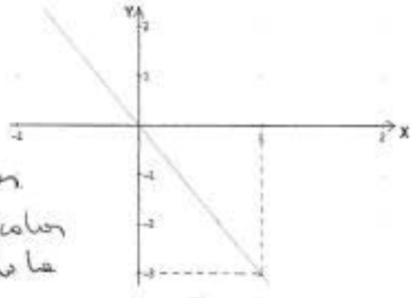


Figura 2

b) la gráfica corresponde a la de f, pues $(1,-3)$ pertenece a la gráfica y t es un escalar que amplifica o reduce este vector, generando la recta.

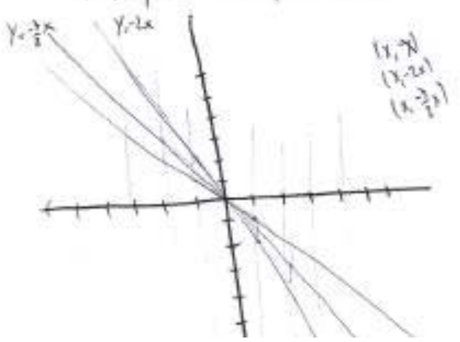
c) el recorrido es $\{(t,-3t)$ tq $t\in\mathbb{R}\}\subset\mathbb{R}^2$

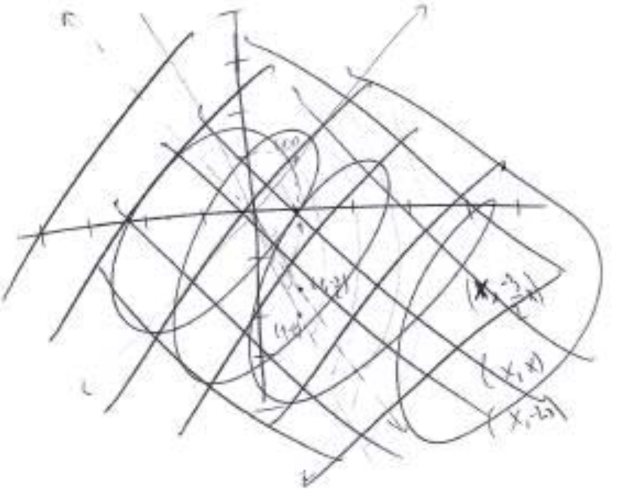
no sé cómo interpretarlo si sólo una recta que pasa por el origen. fc lineal.

d) $3x+2y=0 \Rightarrow y=-\frac{3}{2}x$

$x+y=0 \Rightarrow x=-y$

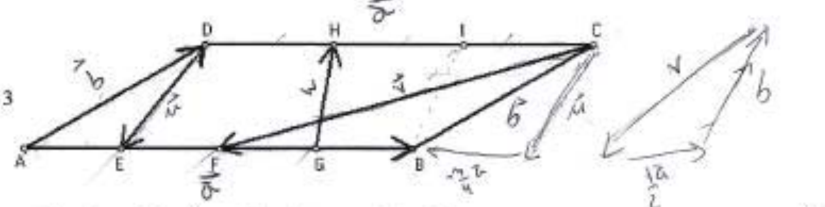
$2x+y=0 \Rightarrow y=-2x$





5) En la Figura 3, A, B, C y D son los vértices de un paralelogramo. El lado $\overline{AB}$ se divide en cuatro partes iguales y el lado $\overline{DC}$ en tres partes iguales.

Figura 3



a) Siendo $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{DE}=\vec{u}$, $\overrightarrow{CF}=\vec{v}$ y $\overrightarrow{GH}=\vec{w}$. Escriba cada uno de los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ en función de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

b) Escriba $\vec{w}$ en términos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

a) $\vec{b}+\vec{u}=\frac{1}{4}\vec{a} \Rightarrow \vec{u}=\boxed{\frac{1}{4}\vec{a}-\vec{b}}$

$\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{a}=-\vec{b} \Rightarrow \vec{v}=\boxed{-\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}}$

$\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{a}=\frac{3}{4}\vec{a}+\vec{w} \Rightarrow w=\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{3}{4}\vec{a}=\boxed{\vec{b}-\frac{5}{12}\vec{a}}$

b)

$w=b+\frac{1}{3}a-\frac{3}{4}a$

$w=b-\frac{1}{4}a-\frac{2}{4}a+\frac{1}{3}a$

$=-u-\frac{2a}{4}+\frac{1}{3}a$

$=-u-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}a$

$\vec{v}-\frac{1}{4}\vec{a}+w=-\frac{\vec{a}}{2}$

$w=-\frac{1}{4}\vec{a}-v$

6) Sea $V = \{(a,b) / a,b \in \mathbf{R}^+\}$. Se define:

i) $(a,b)+(a_1,b_1)=(aa_1,bb_1)$; para todo (a, b); (a_1, b_1) en V

ii) $p(a,b)=(a^p,b^p)$; para todo $p \in R$; para todo (a, b) en V

Determine si V, con las operaciones definidas anteriormente, es o no un espacio vectorial sobre R.

$(V,+)$: no recuerdo la definición de grupo. (debe ser que conmute, asocie y tenga neutro, pero claramente no hay inverso ya que $a,b \in \mathbb{R}^+$)

$(a_1,b_1)=(1,1)$ es el neutro

claramente conmuta y asocia.

sean $p,q \in \mathbb{R}$ y $(a,b) \in V$. $\exists (a_1,b_1)$

ii) $(pq)(a,b) = (a^{pq}, b^{pq}) = ((a^p)^q, (b^p)^q) = q(a^p,b^p) = q[p(a,b)]$ ✓✓

$(p+q)(a,b) = (a^{p+q}, b^{p+q}) = (a^p \cdot a^q, b^p \cdot b^q) = (a^p,b^p)+(a^q,b^q) = p(a,b)+q(a,b)$ ✓✓

$1 \cdot (a,b) = (a^1,b^1) = (a,b)$ ✓✓

$p((a,b)+(a_1,b_1)) = p(aa_1,bb_1) = ((aa_1)^p,(bb_1)^p) = (a^p a_1^p, b^p b_1^p) = (a^p,b^p)+(a_1^p,b_1^p) = p(a,b)+p(a_1,b_1)$ ✓✓

no lo tengo muy claro pues no recuerdo la definición

Suponiendo que V es un grupo con la operación +, entonces sí es un espacio vectorial, pues además cumple con las condiciones demostradas

ANEXOS 6
Respuestas **E2** Caso1 Cuestionario 1

a) Consideremos los siguientes pares ordenados:

- $(x_1,y_1) = (1,-1)$ $\quad 3x = 1 \wedge 5y = -1$, $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{-1}{5}$
- $(x_2,y_2) = (-1,1)$ $\quad 3x = -1 \wedge 5y = 1$, $x = \frac{-1}{3}$, $y = \frac{1}{5}$
- $(x_3,y_3) = (2,-2)$ $\quad 3x = 2 \wedge 5y = -2$, $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{-2}{5}$
- $(x_4,y_4) = (-2,2)$ $\quad 3x = -2 \wedge 5y = 2$, $x = \frac{-2}{3}$, $y = \frac{2}{5}$
- $(x_5,y_5) = (-8,8)$ $\quad 3x = -8 \wedge 5y = 8$, $x = \frac{-8}{3}$, $y = \frac{8}{5}$

Los siguientes elementos pertenecen al conjunto de soluciones de la ELH, estos son: $\left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{5}\right), \left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{5}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{-2}{5}\right), \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{5}\right), \left(\frac{-8}{3}, \frac{8}{5}\right)$. (Estos son algunos elementos).

b) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / 3x + 5y = 0\} \rightarrow$ Infinitas soluciones.

Pero mis soluciones se obtienen de lo siguiente.

$$S_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x = \frac{n}{3} \wedge y = \frac{-n}{5} \;/\; n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

$$S_1 \subset S.$$

c) Creo que no existe una ELH con conjunto de soluciones el vacío. Pensé en varios casos pero no la he podido encontrar. No se me ocurre como demostrarlo.

d) Podemos hacer todas las operaciones porque si tomo un punto y se lo sumo al vacío, en el vacío no hay puntos, entonces quedaría el punto inicial.

~~a) $(-4,3) = -1(3,1) + 1(-1,2)$ esto no !!~~
~~$(-3,-1)+(-1,2)$~~
~~$(-4,1) \neq (-4,3)$~~

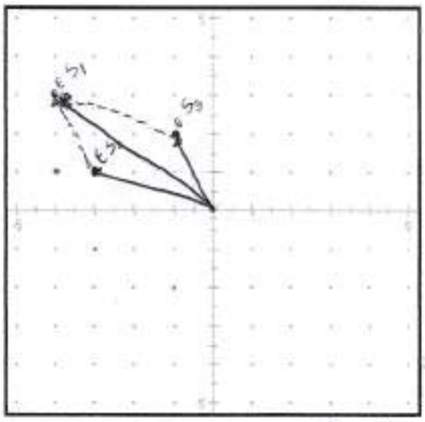


Figura1

a) $(-4,3) = -1\underbrace{(3,-1)} + 1(-1,2)$
$= (-3,1) + (-1,2)$
$= (-4,3)$ ✓

Podemos ubicar el ~~vector~~ punto $(3,-1)$, como (-1) esta multiplicando al punto, le cambia los signos, quedando $(-3,1)$.
Si ubicamos $(3,-1)$ y lo unimos al origen tenemos un vector, que al multiplicarlo no cambia su magnitud, sino que cambia la dirección (*no me acuerdo si era sólo dirección o sólo sentido o ambas, pero queda como $(-3,1)$).
Luego ubicamos el otro punto, lo unimos con el origen, y para sumar el vector $(-3,1)$ con el vector $(-1,2)$ usamos el método del paralelogramo, obtenemos $(-4,3)$.

b) $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \in S_2$ y $\left(-\frac{1}{2}, 1\right) \in S_3$
$(-4,3) = -2\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) + 2\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

c) $(-4,3)\in S_1$ y $(4,-3)\in S_1$

$1(-4,3)+1(4,-3)=(0,0)$.

d) $\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)\in S_2$ y $\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\in S_2$

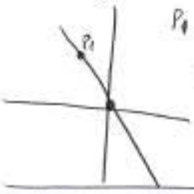
$1\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)+1\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)=(0,0)$.

$\left(-\frac{1}{2},1\right)\in S_3$ y $\left(\frac{1}{2},-1\right)\in S_3$

$1\left(-\frac{1}{2},1\right)+1\left(\frac{1}{2},-1\right)=(0,0)$.

Conjetura: Que fue lo que utilicé en (b), (c) y (d) para encontrar pares que pertenezcan a S_1, S_2, S_3. Vi a los puntos como vectores al unirlos con el origen y al amplificarlos por un número, el vector crecía o se achicaba pero no cambiaba su sentido, es decir, al hacer eso de amplificar podía obtener muchas soluciones de la ELH.

Con un dibujo $ax+by=0$.



$P_1\in S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / ax+by=0\}$ ELH.

Cuando yo amplifico a P_1 sigo en la misma recta, ~~[illegible]~~ solo que voy a ~~[illegible]~~ otras soluciones, no me salgo de la recta ya que no estoy sumando algún número.

e) Tengo que encontrar las ELH

$ax+by=0$ se que $(-4,3)\in S_1$, reemplazo en la ec.

$-4a+3b=0 \Rightarrow -4a=-3b$, ~~[illegible]~~ vuelvo a reemplazar

$\boxed{a=\frac{3b}{4}}$

$\frac{3b}{4}x+by=0$ $\boxed{\text{con } b=1}$

$\boxed{\frac{3}{4}x+y=0}$ ELH de S_1.

De la misma manera calculo las otras ecuaciones:

ELH de S_2 =: $\frac{1}{3}x+y=0$

ELH de S_3 =: $\frac{2x}{[illegible]}+y=0$

Hay yo hice mis ecuaciones con $b=1$, pero $b\in\mathbb{R}/\{0\}$. Vamos a obtener muchas ecuaciones equivalentes.

a) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / ax+by=0\}$. Esta claro que cualquier punto de $\mathbb{R}^2$ que cumpla la ecuación lineal homogénea, va a pertenecer al conjunto de soluciones. Son infinitos pares los que cumplen, pero todos los puntos de ~~esta~~ las siguientes formas van a cumplir:

$S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = \frac{n}{a} \ \wedge \ y = \frac{-n}{b} \ , \ n \in \mathbb{N}\}$

$S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = -\frac{n}{a} \ \wedge \ y = \frac{n}{b} \ , \ n \in \mathbb{N}\}$, $\boxed{a, b \neq 0}$

Donde $S_1 \in S \ \wedge \ S_2 \in S$

b) $(a,b) = \underbrace{(a,0) + (0,b)}$

Lo veo como una manera de descomponer al par ordenado (a,b)

Porque en $\mathbb{R}^2$ se suma coordenada a coordenada, entonces

$(a,0) + (0,b) = (a+0, 0+b)$
$= (a, b)$

Como el cero es el neutro aditivo, no ~~cambia~~ hace algo en las sumas.

$(a,b) = \underbrace{a(1,0) + b(0,1)}$

Es otra manera de descomponer al par ordenado (a,b), pero $(1,0)$ y $(0,1)$, van a generar a cualquier par ordenado (a,b).

$(a,b) \in \mathbb{R}^2 = \langle (1,0),(0,1) \rangle$.

Pero además $(1,0),(0,1)$, es linealmente independiente, y como genera a cualquier par (a,b), es una base de $\mathbb{R}^2$.

$$\left.\begin{aligned} (0,0) &= \alpha(1,0) + \beta(0,1) \\ &= (\alpha,\beta) \\ &\alpha = 0 \;\; y \;\; \beta = 0 \end{aligned}\right\} \text{ Es L.I.}$$

$$\left.\begin{aligned} (a,b) &= \alpha(1,0) + \beta(0,1) \\ a &= \alpha \\ b &= \beta \end{aligned}\right\} \text{ Genera a } \mathbb{R}^2.$$

Entonces $\{(1,0),(0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$

c) $$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\times 0$$
$$a \longrightarrow (a,0)$$

~~Creo que no es un isomorfismo porque los espacios deben tener la misma dimensión y si se tiene esta función que es biyectiva y pero las dimensiones no son iguales.~~

Para que haya un isomorfismo, los espacios, el de partida y el de llegada deben tener igual dimensión, al principio creí que no tenían, pero después me di cuenta de que sí, ambos tienen dimensión 1. Entonces $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}\times 0$, entonces existe una función biyectiva.

Por lo tanto f sí es un isomorfismo.

a) ~~Ut~~ Utilizaré la conjetura del problema 2.
Pares asociados a la gráfica
$(0,0)$, $(1,-3)$, $(-1,3)$, $\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$,
$\left(\frac{1}{3},-1\right)$, $\left(-\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$

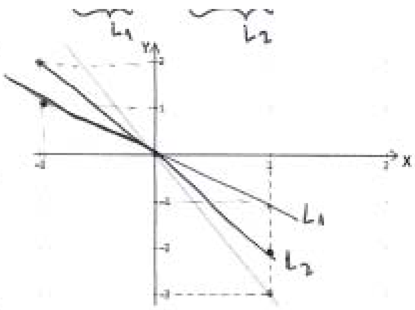


Figura 2

b) $f: \mathbb{R} \times \{(1,-3)\} \to \mathbb{R}^2$

$t\cdot(1,-3) = (t,-3t)$ → Me da el conjunto de todas las soluciones de la ELH, con $t \in \mathbb{R}$. ~~Me da la~~ Idea de la conjetura del problema 2.

c) El recorrido, corresponde a los valores del eje y, entonces $-3t$, $t \in \mathbb{R}$, son todas las imágenes. ya que el "t" me permite moverme sobre la recta, sin salirme de ella, haciendome pasar por todos los valores de las imágenes.

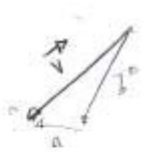
d)

a) Siendo $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DE} = \vec{u}$, $\overrightarrow{CF} = \vec{v}$ y $\overrightarrow{GH} = \vec{w}$. Escriba cada uno de los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ en función de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

b) Escriba $\vec{w}$ en términos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

a) $\vec{u} = (-\vec{b}) + \dfrac{\vec{a}}{4}$

$\vec{v} = (-\vec{b}) + \left(-\dfrac{\vec{a}}{2}\right)$



$\vec{w} =$

A) PD:

i) $[(a,b) + (a_1,b_1)] + (a_2,b_2) = (a,b) + [(a_1,b_1) + (a_2,b_2)]$

$[(a,b) + (a_1,b_1)] + (a_2,b_2) = (aa_1, bb_1) + (a_2,b_2)$

$= (aa_1 \cdot a_2, bb_1 \cdot b_2)$

$(a,b) + [(a_1,b_1) + (a_2,b_2)] = (a,b) + (a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot b_2)$

~~Es asociativo~~

$= (a \cdot a_1 \cdot a_2, b \cdot b_1 \cdot b_2)$

Es asociativo $\forall (a,b), (a_1,b_1)$ (a_2,b_2) en V.

ii) $(1,1) + (a,b) = (1 \cdot a, 1 \cdot b) = (a,b)$

$(a,b) + (1,1) = (a \cdot 1, b \cdot 1) = (a,b)$

$\forall (a,b)$ en V, $\exists (1,1)$ tq $(1,1)$ es neutro.

iii) $(a,b) + (\frac{1}{a}, \frac{1}{b}) = (a \cdot \frac{1}{a}, b \cdot \frac{1}{b}) = (1,1)$.

$\forall (a,b)$ en V, $\exists (\frac{1}{a}, \frac{1}{b})$ en V, tq $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})$ es inverso de (a,b).

En la definición del comienzo no dijo que con la primera operación se tenía que dar la conmutatividad, aquí ya se tiene que es grupo. Creo que se debe cumplir que sea grupo abeliano, entonces veré si pasa.

iv) PD: $(a,b) + (a_1,b_1) = (a_1,b_1) + (a,b)$

$(a,b) + (a_1,b_1) = (a \cdot a_1, b \cdot b_1)$

$= (a_1 \cdot a, b_1 \cdot b)$

$= (a_1,b_1) + (a,b)$ #

$a, a_1, b, b_1 \in \mathbb{R}^+$, los reales conmutan en la multiplicación.

Con la primera operación es grupo abeliano.

B) PD: $p(a,b) = (a^p, b^p)$, $p \in \mathbb{R}$, $(a,b) \in V$.

$(p\cdot q)(a,b) = p\left[q(a,b)\right]$ ∴ $p[q(a,b)] = p(a^q, b^q)$

$(p\cdot q)(a,b) = \boxed{a^{pq}, b^{pq}}$

$= (a^q)^p, (b^q)^p$

$= a^{qp}, b^{qp}$

$= \boxed{a^{pq}, b^{pq}}$

Se cumple la propiedad, $p, q \in \mathbb{R}$, $(a,b) \in V$.

PD:

$(p+q)(a,b) = p(a,b) + q(a,b)$

$(p+q)(a,b) = a^{p+q}, b^{p+q}$

$p(a,b) + q(a,b) = (a^p, b^p) + (a^q, b^q)$

$= a^p \cdot a^q, b^p \cdot b^q$

$= (a^{p+q}, b^{p+q})$

Se cumple la propiedad. $\forall (a,b)$ en V, $p, q \in \mathbb{R}$.

PD: $1\cdot(a,b) = (a,b)$

$1\cdot(a,b) = (a^1, b^1)$

$= (a,b)$

Se cumple, $1 \in \mathbb{R}$, (a,b) en V.

PD: $p\cdot\left((a,b) + (a_1,b_1)\right) = p(a,b) + p(a_1,b_1)$

$p\left[(a,b) + (a_1,b_1)\right] = p(aa_1, bb_1)$

$= (aa_1)^p, (bb_1)^p$

$= \boxed{(a^p a_1^p, b^p b_1^p)}$

$p(a,b) + p(a_1,b_1) = (a^p, b^p) + (a_1^p, b_1^p)$

$= \boxed{(a^p a_1^p, b^p \cdot b_1^p)}$

Se cumple la propiedad $\forall (a,b), (a_1,b_1)$ en V y $p \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto V es un $\mathbb{R}$ espacio vectorial.

* Como estamos en los reales, y $a, b, a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}^+$, cumple la axiomática de $\mathbb{R}$.

ANEXOS 7
Respuestas **E3** Caso1 Cuestionario 1

a- $3x=1 \wedge 5y=-1$
$x=1/3 \quad y=-1/5$
$(1/3, -1/5)$

$3x=-1 \wedge 5y=1$
$x=-1/3 \quad y=1/5$
$(-1/3, 1/5)$

$3x=0 \wedge y=0$
$x=0 \wedge y=0$
$(0,0)$

$3x=2 \wedge 5y=-2$
$x=2/3 \wedge y=-2/5$
$(2/3, -2/5)$

$3x=-2 \wedge 5y=2$
$x=-2/3 \quad y=2/5$
$(-2/3, 2/5)$

b- Sea $x=a$ e $y=-a$
$3x=a \quad 5y=-a$
$x=a/3 \quad y=-a/5$
$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x=a/3 \wedge y=-a/5, a\in\mathbb{R}\}$

c- No, ya que toda ecuación lineal tiene por lo menos la solución trivial $(0,0)$.

d- $(S, \cdot t)$, $\cdot: \mathbb{R}\times S \longrightarrow S$, $(a,b)\in S$
$t\cdot(a,b) \rightsquigarrow (ta, tb)$, ya que al tener una solución, ~~[illegible]~~ se pueden ir calculando las demás sólo al multiplicarla por algún escalar

a- El vector $(-4,3)$ corresponde a ser la diagonal del paralelogramo formado por el vector $(-1,2)$ y el vector $(3,-1)$ orientado en el sentido inverso.

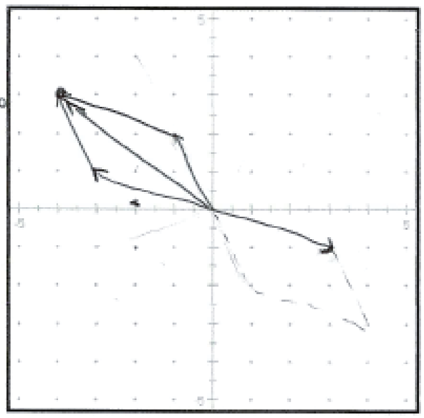


Figura1

b- Otra solución de S_2 y S_3 serio $(-3,1)$ y $(1,-2)$ respectivamente.

$(4,-3) = 1(-3,+1) + 1(+1,-2)$.

Son los mismos vectores que antes pero en distinto sentido

c- ~~$(0,0) = 1(0,0) + 1(0,0)$. tanto en S_2 y S_3 debe estar la solución $(0,0)$ por ser sistemas homogenos~~

$(0,0) = 1(-4,3) + 1(4,-3)$

d- $\underbrace{(0,0) = 1(-3,1) + 1(3,-1)}_{S_2}$, $(0,0) = 1(-1,2) + 1(1,-2)$

en una ecuacion homogenea si a es solución, entonces -a tambien lo es. donde (-a) es el inverso aditivo de a

2- S_1: $\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y = 0$ S_2: $\frac{1}{3}x + y = 0$ S_3: $x + \frac{1}{2}y = 0$

a- $S:\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / ax=d , by=\bar{d} , a,b,d\in\mathbb{R}\}$

b- que el vector (a,b) es una combinación lineal de la base canónica

c- $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\times\{0\}$
$a\rightsquigarrow(a,0)$

Para que $\mathbb{R}\simeq\mathbb{R}\times\{0\}$ se necesita una ~~[illegible]~~ función biyectiva desde $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}\times\{0\}$ o viceversa. Claramente f lo es, por lo que los espacios son isomorfos.

Además ~~[illegible]~~ que 2 conjuntos sean isomorfos significa que tienen la misma estructura, y en $\mathbb{R}\times\{0\}$ las operaciones sólo afectarán a "a", ya que 0 es el neutro, por lo que tendría la misma forma que en $\mathbb{R}$.

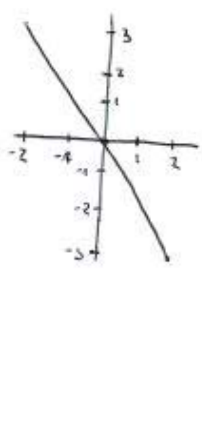
a- 1: $(0,0)$ 4: $(2,-6)$
2: $(1,-3)$ 5: $(-2,6)$ } ocupo el hecho de que es función impar
3: $(-1,3)$

Figura 2

b- La relación $f:\mathbb{R}\times\{(1,-3)\}\longrightarrow\mathbb{R}^2$
$t\cdot(1,-3)\rightsquigarrow(t,-3t)$ es una parametrización de la recta asociada a la figura 2.
además describe la ecuación vectorial de la recta que tiene como vector soporte el $(1,-3)$ y el vector director $(0,0)$

c- Que la ecuación homogenea asociada a la recta $3x+y=0$ tiene infinitas soluciones, donde si a es solución su inverso aditivo también lo es por la paridad de la recta

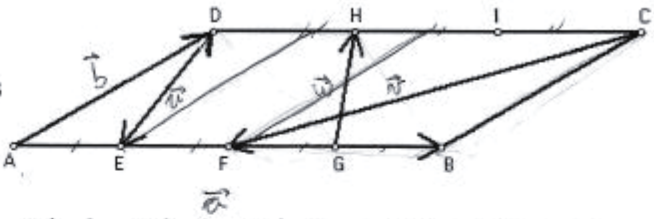
d-



ambas ecuaciones tienen el mismo espacio solución.

5) En la Figura 3, A, B, C y D son los vértices de un paralelogramo. El lado $\overline{AB}$ se divide en cuatro partes iguales y el lado $\overline{DC}$ en tres partes iguales.

Figura 3



a) Siendo $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{DE}=\vec{u}$, $\overrightarrow{CF}=\vec{v}$ y $\overrightarrow{GH}=\vec{w}$. Escriba cada uno de los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ en función de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

b) Escriba $\vec{w}$ en términos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

a-: $\vec{u} = \vec{b} - \frac{\vec{a}}{4}$ $\qquad$ $\vec{v} = \frac{\vec{a}}{2} + \vec{b}$

6) Sea $V = \{(a,b)/a,b \in \mathbf{R}^{+}\}$. Se define:

i) $(a,b)+(a_1,b_1)=(aa_1,bb_1)$; para todo (a, b); (a_1, b_1) en V

ii) $p(a,b)=(a^{p},b^{p})$; para todo $p \in R$; para todo (a, b) en V

Determine si V, con las operaciones definidas anteriormente, es o no un espacio vectorial sobre R.

• $(V,+)$ es un grupo abeliano, ya que al estar definida como el producto componente a componentes y estos están en $\mathbb{R}$, se sabe que es ~~[illegible]~~ asociativo, conmutativo, tiene neutro, que sería $(1,1)$, ya que $(a,b)+(1,1)=(a\cdot 1,b\cdot 1)=(a,b)$ y el inverso sería el par con el inverso multiplicativo de cada componente.
$(a,b)+(a^{-1},b^{-1}) = (aa^{-1}, bb^{-1}) = (1,1)$.

• $(V,\cdot)$ es un espacio vectorial, ya que la multiplicación por escalar corresponde justamente a la suma de p vectores iguales. Con esto cumple las propiedades del producto por escalar.

Sea $v=(a,b)$, $w=(c,d)$

- $1\cdot(a,b)=(a,b)$
- $p(v+w) = p(ac,bd) = ((ac)^p,(bd)^p) = (a^pc^p, b^pd^p) = (a^p,b^p)+(c^p,d^p) = pv+pw$
- $(p+q)v = (p+q)(a,b) = (a^{p+q}, b^{p+q}) = (a^pa^q, b^pb^q) = (a^p,b^p)+(a^q,b^q) = pv+qv$
- $(pq)v = (a^{pq}, b^{pq}) = ((a^q)^p,(b^q)^p) = p(a^q,b^q) = p(qv)$

$\therefore (V,+,\cdot)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial

ANEXOS 8

Respuestas **E4** Caso1 Cuestionario 1

1a) $3x+5y=0 \iff 3x=-5y \iff x=\frac{-5}{3}y$ // no!

-1 y 1 $\quad 3x=1 \quad 2y=-1$

$\boxed{x=\frac{1}{3}} \quad \boxed{y=-\frac{1}{2}}$

0 y 0 $\quad 3x=0 \quad 2y=0$

$\boxed{x=0} \quad \boxed{y=0}$

-2 y 2 $\quad 3x=2 \quad 2y=-2$

$\boxed{x=\frac{2}{3}} \quad \boxed{y=-1}$

-3 y 3 $\quad 3x=3 \quad 2y=-3$

$\boxed{x=1} \quad \boxed{y=-\frac{3}{2}}$

-4 y 4 $\quad 3x=4 \quad 2y=-4$

$\boxed{x=\frac{4}{3}} \quad \boxed{\cancel{y=-\frac{4}{2}}}$ $y=-2$

$\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{2}\right)$, $(0,0)$, $\left(\frac{2}{3},-1\right)$, $\left(1,-\frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{4}{3},2\right)$ pertenecen al cjto. solución

1b) Sea $A=\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{2}\right)$, $B=(0,0)$, $\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$

$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / (x,y)=t\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right), t\in\mathbb{R}\}$

1c) No es posible que el conjunto solución sea vacío.
Si consideramos la ecuación como función, tenemos:
$f(x)=-\frac{3}{5}x$, donde $\mathrm{Dom} f = \mathrm{Rec} f = \mathbb{R}$.
no se indefine.

1d) Para el conjunto S, definido sobre
el conjunto solución, existe la suma y el producto
por escalar
Luego, S es un espacio vectorial real.
subespacio de $\mathbb{R}^2$

a) $(-4,3)$ es combinación lineal de
$(3,-1)$ y $(-1,2)$

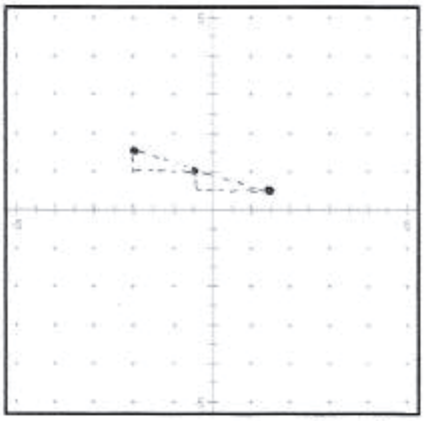


Figura1

b) S_2: $t(3,-1)$; sea $t=2$
$(6,-2) \in S_2$

S_3: $t(-1,2)$; sea $t=-\frac{1}{2}$
$(\frac{1}{2},-1) \in S_3$

c) $S_1 : t(-4,3)$; sea $t=-1$
$(4,-3) \in S_1$
$0 = 1(4,-3) + 1(-4,3)$

d) S_2, $t=3 \Rightarrow (9,-3) \in S_2$
S_3, $t=3 \Rightarrow (-3,6) \in S_3$

$S_2 \rightarrow \quad (3,-1) = -1(6,-2) + (9,-3)$

$S_3 \rightarrow \quad (-1,2) = 4(\frac{1}{2},-1) + 1\cdot(-3,6)$

Se conjetura que todo par ordenado dentro del conjunto
solución se puede escribir como combinación lineal de otros dos.
Entonces, el producto por escalar y la suma de dos elementos
nos da un tercer elemento que siempre está dentro del conjunto,

propiedad de un espacio vectorial.

$(-4,3)$ $(3,-1)$ $(-1,2)$

a) S_1 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / (x,y)= t(-4,3), t\in\mathbb{R}\}$

S_2 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / (x,y)= q(3,-1), q\in\mathbb{R}\}$

S_3 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / (x,y)= r(-1,2), r\in\mathbb{R}\}$

$x=-4t$ $\quad y=3t$

$-\frac{x}{4}=t$ $\quad y=3\cdot\frac{-x}{4}$

$4y+3x=0$

$S_1: \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / 4y+3x=0\}$

$S_2: \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / -3y-x=0\}$

$S_3: \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / -y+2x=0\}$

a) $ax+by=0$

$$y=-\frac{ax}{b}$$

luego, el conjunto solucion son los pares:

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \ y=-\frac{ax}{b}\right\}$$

o también:

$$\left\{\left(x,-\frac{a}{b}\cdot x\right) / x\in\mathbb{R}\right\} = \langle(1,-\tfrac{a}{b})\rangle = \langle(b,-a)\rangle$$

b) esta ecuación describe al conjunto (a,b) como combinacion lineal de (1,0) y (0,1).
Como a y b son parametros independientes, el conjunto $a(1,0)+b(0,1)$ es igual a $\langle(1,0),(0,1)\rangle$, es decir, el conjunto describe a todo el plano $\mathbb{R}^2$

c) ~~S=, es isomorfismo, ya que los isomorfismo~~

No es isomorfismo, puesto que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\{0\}$ es una función constante, la que claramente no es inyectiva. Luego, f no es isomorfismo

a) $t(1,-3)$

$t=1 \to (1,-3)$

$t=2 \to (2,-6)$

$t=\frac{1}{3} \to (\frac{1}{3},-1)$

$t=-\frac{1}{3} \to (-\frac{1}{3},1)$

$t=-1 \to (-1,3)$

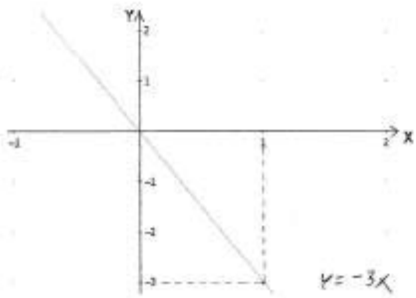


Figura 2

$y=-3x$

$3x+y=0$

b) f corresponde a la función graficada en la figura 2.

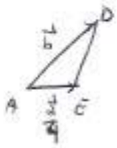
$\{t(-1,3)=(x,y) \,/\, t\in\mathbb{R}\} = \{(x,y)\in\mathbb{R} \,/\, 3x+y=0\}$

c) El recorrido de f son todos los pares ordenados descritos. Notar que f no es una función definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, más bien, asocia al escalar $t\in\mathbb{R}$ un punto en el plano (gráfico de la función)

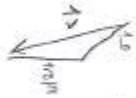
d) Al igual que en la pregunta 2a) se pueden escribir las coordenadas de todo punto en combinación de las coordenadas de otros dos puntos, pues todos estos están en el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$

}

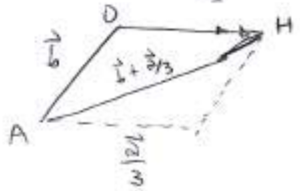
a)

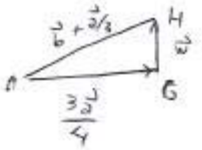


$$\boxed{\vec{u} = \vec{b} - \frac{\vec{a}}{4}} \quad (1)$$



$$\boxed{\vec{v} = -\left(\frac{\vec{a}}{2} + \vec{b}\right)} \quad (2)$$





$$\vec{w} = \vec{b} + \frac{\vec{a}}{3} - \frac{3\vec{a}}{4}$$

$$\boxed{\vec{w} = \vec{b} - \frac{5}{12}\vec{a}} \quad (3)$$

b) de (1)

$$\vec{b} = \frac{\vec{a}}{4} + \vec{u}$$

Reemplazando (3)

$$\vec{w} = \frac{\vec{a}}{4} + \vec{u} - \frac{5}{12}\vec{a}$$

$$= -\frac{\vec{a}}{6} + \vec{u} \quad (*)$$

Suma (1) y (2)

$$\vec{u} + \vec{v} = -\frac{\vec{a}}{4} - \frac{\vec{a}}{2} = -\frac{3\vec{a}}{4}$$

$$-\frac{4}{3}(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{a} \quad (\#$$

Reemplazo (#) en (*)

$$\vec{w} = -\frac{\left(-\frac{4}{3}(\vec{u}+\vec{v})\right)}{6} + \vec{u}$$

$$= \frac{4}{18}(\vec{u}+\vec{v}) + \vec{u}$$

$$= \frac{2}{9}\vec{v} + \frac{2}{9}\vec{u} + \vec{u}$$

$$\vec{w} = \frac{2}{9}\vec{v} + \frac{11}{9}\vec{u}$$

p.d. $(V, +)$ es grupo abeliano.

para que sea grupo abeliano con la suma, debe existir (1) conmutatividad, (2) asociatividad, (3) neutro, (4) inverso.

(1) $(a_1, b_1) + (a, b) = (a_1 a, b_1 b) = (a a_1, b b_1)$ /por conmutatividad en $\mathbb{R}$.

$$= (a, b) + (a_1, b_1)$$

(2) Sean $(a,b), (a_1,b_1), (a_2,b_2) \in V$

$$(a,b) + ((a_1,b_1) + (a_2,b_2))$$
$$= (a,b) + (a_1 a_2, b_1 b_2)$$
$$= (a a_1 a_2, b b_1 b_2) =$$
$$= (a a_1, b b_1) + (a_2, b_2)$$
$$= ((a,b) + (a_1,b_1)) + (a_2,b_2)$$

(3) Sean $(a,b), (1,1) \in V$

$$(a,b) + (1,1) = (a \cdot 1, b \cdot 1) = (a,b)$$

(4) Sean $(a,b), \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) \in V$

$$(a,b) + \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) = \left(a \cdot \frac{1}{a}, b \cdot \frac{1}{b}\right) = (1,1)$$

→ Verifico si cumple las propiedades de producto por escalar.

(i) Sean $q, p \in \mathbb{R}$, ~~[illegible]~~, $(a_1, b_1) \in V$

$$(pq)(a_1, b_1) = (a_1^{pq}, b_1^{pq}) = \left((a_1^{q})^{p}, (b_1^{q})^{p}\right) = p \cdot (a_1^{q}, b_1^{q})$$

$$= p \cdot (q \cdot (a_1, b_1))$$

(ii) Sean $p, q \in \mathbb{R}$, $(a, b) \in V$

$$(p+q) \cdot (a,b) = (a^{p+q}, b^{p+q}) = (a^{p} \cdot a^{q}, b^{p} \cdot b^{q})$$

$$= (a^{p}, b^{p}) + (a^{q}, b^{q})$$

$$= p \cdot (a,b) + q \cdot (a,b)$$

(iii) $1 \cdot (a,b) = (a^{1}, b^{1}) = (a,b)$

(iv) Sean $p \in \mathbb{R}$, $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in V$

$$p \cdot ((a_1, b_1) + (a_2, b_2))$$

$$= p \cdot (a_1 a_2, b_1 b_2)$$

$$= \left((a_1 a_2)^{p}, (b_1 b_2)^{p}\right)$$

$$= (a_1^{p} a_2^{p}, b_1^{p} b_2^{p})$$

$$= (a_1^{p}, b_1^{p}) + (a_2^{p}, b_2^{p})$$

$$= p \cdot (a_1, b_1) + p \cdot (a_2, b_2)$$

$\therefore$ V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

ANEXOS 9
Respuestas **E5** Caso1 Cuestionario 1

a) i) Con 7 y -7

Tenemos $\left(3X=7 \wedge 5Y=-7 \Rightarrow X=\frac{7}{3} \wedge Y=\frac{-7}{5}\right) \vee$

$\left(3X=-7 \wedge 5Y=7 \Rightarrow X=\frac{-7}{3} \wedge Y=\frac{7}{5}\right)$

ii) Con 11 y -11

Tenemos $\left(3X=11 \wedge 5Y=-11 \Rightarrow X=\frac{11}{3} \wedge Y=-\frac{11}{5}\right) \vee \left(X=\frac{-11}{3} \wedge Y=\frac{11}{5}\right)$

iii) con -13 y 13

$\left(X=\frac{-13}{3} \wedge Y=\frac{13}{3}\right)$

$\therefore \left\{\left(\frac{7}{3}, \frac{-7}{5}\right), \left(\frac{-7}{3}, \frac{7}{5}\right), \left(\frac{-11}{3}, \frac{11}{5}\right), \left(\frac{11}{3}, \frac{-11}{5}\right), \left(\frac{-13}{3}, \frac{13}{3}\right)\right\}$ son cinco elementos del cjto solución de la ELH.

b) $S=\{(X,Y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid 3X+5Y=0\}$

c) No, puesto que en $\mathbb{R}$ ~~para~~ todo número tiene inverso aditivo; luego, basta tomar x e y apropiados para obtener un par ordenado del cjto solución.

d) Suma y Multiplicación $(\mathbb{R})$.

a) Grafiqué el vector a y el vector b, posteriormente, como a esta con un escalar -1, dibuje o copie el vector a en el sentido contrario, ahora, teniendo $-\vec{a}$ y $\vec{b}$, sume ambos vectores, obteniendo el vector $-\vec{a}+\vec{b}$ el que es igual a $\vec{c}(-4,3)$.

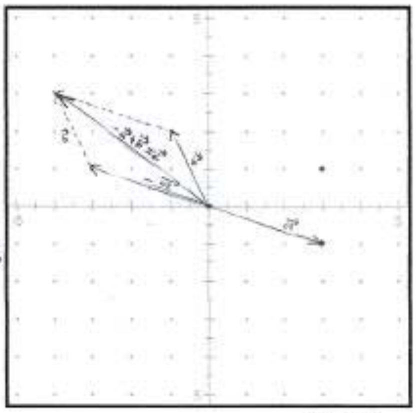


Figura1

b) $(-4,3) = \alpha(-6,2) + \beta(-2,4)$

$(-4,3) = (-6\alpha - 2\beta,\ 2\alpha + 4\beta)$

$$\begin{cases} -6\alpha - 2\beta = -4 \\ 2\alpha + 4\beta = 3 \end{cases} \Big/ \cdot 2 \quad \begin{cases} -12\alpha - 4\beta = -8 \\ 2\alpha + 4\beta = 3 \end{cases} \Big/ \Rightarrow -10\alpha = -5$$

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 1 + 4\beta = 3$$
$$4\beta = 2$$
$$\beta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ (-4,3) = \frac{1}{2}(-6,2) + \frac{1}{2}(-2,4)$$

Comentario:
$(-6,2) \in S_2 \wedge (-2,4) \in S_3$, puesto que tanto S_1, S_2, S_3 están representados por vectores, entonces con los escalares apropiados siempre se lograrían armar la suma de vectores de la fig. 1
O sea, realizé una nueva combinación lineal a $(-4,3)$, pero esta vez con los vectores $-\vec{a}$ y $\vec{b}$ amplificados por 2.

c) $(0,0) = \alpha(-8,6) + \beta(-4,3)$
con $\alpha = 1$ y $\beta = -2$

d) S_2:

$(0,0) = \alpha(-6,2) + \beta(-3,1)$

con $\alpha = 1$, $\beta = -2$

S_3:

$(0,0) = \alpha(-4,8) + \beta(1,-2)$

$\alpha = 1$, $\beta = 4$

Se Puede establecer que todo par ordenado en $\mathbb{R}^2$ sumado a otro par ordenado, también en $\mathbb{R}^2$, tiene al menos una combinación lineal a del vector nulo $(0,0)$. Puesto que:

$(0,0) = \alpha(a,b) + \beta(c,d)$

$(0,0) = (\alpha a + \beta c, \alpha b + \beta d)$

$\alpha a + \beta c = 0$

$\alpha b + \beta d = 0$

Siempre y cuando ambos vectores o pares ordenados NO sean paralelos, en ese caso el sistema no tendría solución.

e) S_1 $(-4,3)$, $x = -4 \wedge y = 3$

$-\frac{3}{4}x = y \Rightarrow \frac{3}{4}x + y = 0$

S_2 $(-3,1)$

$-\frac{1}{3}x = y \Rightarrow +\frac{1}{3}x + y = 0$

S_3 $(-1,2)$

$-2x = y \Rightarrow 2x + y = 0$

Se puede establecer que en las ELHs de S_1, S_2, S_3 una de las 2 incógnitas está siempre con el escalar 1. Pero creo, que no tiene mayor relevancia.

NO se me ocurre otra cosa.

a) Sea $a, b \neq 0$

$ax+by=0 \Leftrightarrow ax=-by \Leftrightarrow x=\frac{-by}{a}$

$S=\{(\frac{-by}{a}, y)\in\mathbb{R}^2 / ax+by=0\}$

Como tiene dos variables siempre una va a depender de la otra, en este caso x depende de y.

b) 1) Describe una ecuación con pasos
2) Describe las propiedades de los vectores
3) Describe que geométricamente el vector (a,b) se puede obtener de la suma de $(a,0)+(0,b)$.
4) Describe que el vector (a,b) siempre se puede escribir en combinación lineal con la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

c) Tengo dudas con la definición de isomorfismo.

a) $\{(-3,1),(6,-2),(3,-1),(-6,2),(5,\frac{-5}{3})\}$

b) La función presentada permite encontrar todos los vectores de la recta de la fig 2, mostrando en este caso que y depende de x, ya que la ecuación de la recta es $-\frac{1}{3}x=y$.

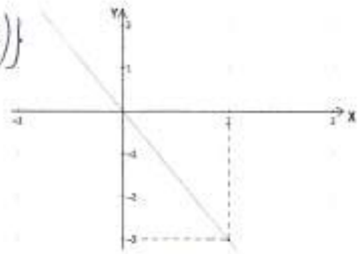
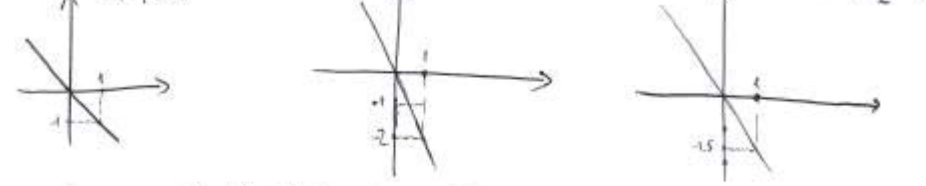


Figura 2

c) $\text{recf}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / -\frac{1}{3}x=y\}$

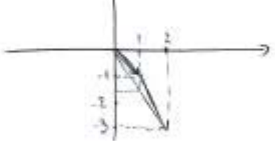
d)



Tomando en i) ii) y iii) los vectores con $x=1$, es decir; $(1,-1),(1,-2),(1,-1.5)$ respectivamente tenemos que:

$(1,-1)+(1,-2)=(2,-3)$

pero $(2,-3)=2(1,-1.5)$, luego representan las mismas rectas.



a) $\vec{u} = (-1)\vec{b} + \left(\frac{1}{4}\right)\vec{a}$

$\vec{v} = (-1)\vec{b} + \left(-\frac{1}{2}\right)\vec{a}$

$\frac{2}{3}\vec{v} = \left(-\frac{2}{3}\right)\vec{b} + \left(-\frac{1}{3}\right)\vec{a}$

$\frac{4}{3}\vec{v} = \left(-\frac{4}{3}\right)\vec{b} + \left(-\frac{2}{3}\right)\vec{a}$

$\vec{w} = \left(-\frac{3}{4}\right)\vec{a} + \vec{b} + \left(\frac{1}{3}\right)\vec{a}$

$\boxed{\vec{w} = \left(\frac{-5}{12}\right)\vec{a} + \vec{b}}$

a) $\vec{w} = \left(\frac{1}{4}\right)\vec{a} + \vec{b} + \left(-\frac{2}{3}\right)\vec{a}$

b) $\vec{w} = \left(\frac{-3}{4}\right)\vec{a} + \vec{b} + \left(\frac{1}{3}\right)\vec{a}$

$\frac{4}{3}\vec{u} = \left(-\frac{4}{3}\right)\vec{b} + \left(\frac{1}{3}\vec{a}\right)$

$-\frac{4}{3}\vec{u} = +\frac{4}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}$

$= -3\left(\frac{1}{4}\right)\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a}$

$\frac{3+4}{12}$

$= -2\left(\frac{1}{4}\right)\vec{a} + \left(-\frac{1}{4}\right)\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a}$

$= \left(-\frac{1}{2}\right)\vec{a} - \vec{u} + \left(\frac{1}{3}\right)\vec{a} - \vec{b} + \vec{b}$

$= \left(-\frac{1}{2}\right)\vec{a} - \vec{b} - \vec{u} + \left(\frac{1}{3}\right)\vec{a} + \vec{b}$

$= \vec{v} - \vec{u} + \frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b}$

$\vec{w} = \frac{1}{4}\vec{a} + \vec{b} - \vec{b} + \vec{b} + \left(-\frac{2}{3}\right)\vec{a}$

$= \vec{u} + \left(-\frac{1}{3}\right)\vec{a} + \left(-\frac{1}{3}\right) + \vec{b} + \vec{b}$

$= \vec{u} + \left(-\frac{2}{3}\right)\vec{a} + 2\vec{b} + \left(\frac{4}{3}\right)\vec{b} - \left(\frac{4}{3}\right)\vec{b}$

$= \vec{u} + \frac{4}{3}\vec{v} + 3\vec{b} + \left(\frac{1}{3}\right)\vec{b}$

Unego

$2\vec{w} = \left(-\frac{3}{4}\right)\vec{a} + \left(-\frac{1}{6}\right)\vec{a} + 2\vec{b}$

$2\vec{w} = \left(-\frac{1}{2}\right)\vec{a} + \vec{b} + \left(-\frac{1}{3}\right)\vec{a} + 3\vec{b}$

$2\vec{w} = \vec{v} + \left(-\frac{4}{3}\right)\vec{u} + \frac{5}{3}\vec{b}$

$W = \left(-\frac{5}{12}\right)\vec{a} + \vec{b} = \left(-\frac{3}{12}\right)\vec{a} + \vec{b} + \left(-\frac{2}{12}\right)\vec{a} = \left(-\frac{1}{4}\vec{a}\right) + \left(-\frac{1}{6}\right)\vec{a} + \vec{b}$

$2\vec{w} = \vec{v} + \left(-\frac{1}{3}\right)\vec{u} + \left(\frac{-10\vec{u} + 5\vec{v}}{6}\right.$

$\vec{w} = \dfrac{\vec{v} + \left(\frac{4}{3}\right)\vec{u} + \left(\frac{-10\vec{u} + 5\vec{v}}{6}\right.}{2}$

¿$(V,+)$ es grupo?

Asociatividad:

$$\big((a,b)+(a_1,b_1)\big)+(a_2,b_2) = (a,b)+\big((a_1,b_1)+(a_2,b_2)\big)$$

$= (aa_1, bb_1) + (a_2, b_2)$

$= ((aa_1)a_2, (bb_1)b_2)$

$= (a(a_1a_2), b(b_1b_2))$

$= (a,b) + (a_1a_2, b_1b_2)$

$= (a,b) + ((a_1,b_1),(a_2,b_2))$ #

Neutro: Sea $(a_1,b_1)=(1,1)$

$(a,b)+(a_1,b_1) = (a,b)$

$= (aa_1, bb_1)$

$= (a\cdot 1, b\cdot 1)$

$= (a,b)$ #

Inverso: Sea $(a_1,b_1) = (\frac{1}{a}, \frac{1}{b})$

$(a,b)+(a_1,b_1) = (1,1)$

$= (aa_1, bb_1)$

$= (1,1)$ #

es grupo

i) $pq(a,b) = p(q\cdot(a,b))$

$= (a^{pq}, b^{pq})$

$= ((a^q)^p, (b^q)^p)$

$p(a^q, b^q)$

$= p(q(a,b))$ //

ii) $(p+q)\cdot(a,b) = p(a,b)+q(a,b)$

$= (a^{p+q}, b^{p+q})$

$= (a^p\cdot a^q, b^p\cdot b^q)$

$= (a^p, b^p) + (a^q, b^q)$

$= p(a,b) + q(a,b)$ #

iii) $1 \cdot v = v$

$1(a,b) = (a,b)$

$= (a^1, b^1)$

$= (a,b)$ #

iv) $p(v+w) = p(v) + p(w)$

$= p((a,b)+(a_1,b_1)) = \cancel{p(a,b)}$

$= p(aa_1, b \cdot b_1)$

$= ((aa_1)^p, (bb_1)^p)$

$= (a^p a_1^p, b^p b_1^p)$

$= (a^p, b^p) + (a_1^p, b_1^p)$

$= p(a,b) + p(a_1,b_1)$

$= p(v) + p(w)$ #

$\therefore$ V es Espaco Vectorial

ANEXOS 10
Respuestas **E9** Caso2 Cuestionario 1

a) Reemplazamos $(5,-5) \Rightarrow 3x=5 \wedge 5y=-5 \Rightarrow x=\frac{5}{3} \wedge y=-1$. $\therefore \left(\frac{5}{3},-1\right) \in S'$ es una

Pares de inversos

- $(7,-7) \Rightarrow 3x=7 \wedge 5y=-7 \Rightarrow x=\frac{7}{3} \wedge y=\frac{-7}{5} \Rightarrow \left(\frac{7}{3},-\frac{7}{5}\right) \in S'$
- $(3,-3) \Rightarrow 3x=3 \wedge 5y=-3 \Rightarrow x=1 \wedge y=\frac{-3}{5} \Rightarrow \left(1,-\frac{3}{5}\right) \in S'$
- $(-3,3) \Rightarrow 3x=-3 \wedge 5y=3 \Rightarrow x=-1 \wedge y=\frac{3}{5} \Rightarrow \left(-1,\frac{3}{5}\right) \in S'$
- $(2,-2) \Rightarrow 3x=2 \wedge 5y=-2 \Rightarrow x=\frac{2}{3} \wedge y=\frac{-2}{5} \Rightarrow \left(\frac{2}{3},\frac{-2}{5}\right) \in S'$

b] $S=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / x\in \mathbb{R},\ y=\frac{-3x}{5}\}$; $\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 / \forall a\in \mathbb{R};\ 3x=a \wedge 5y=a\cdot(-1)\}$

c] Sea $a, b \in \mathbb{R}$, entonces debe ser la ec. homogenea $ax+by=0$. Sin importar a o b ; $x=0$ $y=0$ cumple esta ecuacion (si no fuera homogenea es otra historia. Como $(0,0)\in S'$ $\forall a,b \Rightarrow S \neq \emptyset$.

D] Para plantear las soluciones de las ecuaciones se utilizan los inversos que nos proveen los grupos. asi una operacion + podria definirse.

~~(+): $G\times G \to G$~~ $\left(-1,\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{2}{3},\frac{-2}{5}\right)=\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{5}\right)$ solucion $3\left(-\frac{1}{3}\right)+5\cdot\left(\frac{1}{5}\right)=\boxed{0}$.

~~$(a+b)=$~~

Pero $\left(\frac{7}{3},-\frac{7}{5}\right)+\left(1,-\frac{3}{5}\right)=\left(\frac{10}{3},\frac{-10}{5}\right)=\left(\frac{10}{3}\cdot 3+5\cdot\frac{-10}{5}=\boxed{0}\right)$

La operacion binaria $(+): S\times S \to S$ definida como

$(a,b)+(c,d)=(a+c,\ b+d)\in S'$ es cerrada en el grupo es decir el resultado es solucion de la ecuacion.

a) lo veo como un simple paralelogramo.

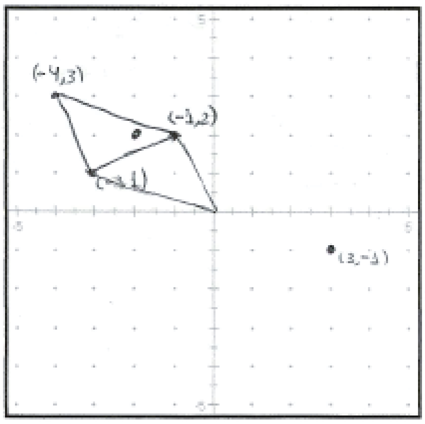


Figura1

b] de S_2 por el ejercicio anterior

$(x,y) = (-3,1) \Rightarrow (x=-3y\ ,\ y)$

$o\ (x\ ,\ y=-\frac{x}{3})$

para S_3

$(x,y) = (-1,2) \Rightarrow (x\ ,\ y=-2x)$.

sirven para la ecuacion en terminos de x

$(-4,3) = -1(x,-\frac{x}{3}) + 1\cdot(x,-2x)$

despeje el elemento identidad de la tupla y exprese el otro en relacion a este. que es parecido al procedimiento hecho en 1]

c] Dos soluciones de S1 $(x,y)=(-4,3) \Rightarrow (-\frac{4}{3},1) = (-\frac{4}{3}y, y)$.

para $y=2 \Rightarrow (-\frac{8}{3},2)$ x y= sean 2 variables diferente y, y'

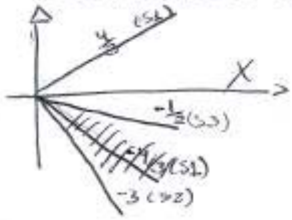
$(0,0) = -1(\frac{4}{3}y, y) + 1(\frac{4}{3}y', y') \Rightarrow (\frac{4}{3}(-y+y'), -y+y')$. si $y=+y'$ la ecuacion se cumple ¿ 6 rayo ?. bueno obviamente, las constantes de la ecuacion son 1, -1. Solo el mismo par de punto en S1 cumplen para (0,0). ie $\{(\frac{4}{3},1),(\frac{4}{3},1)\}$ es sol.

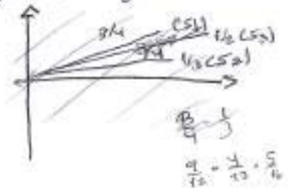
d] Solucion de S2 = $(x,y)=(-3,1)=(-3y,y)$; $S_3=(x,y)=(-1,2)=(-\frac{y}{2},$ $(-1,2)=(-\frac{y}{2},y)$. para las variable x, y tal que

$x=y$

$(0,0) = -1(-3y,y) + 1\cdot(-\frac{x}{2},x) = (3y-\frac{x}{2}, x-y) =$ $3y=\frac{x}{2}$

$\left.\begin{array}{l} x = y \\ 6y = \cancel{x} \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} y = x \\ 6y = x \end{array}\right\}$  $\}$ solo $(0,0)$ $x=0,\ y=0$ cumple esta ecuacion. ie por homogeneidad.





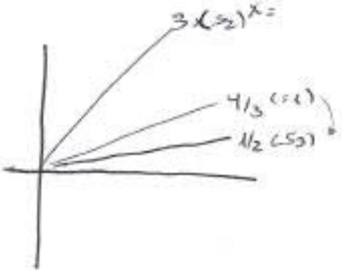
e) $S_1 \quad -4x + 3y = 0$

$S_2 \quad -3x + y = 0$

$S_3 \quad -x + 2y = 0.$

Es claro que $S'_1 - S'_3 = S'_2$ pues $\underset{S_1}{(-4x+3y)} - \underset{S_2}{(-x+2y)} = \underline{(-3x+y)}_{S_2}$

Entonces (Conjetura). Solucion = ¿ cual es la relacion de sus soluciones para $(0,0)$?



$0. = S_1 + S_3$ son soluciones de la ecuacion $(0,0)$.

$(-4x + 3y) + (-x + 2y) = -5x + 5y = 0$

solo si $(x = y)$ esto es verdad

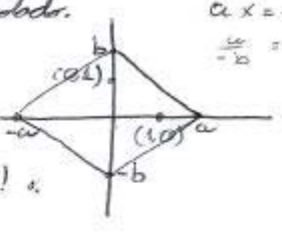
a) Como en la pregunta 1 $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x = -\frac{by}{a}\}.\ ^{a \neq 0.}$ o

$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \forall c \in \mathbb{R} = a \cdot x = c \wedge by = -c\}.$

b): $(a,b) = a(1,0) + b(0,1) = \forall (a,b)$ sospechosamente parece base de un espacio vectorial: ademas de este cuadrado rotado.

$ax = -by$

$\frac{a}{-b} = \frac{y}{x}$



c) si en efecto $\dim(\{0\}) = 1$ por lo Tanto.

$\dim(\mathbb{R} \times \{0\}) = \dim(\mathbb{R}) \cdot \underbrace{\dim(\{0\})}_{1} = \dim(\mathbb{R})$.

a) $(0,0)$; $(1,-3)$; $(-1,\frac{1}{3})$; $(-2,\frac{2}{3})$; $(3,-1)$

$x = -3y \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x =$ $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{9})$.

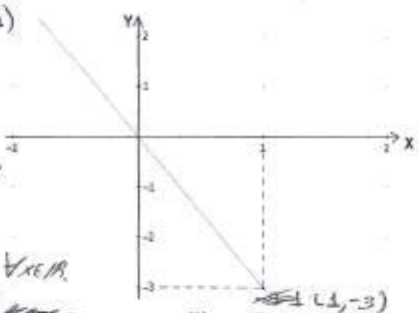


Figura 2

b) La ecuacion de la figura 2 es $y = -\frac{1}{3}x$ que se puede escribir como un par de puntos $(-\frac{1}{3}x, \frac{1}{3}x) = x \cdot (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $\forall x \in \mathbb{R}$ de aqui es claro que podemos reemplazar por la ecuacion $\frac{1}{3}x(1-3)$. y como $\frac{1}{3}x \in \mathbb{R} \Rightarrow x(1-3)$: es $\mathbb{R} \times \{(3,-1)\} \to \mathbb{R}$. con respecto a la grafica es entonces la misma grafica.

c) $y = -\frac{1}{3}x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, funcion decreciente $\Rightarrow$ Rec $\mathbb{R}^2$.

olvida es sobre la funcion f. su recorrido es el generado por $< \{1,-3\} >$.

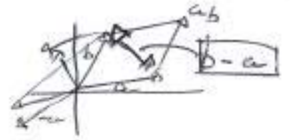
d) $x + y = \Rightarrow y = -x$ $\{(x,-x)\}$ $\forall x \in \mathbb{R}$; $2x + y \Rightarrow y = -2x$ $\{(x,-2x)\}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$< \{(x,-x)\} >$ $< \{(x,-2x)\} >$.

Entonces toda solucion de la ELH $3x + 2y = 0$ se puede escribir como suma soluciones de $x + y = 0$ y $2x + y = 0$ que estan generados por los vectores anteriores.

a) Siendo $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{DE}=\vec{u}$, $\overrightarrow{CF}=\vec{v}$ y $\overrightarrow{GH}=\vec{w}$. Escriba cada uno de los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ en función de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

b) Escriba $\vec{w}$ en términos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

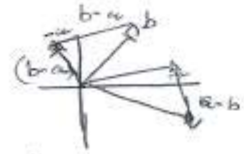


a) $\boxed{u = -\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{a}}$

Paralelogramo
$3x = a$
$d' = +\vec{b}$

$v = -d - \frac{3}{4}\vec{a}$

$\boxed{v = -\vec{b} - \frac{2}{4}\vec{a}}$



$\vec{w} \; \vec{u} + \frac{2}{4}\vec{a} + \vec{w} = \frac{1}{3}\vec{a}$

$\frac{4}{12} - \frac{6}{12} = \frac{-2}{12} = -\frac{1}{6}$

$\vec{w} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{4}\vec{a} - \vec{u} = -\frac{1}{6}\vec{a} + \underbrace{b - \frac{1}{4}\vec{a}}_{-\vec{u}}$

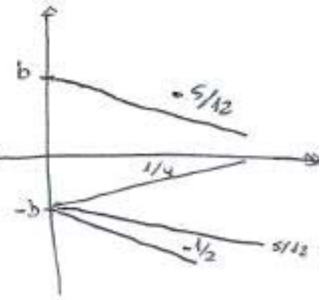
$\frac{-2}{12} - \frac{3}{12} = \frac{-5}{12}$

$\boxed{\vec{w} = \frac{-5}{12}\vec{a} + b}$

$12\vec{w} = -5\vec{a} + 12b.$

otra forma $-\frac{3}{4}a + b + \frac{1}{3}a = \frac{-9+4}{12} + b = \frac{-5}{12} + b$

b] $\frac{1}{3}\vec{v} = -\frac{b}{3} - \frac{2}{12}\vec{a}$; $\frac{1}{3}\vec{u} = -\frac{b}{3} + \frac{1}{12}\vec{a}$



nunca se tocan los 3 solamente, no es combinación solamente a $\vec{u}, \vec{v}$.

Se verán los 8 propiedades de e.v. sea $(a,b)+(a_1,b_1)\in V$

- $(a,b)+(a_1,b_1)=(a\cdot a_1, b\cdot b_1)$ $\quad a_1\cdot a\in\mathbb{R} \wedge b\cdot b_1\in\mathbb{R}$ propiedad de cuerpo

- $(a,b)+(a_1,b_1)=(a\cdot a_1, b\cdot b_1)=(a_1\cdot a, b_1\cdot b)=(a_1,b_1)+(a,b)$ conmutat.

- ~~Asociatividad~~

$(a,b)+((a_1,b_1)+(a_2,b_2))=(a,b)+(a_1 a_2, b_1\cdot b_2)=(a\cdot a_1\cdot a_2, b\cdot b_1\cdot b_2)$

$=(a\cdot a_1, b\cdot b_1)\cdot(a_2,b_2)=((a,b)+(a_1,b_1))\cdot(a_2,b_2).$

- Elemento neutro: $(1,1)=\vec{0}$ así

$(a,b)+(1,1)=(a\cdot 1, b\cdot 1)=(a,b).$ | inverso otros como grupo.

- Identidad del cuerpo.

$\cdot 1\cdot(a,b)=(a^1,b^1)=(a,b).$

- ~~Asociatividad~~ distributividad vectores sobre cuerpo.

$p((a,b)+(a_1,b_1))=p((a\cdot a_1, b\cdot b_1))=((a\cdot a_1)^p,(b\cdot b_1)^p).$

$=(a^p\cdot a_1^p, b^p\cdot b_1^p)=(a^p,b^p)+(a_1^p,b_1^p)=p\cdot(a,b)+p(a_1,b_1)$

- ~~Asociatividad~~ distributividad cuerpo sobre vector

$(p+p_1)\cdot(a,b)=(a^{p+p_1}, b^{p+p_1})=(a^p\cdot a^{p_1}, b^p\cdot b^{p_1})$

$=(a^p,b^p)+(a^{p_1},b^{p_1})=p(a,b)+p_1(a,b).$

asociativa: $(p \cdot q) \cdot (a, b) = (a^{pq}, b^{pq}) = ((a^{q})^{p}, (b^{q})^{p}) = p \cdot (a^{q}, b^{q}) =$

$p \cdot (q \cdot (a, b))$ $\square$

Debe probarlo como grupos:

(+) es cerrado pues $(a, b), (a_1, b_1) \in V$

$$(a, b) + (a_1, b_1) = (a \cdot a_1, b \cdot b_1) \quad a \cdot a_1 \in \mathbb{R} \wedge b \cdot b_1 \in \mathbb{R}$$

$$\therefore (a \cdot a_1, b \cdot b_1) \in V.$$

- Elemento neutro el $(1, 1)$ así

$$(a, b) + (1, 1) = (a \cdot 1, b \cdot 1) = (a, b)$$

- Un elemento inverso $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $(a, b) \cdot \exists (a^{-1}, b^{-1})$ tal que

$$(a, b) + (a^{-1}, b^{-1}) = (a \cdot a^{-1}, b \cdot b^{-1}) = (1, 1).$$

identidad y existe pues $\mathbb{R}$ es un cuerpo lo que garantiza además que el inverso es único

$\therefore$ Es espacio vectorial

ANEXOS 11
Respuestas **E3** Caso1 Cuestionario 2

1) Sabiendo que $S = \{(t, k, 3t + 2k) \in \boldsymbol{R}^3 / k, t \in \boldsymbol{R}\}$ es el conjunto solución de una Ecuación Lineal Homogénea (ELH) de tres incógnitas, responda a lo siguiente:

a) Determine la ELH y dos elementos que pertenezcan a su conjunto solución.
b) ¿Qué describe, geométricamente, el conjunto S? Comente.
c) Sabiendo que S, con las operaciones usuales para $\boldsymbol{R}^3$, es un espacio vectorial. Muestre. explícitamente un sub-espacio vectorial de S.

a) $(t, k, 3t+2k)$, $k, t \in \mathbb{R}$

$(x, y, z) = (x, y, 3x+2y)$

$z = 3x + 2y$

ELH: $3x + 2y - z = 0$ $(1,1,5)$; $(2,2,10) \in S$

b) $t(1,0,3) + k(0,1,2)$

Describe el plano sostenido por el origen y los puntos $(1,0,3)$ y $(0,1,2)$ que están en $\mathbb{R}^3$

c) Un subespacio de S sería por ejemplo un $U = \{(t, 0, 3t) \in \mathbb{R}^3 / t \in \mathbb{R}\}$

2) Considere el conjunto $M = \{v \in R^3 / v = (0,1,1) + \lambda(1,0,2) + \beta(2,3,0); \lambda, \beta \in \boldsymbol{R}\}$.
a) ¿Qué describe, geométricamente, el conjunto M? Comente.
b) El conjunto S, con las operaciones usuales de $\boldsymbol{R}^3$, ¿es un espacio vectorial? Explique.

a: El conjunto M describe el plano sostenido por los puntos $(0,1,1)$, $(1,0,2)$ y $(2,3,0)$

b: $M = \{(\lambda + 2\beta, 1 + 3\beta, 1 + 2\lambda) \in \mathbb{R}^3 / \lambda, \beta \in \mathbb{R}\}$

Como $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$ se tienen que $\langle v \rangle = \mathbb{R}^3$ ya que v es una combinación lineal de los vectores li $(0,1,1)$, $(1,0,2)$, $(2,3,0)$. Por lo que esos vectores forman una base para $\mathbb{R}^3$.

Con lo anterior se concluye que S es un espacio vectorial

3) Considere los puntos P (1,-1,-1), Q(-2,1,3) y R(-1, 1, -1). ¿Existirá un sub-espacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ que contenga a los tres puntos dados? Explique.

$$\alpha(1,-1,-1) + \beta(-2,1,3) + \gamma(-1,1,-1) = (0,0,0)$$

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}\right| = 1\cdot(-1-3) + 2(1+1) - 1(-3+1)$$
$$= -4+4+2 = 2$$

Como determinante es 2 el sist homogeneo tiene unica soluci por lo que debe ser la nula

$\therefore \alpha=\beta=\gamma=0$

$\therefore$ P, Q, R forman una base para $\mathbb{R}^3$

De lo anterior se deduce que no hay un subespacio vectorial propio de $\mathbb{R}^3$ que contenga a los 3 puntos, ya que si los contiene generaría a todo $\mathbb{R}^3$.

Si $\mathbb{R}^3$ se toma como subespacio de $\mathbb{R}^3$, ~~este~~ si contendría a lo vectores.

4) Dada la ELH $ax + by + cz = 0$ con $a, b, c \in \boldsymbol{R}$. Analice el conjunto solución en función de los parámetros que la definen. Explique geométricamente cada caso.

a) Conjunto solución cuando $a = b = c = 0$	Explicación geométrica
$S = \{(t, v, w) \in \mathbb{R}^3 / t, v, w \in \mathbb{R}\}$	 todo $\mathbb{R}^3$

b) Conjunto solución cuando $a = b = 0$	Explicación geométrica
$cz = 0$ $S = \{(t, v, 0) \in \mathbb{R}^3 / t, v \in \mathbb{R}\}$ $S = \{t(1,0,0) + v(0,1,0) / t, v \in \mathbb{R}\}$	 todo $\mathbb{R}^2$

c) Conjunto solución cuando $a = 0$	Explicación geométrica
$by + cz = 0$ $z = -\frac{b}{c} y$ $S = \{(t, v, -\frac{b}{c} v) / t, v \in \mathbb{R}\}$ $S = \{t(1,0,0) + v(0,1,-\frac{b}{c}) / t, v \in \mathbb{R}\}$ $= \{t(1,0,0) + v(0,1,0) - \frac{b}{c}(0,0,1) / t, v, \frac{b}{c} \in \mathbb{R}\}$	 todo $\mathbb{R}^3$

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow W$$
$$(a,b) \rightsquigarrow (a,b,0)$$

a.- ~~$(W,+)$ es abeliano, ya que como la tercera coordenada de los vectores que están en W es 0 (neutro)~~

sea $v, u \in W$, $\alpha \in \mathbb{R}$. $v = (a,b,0)$, $u = (c,d,0)$

$\alpha v + u = (\alpha a + c, \alpha b + d, 0) \in W$

el $\vec{0}$ es claro que está en W

$\therefore W < \mathbb{R}^3$

b) Para ser isomorfismo se necesita que f sea un homomorfismo (T.L) y una biyección, lo cual es claro

$\therefore$ f muestra un isomorfismo entre $\mathbb{R}^2$ y W

c) • $\mathbb{R}^2 \simeq M_{2\times 1}(\mathbb{R})$ ya que $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow M_{2\times 1}(\mathbb{R})$, $(x,y) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ claramente es un isomorfismo

• $\mathbb{R}^2 \simeq U$, donde $U = \{(a,b,0,0) \in \mathbb{R}^4 / a,b \in \mathbb{R}\}$

• $\mathbb{R}^2 \simeq V$, donde $V = \{(a,b,0,0,0) \in \mathbb{R}^5 / a,b \in \mathbb{R}\}$

ANEXOS 12

Respuestas **E4** Caso1 Cuestionario 2

a) $x = t$, $y = k$, $z = 3t + 2k$

como se tiene dos parámetros independientes entre sí, esto corresponde a un plano

-Reemplazo los valores de x e y en la tercera ecuación

$S = \{ z = 3 \cdot x + 2y \ / x, y \in \mathbb{R} \}$

sea $x = 1$, $y = 0$

$z = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 3$

luego $(3, 0, 3) \in S$

sea $x = 0$, $y = 0$

$\Rightarrow z = 0$

luego $(0,0,0) \in S$

b) Esta ecuación describe los puntos de un plano, ya que los valores que tenemos pertenecen al espacio $\mathbb{R}^3$, y el conjunto que tenemos tiene dimensión $2 = 3 - 1$.

c) Sea $z = 0$, luego $0 = 3x + 2y \Rightarrow -2y = 3x$

entonces tenemos $S_1 = \{(x, -\frac{2}{3}x, 0) \ / x \in \mathbb{R}\} \subset S$

Verifiquemos si S_1 es un subespacio de S

sea $\alpha \in \mathbb{R}$; $\vec{u}_1, \vec{v}_1 \in S$, $\vec{u}_1 = (u, -\frac{2}{3}u, 0)$, $\vec{v}_1 = (v, -\frac{2}{3}v, 0)$

$\alpha(u, -\frac{2}{3}u, 0) + (v, -\frac{2}{3}v, 0)$

$= (\alpha u + v, -\alpha\frac{2}{3}u - \frac{2}{3}v, 0) = (\alpha u + v, -\frac{2}{3}(\alpha u + v), 0) \in S_1$

$\therefore \cancel{S_1 \leq} S$

además, el punto $(0,0,0) \in S_1$

luego $S_1 \leq S$

a) Al igual que en la pregunta anterior, se describe un conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$, y la dimensión de este conjunto es 2. Esto indica que el conjunto es un hiperplano de $\mathbb{R}^3$, que denominamos sencillamente "plano"

b) Notemos que este plano no pasa por el origen.

$$(0,0,0) = (0,1,1) + \lambda(1,0,2) + \beta(2,3,0)$$

$$(0,-1,-1) = \lambda(1,0,2) + \beta(2,3,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda + 2\beta = 0 \\ 3\beta = -1 \\ 2\lambda = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda + 2\beta = 0 \\ \beta = -1/3 \\ \lambda = -1/2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} i) \\ ii) \\ iii) \end{array}$$

Reemplazando en i), tenemos:

$$-\frac{1}{2} + 2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{2}{3} = 0$$

$$\frac{-3-4}{6} = 0$$

$$-\frac{7}{6} = 0$$

Como el punto $(0,0,0)$ no está en el conjunto, no existe neutro para la operación suma.

Luego, S no es un $\mathbb{R}$-ev.

$\vec{PQ} = (-3, 2, 4)$ $\qquad$ $\vec{PR} = (-2, 2, 0)$

luego, el plano puede ser descrito por la ecuación

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, (x,y,z) = (1,-1,-1) + t(-3,2,4) + r(-2,2,0) \,/\, t, r \in \mathbb{R}\}$$

Veamos si el punto $(0,0,0)$ está en el conjunto.

$$(0,0,0) = (1,-1,-1) + t(-3,2,4) + r(-2,2,0)$$

$$(-1,1,1) = t(-3,2,4) + r(-2,2,0)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{i)} & -1 = -3t - 2r \\ \text{ii)} & 1 = 2t + 2r \\ & 1 = 4t \end{array}\right\} \Rightarrow \quad t = 1/4$$

Remplazando en i) y ii), tenemos:

$$-1 = -3\left(\frac{1}{4}\right) - 2r \qquad\qquad 1 = 2\left(\frac{1}{4}\right) + 2r$$

$$-1 = \frac{-3}{4} - 2r \qquad\qquad 1 = \frac{1}{2} + 2r$$

$$-1 + \frac{3}{4} = -2r \qquad\qquad 1 - \frac{1}{2} = 2r$$

$$\frac{-1}{4} = -2r \qquad\qquad \frac{1}{2} = 2r$$

$$\frac{1}{8} = r \qquad\qquad \frac{1}{4} = r$$

$\rightarrow\leftarrow$

luego, $(0,0,0) \notin S$

Recordando que por tres puntos pasa un único plano,

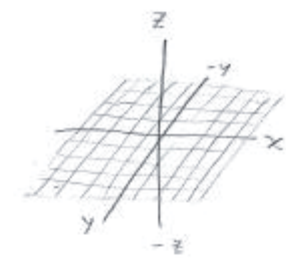
a) Conjunto solución cuando $a = b = c = 0$	Explicación geométrica

Si $a=b=c=0$, se tiene
$0=0$, ecuación que se satisface con cualquier punto. Luego, la solución es todo el espacio $\mathbb{R}^3$.

b) Conjunto solución cuando $a = b = 0$	Explicación geométrica

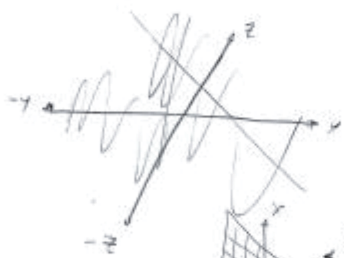
$\{(x,y,z)=(x,y,0) \,/\, x,y \in \mathbb{R}\}$

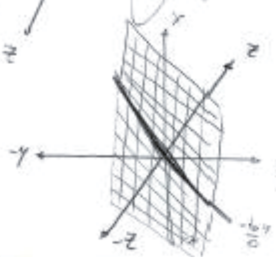
Si $a=b=0$,
se tiene la ecuación
$$cz=0$$
Si $c=0$, se tiene el mismo caso de antes.
Si $c\neq 0$, z debe ser cero para satisfacer la ecuación.
Entonces, $z=0$, $x,y\in\mathbb{R}$
(para x e y cualquier valor satisface la ecuación)



c) Conjunto solución cuando $a = 0$	Explicación geométrica

Si $a=0$, se tiene
$$by+cz=0$$
Si $c\neq 0$ y $b\neq 0$, tenemos
$$cz=-by$$
$$z=\frac{-by}{c}$$
entonces se tiene un plano construido sobre la recta $z=\frac{-by}{c}$ donde x puede tomar cualquier valor
$$\left\{(x,y,z)=\left(x,y,\frac{-by}{c}\right) \,/\, x,y\in\mathbb{R}\right\}$$





a) Si es un subespacio de $\mathbb{R}^3$
notemos que $(0,0,0) \in W$, si $a=b=0$.
luego, sean $\alpha \in \mathbb{R}$, $(a_1, b_1, 0)$, $(a_2, b_2, 0) \in W$.

$$\alpha(a_1, b_1, 0) + (a_2, b_2, 0)$$
$$= (\alpha a_1 + a_2,\ \alpha b_1 + b_2, 0) \in W.$$

Luego $W \leq \mathbb{R}^3$.

b) para que f sea isomorfismo, $\dim(\ker(f))$ debe ser 0

$\ker(f) = \{(0,0)\}$, ya que $f(0,0) = (0,0,0)$.
luego, $\dim(\ker(f)) = 0$.
~~no obstante~~, luego, $\dim(\operatorname{Im}(f)) = 2 = \dim(W)$

entonces f es un isomorfismo.

c) otro subespacio isomorfo a $\mathbb{R}^2$ es el conjunto
$$\{(a,0,b) \in \mathbb{R}^3 / a,b \in \mathbb{R}\}$$
y también $\{(0,a,b) \in \mathbb{R}^3 / a,b \in \mathbb{R}\}$

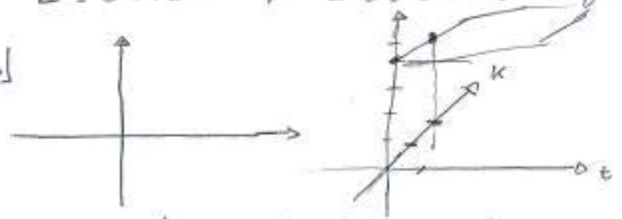
ANEXO 13
Respuestas **E9** Caso2 Cuestionario 2

a] Para $K=t=1$ $(1,1,5) \in S'$; $k=2$; $t=0$ $(0,2,4) \in S'$

Si $(x,y,z) = (t,K,3t+2K)$ como es homogenea nos dice que $x=t$; $y=k$

$z = 3t+2K \Rightarrow z-3t-2K=0.$ en funcion de z, t, k

b]



Es un plano inclinado creciente con pendiente 3 en el eje de t y 2 en el eje de K..

c] La ecuacion que caracteriza a S es $(t, K, 3t+2K) = t(1,0,3) + K(0,1,2)$ con $t, K \in \mathbb{R}$. Considerando la base canonica de $\mathbb{R}^3$ $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ la base de S se puede escribir como $(1,0,3) = (1,0,0)+3(0,0,1)$ y $(0,1,2) = (0,1,0)+2(0,0$

Como $\mathbb{R}^3$ es espacio vectorial se deben probar solo 3 propiedades

- $(0,0,0) \in S'$. Pues para $t=k=0$ $(0,0,3 \cdot 0+2 \cdot 0) = (0,0,0)$
- $\cancel{(a_1, b_1, c_1) + p \cdot (a_2, b_2,}$

(Es cerrado para la suma y multiplicacion por escalar ie si $p \in \mathbb{R}$

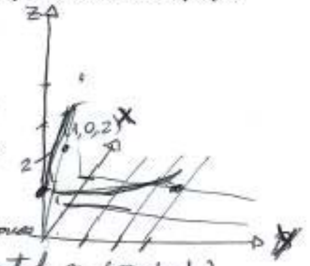
$(a_1, b_1, 3a_1+2b_1) + p \cdot (a_2, b_2, 3a_2+2b_2) =$

$(a_1+p \cdot a_2, b_1+p \cdot b_2, 3a_1+2b_1+3pa_2+2p \cdot b_2)$

$= (a_1+p \cdot a_2, b_1+p \cdot b_2, 3(a_1+pa_2)+2(b_1+pb_2)) \in S'$

2) Considere el conjunto $M = \{v \in R^3 / v = (0,1,1) + \lambda(1,0,2) + \beta(2,3,0);\ \lambda, \beta \in \boldsymbol{R}\}$.
a) ¿Qué describe, geométricamente, el conjunto M? Comente.
b) El conjunto S, con las operaciones usuales de $\boldsymbol{R}^3$, ¿es un espacio vectorial? Explique.

$M = \{(\lambda + 2\beta,\ 1 + 3\beta,\ 1 + 2\lambda)\}$



Es una curva al parecer concava. Me es dificil imaginarla en la cabeza pues no hay componentes que se correspondan directamente con los ejes. Es concava sobre la base canonica pero sobre sus bases es un plano levantado a (0,1,1)

b) No, pues $(0,0,0) \notin M$. ie

$(\lambda + 2\beta,\ 1 + 3\beta,\ 1 + 2\lambda) = (0, 0, 0)$

$\lambda + 2\beta = 0 \longrightarrow -\tfrac{1}{3} + 2 \cdot -\tfrac{1}{2} = -\tfrac{4}{3} \neq 0.$

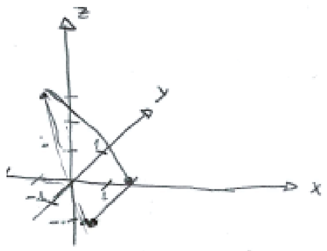
$1 + 3\beta = 0 \Rightarrow \beta = -1/3$

$1 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1/2$

Por lo tanto no puede ser subespacio vectorial, pues el $\vec{0} \in \mathbb{R}$ no pertenece.

3) Considere los puntos P (1,-1,-1), Q(-2,1,3) y R(-1, 1, -1). ¿Existirá un sub-espacio vectorial de $\boldsymbol{R}^3$ que contenga a los tres puntos dados? Explique.

El trivial es el mismo $\mathbb{R}^3$ que contiene a estos puntos.



todos los subespacios propios de $\mathbb{R}^3$ son Planos Rectas o (0,0,0). hay 3 puntos por lo que se determina un plano, hay que ver si el 0 pertenece a este.

P.

$$\begin{bmatrix} 1, & -1, & -1 \\ -2, & 1, & 3 \\ -1, & 1, & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1, & -1, & -1 \\ 0, & -1, & 1 \\ 0, & 0, & -2 \end{bmatrix} \qquad \alpha(1,-1,-1) + \beta(0,-1,1) + \gamma(0,0,-2) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1, & 0, & -2 \\ 0, & -1, & 1 \\ 0, & 0, & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1, & 0 & 0 \\ 0, & -1, & 0 \\ 0, & 0, & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 0 \\ 0, & 0, & -1 \end{bmatrix}$$

De esta ultima matriz se ve que son necesarias las bases de $\mathbb{R}^3$ (todas) para poder representarlo, como son todas no hay un subespacio propio que cumpla

$(p - 2Q - R,\ -p + Q + R,\ -p + 3Q - R) = (0,0,0)$ ✓

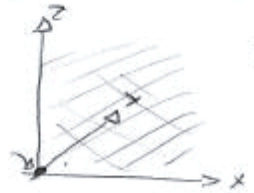
a) Conjunto solución cuando $a = b = c = 0$

$a = b = c = 0 \quad 0 \cdot x \cdot 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0, \ \underline{\forall x,y,z \in}$

$\cancel{\{(0,0,0)\}}$. $\{(x, y, z) \,/\, \forall x, y, z \in \mathbb{R}\}$

siempre cumple la ecuación

Explicación geométrica



todos los puntos

b) Conjunto solución cuando $a = b = 0$

$a = b = 0, \qquad 0 \cdot x + 0 \cdot y + c \cdot z = 0 \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$

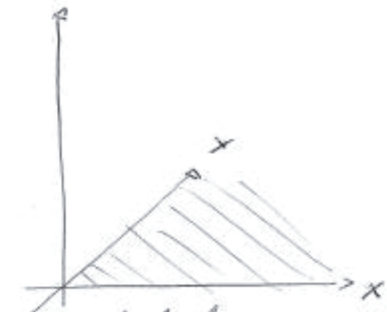
$c \cdot z = 0$

$\Rightarrow \boxed{z = 0}$

$\cancel{\{z(0,0,1)}$

$\{(x, y, 0) \,/\, \forall x, y \in \mathbb{R}\}$

Explicación geométrica



todo el plano x, y

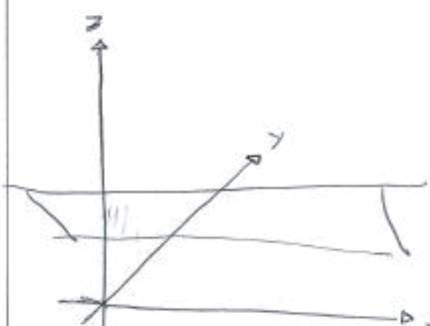
c) Conjunto solución cuando $a = 0$

$a = 0 \qquad 0 \cdot x + b \cdot y + cz = 0, \ \forall x,y,z$

$by + cz = 0$

$\{(x, y, z) \,/\, \forall x, y, z \in \mathbb{R},\ b \cdot y + cz = 0\}$.

Explicación geométrica



Es un plano inclinado ~~ción~~ respecto a X a] En efecto si vemos la bases de W son $(1,0,0),(0,1,0)$ los cuales son 2 de los 3 vectores que componen a la base canonica de $\mathbb{R}^3$ por lo que es trivialmente subespacio.

b] En efecto se muestra un isomorfismo simple considerando la base canonica de $\mathbb{R}^2$ se asocian

$$(1,0) \longleftrightarrow (1,0,0)$$
$$(0,1) \longleftrightarrow (0,1,0)$$

El cual es trivialmente inyectivo y sobreyectivo, por lo que W y $\mathbb{R}$ son isomorfos

c] Mientras se mantengan fijas 2 coordenadas son isomorfos ejemplo

$$\{(a,0,c)\in\mathbb{R}^3 / a,c\in\mathbb{R}\}\ ;\ \{(0,b,c)\in\mathbb{R}^3/b,c\in\mathbb{R}\}.$$

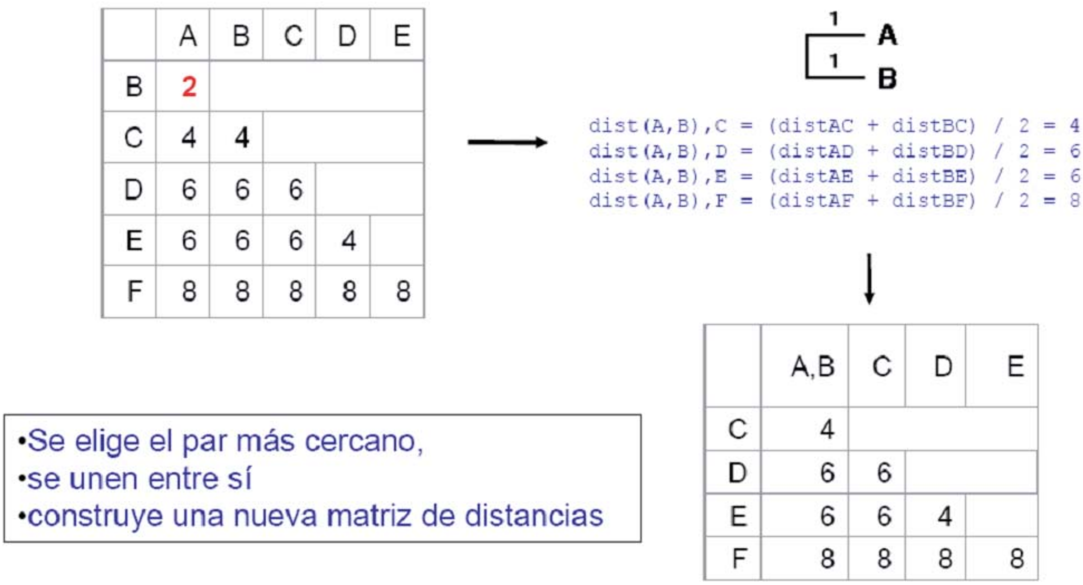
tambien cualquier espacio donde se dibuje un plano en $\mathbb{R}^3$ (es decir una componente dependa de las otras dos por ejemplo

$$\{(a,b,a+b)\in\mathbb{R}^3/a,b\in\mathbb{R}\}$$ con base asociada

$$(1,0,1)\rightarrow(1,0)$$
$$(0,1,1)\rightarrow(0,1)$$ es biyeccion..

ANEXO 14
Análisis del árbol de similaridad

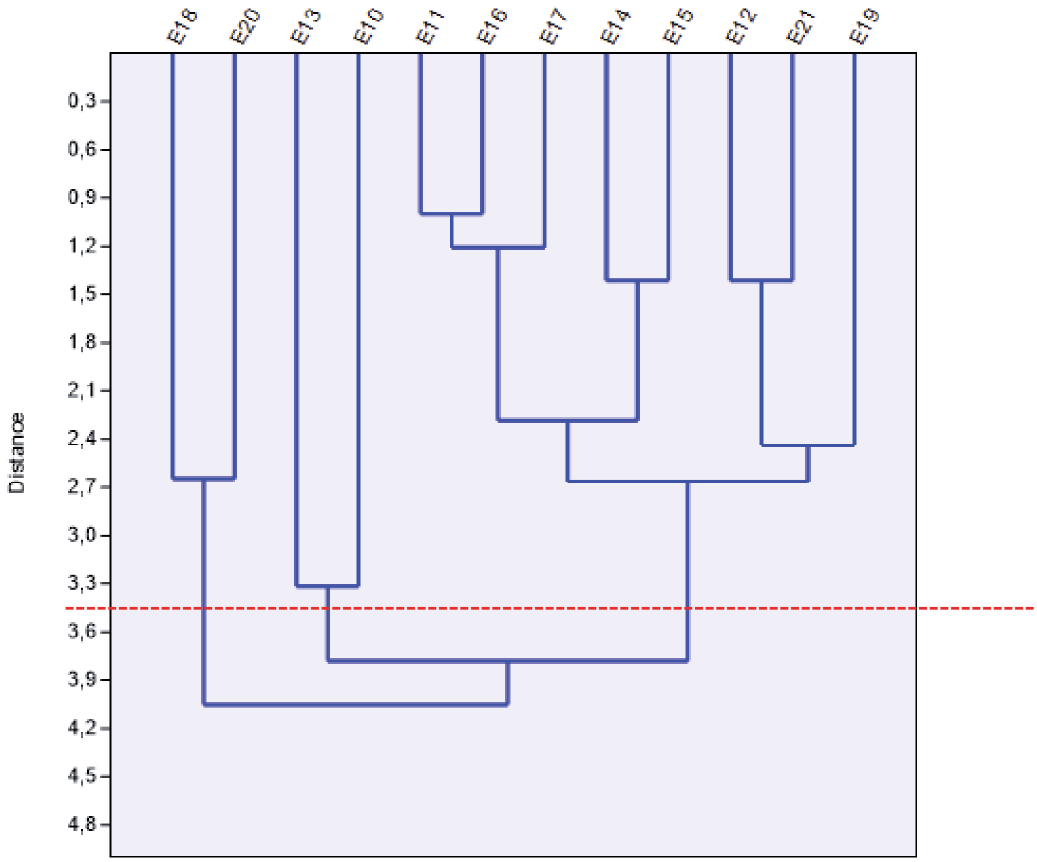
Se comienza asumiendo que la referencia es dónde se aglomeran todos los estudiantes al final, es decir, cuando todos los alumnos constituyen un sólo grupo, corresponde al momento distancia 4. La distancia en este caso corresponde a la máxima distancia euclídea que se obtiene de una matriz de distancias calculada. Es la distancia más grande entre los sujetos, y en consecuencia, es la distancia que se aglomerará al final del proceso.
Una vez calculada la matriz de distancias por el procedimiento seleccionado, es necesario realizar la aglomeración con base en el algoritmo. Como en esta situación se ha elegido “Paired Group” entonces dicha distancia se calcula sobre la base de la distancia promedio de entre todos los miembros de dos grupos (que podrían ser aglomerados). El valor 4 proviene del cálculo de esa distancia promedio, obtenida por fases hasta llegar al último caso o sujeto a agrupar. Aquí un ejemplo de dicho cálculo (los valores iniciales son obtenidos de la matriz de distancias euclidianas elegida -u otra)



En consecuencia, la distancia 4 es un valor obtenido de la aplicación del método Paired Groups, que el caso de PAST corresponde a pares agrupados no ponderados. Es una medida de distancia y no puede interpretarse como las puntuaciones originales. En última instancia podría interpretarse como el valor medio de la distancia euclidiana entre pares de grupos.
En este caso el proceso comienza desde la disimilaridad total (todos los casos son diferentes) hasta la similaridad total (todos los casos constituyen un único grupo). Es un proceso de clasificación jerárquica de tipo aglomerativo.

En la situación aglomerativa, los casos pueden interpretarse como grupos (N=1) separados, que conforman grupos que progresivamente aumentan el valor de N. En este caso y dado que se están agrupando sujetos, lo que se está buscando es la generación de tipologías de estudiantes en base a su desempeño.
Los casos E18 y E20 denotan un desempeño disímil respecto del resto de los casos. Algo parecido ocurre con los casos E10 y E13. Si se observan sus puntuaciones, lo que se obtiene es que los dos primeros casos evidencian un bajo desempeño y los dos últimos un desempeño muy bueno. Los restantes están con desempeños regulares.
Infortunadamente no hay un criterio estadístico, al menos en el dendograma, que permita definir dónde debe estar el corte. Dado que se observa que E13 y E10 tienen

buenos desempeños pero el último tiene un leve mejor desempeño que E13, entonces el corte se podría considerar justo por encima de 3.5.



Con el corte en dicha posición, se tiene un grupo (E18 y E20) de bajo desempeño, dos estudiantes con altos desempeños (E10 y E13), pero uno más que otro (E10) y un grupo grande con desempeños regulares.

Aunque la distancia es una métrica obtenida de la aplicación del algoritmo elegido, ciertamente que alude a la varianza en las respuestas, si se observan los perfiles-fila de los sujetos en la matriz de datos original, se observará que los sujetos similares tienen perfiles-fila de datos similares entre sí, en consecuencia, hay similitud en términos de variabilidad o varianza, hay menos varianza entre ellos que respecto de otros casos.

ANEXOS 15
Entrevista **P1**

I: Pensando en un curso de álgebra lineal en pregrado qué importancia le asigna Ud. a los espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$

P1: Yo creo que importante, los espacios vectoriales en general en el álgebra lineal tienden a ser cuestiones fundamentalmente teóricas. Toma un vector hago operatoria con los vectores y decir estos son espacios vectoriales y sus elementos se llaman vectores. Y qué importancia en $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ es que ahí uno ve los vectores de manera más concreta. Entonces tienen ejemplos, la ponderación de un vector, lo ve en el plano, alarga encoje el vector, la suma lo ve geométricamente, y las cosas aparecen naturalmente, la idea de combinación lineal, que sean linealmente independiente y linealmente dependiente, etc, etc, yo creo que todo esos conceptos básicos dentro de los espacios vectoriales en el plano y en espacio tienen una cosa más concreta.

I: Por lo que logro percibir, en una primera etapa hay una descripción de la estructura de un espacio vectorial en términos generales, definiendo un conjunto cuyos elementos son vectores, ciertas operaciones y después $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$, dentro de la experiencia, utilizarlos para aterrizar.

P1: Como ejemplos concretos, pero puede ser al revés también…porque uno puede fijar los vectores en el plano y en el espacio y a partir de allí decir esto corresponde a tener una estructura teórica y abstracta que cumpla con esas condiciones que se dan con los vectores en $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$.

I: Cuáles son los énfasis matemáticos que Ud. resalta en dichos espacios vectoriales

P1: Haber voy a focalizarme en $\mathbf{R}^2$, entonces si uno lo mira como $\mathbf{R}^2$ entonces es el producto cartesiano $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ y en $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ viven pares ordenados…puntos, ese es como una primera cosa…entonces yo encuentro en esta cuestión matemática uno después dice ahh pero también tiene $\mathbf{R}^2$ mirado como espacio vectorial…por lo tanto como un conjunto de vectores cumplen con ciertas operaciones y determinadas propiedades, entonces también puede ser considerado un conjunto de vectores pero si uno lo mira es un conjunto de puntos…es importante enfatizar que si bien hay un punto también hay un vector.

P1: en el plano viven muchos vectores, pero que distingue a un vector dirección, magnitud y sentido. Bajo una relación de equivalencia entonces todos los vectores que tienen e igual magnitud y sentido son equivalentes. Entonces este vector que está aquí (dibuja en una hoja) es el mismo que está acá. Luego todos ellos los puedo considerar teniendo un punto inicial teniendo un origen. Entonces tengo un punto pero este punto también me identifica o determina el vector. Con este vector puedo hacer todas las operaciones, multiplicación, suma etc. Entonces me gusta hacer notar este hecho sobre todo cuando uno va a trabajar por ejemplo campos vectoriales.

I: ¿Cuál es el Rol de los axiomas?

P1: Si uno lo ve desde el punto de vista geométrico sumo dos vectores, tengo su geometría, y la suma me resulta otro vector, lo cual está establecido geométricamente. Cuando uno tiene una operación siempre está pensando en propiedades y se cumplen ciertas propiedades se pueden pensar en un álgebra, puedo pensar en un elemento neutro y elementos inverso y entonces me permite avanzar en ese sentido. Entonces uno dice con la suma necesito un grupo abeliano…se cumple una estructura básica. Pero además hay otra operación posible esto de alargar o acortar los vectores…la ponderación por escalar y luego ver la compatibilidad con la otra operación…por ejemplo 2v es v + v? entonces de ahí la generalización.

I: Qué requisitos son necesarios para trabajar $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ como espacios vectoriales

P1: Pensar en los requisitos mínimos matemáticos por ejemplo conocer $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ desde el punto de vista geométrico, la operatoria algebraica que se genera allí, no es necesario que se diga que es grupo abeliano, solo bastaría decir que se cumplen ciertas propiedades.

Segundo grupo de preguntas en relación al plano y espacio cartesiano

I: ¿Qué elementos del plano cartesiano se deben articular en el aprendizaje del espacio vectorial $\mathbf{R}^2$? ¿Qué dificultades visualiza?

P1: La dificultad está en que un vector de $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ la notación para un punto y un vector es la misma cuando en realidad son cosas diferentes. Allí hay una dificultad. Cuando uno está haciendo la geometría analítica en $\mathbf{R}^2$, no hay problema en la notación entre par ordenado y punto. Tiempo después se está haciendo el álgebra lineal. Esas dos ideas se juntan en un campo vectorial. Al alumno le surge claramente la confusión y uno no sabe si es un punto o un vector.

P1: No se tiene una operatoria con los puntos...tengo el punto (1,2) y el punto (2,3) y cuánto es (1,2) + (2,3) qué puede significar la suma de puntos pero si se mira como vector claramente tiene si tiene sentido.

ANEXOS 16
Entrevista **P5**

1.- ¿Qué es para Ud. el cartesiano $\mathbf{R}^2$?,…Comente lo que está pensando para responder

Yo lo veo como el plano de los griegos vestido de coordenadas por Descartes...o sea el plano coordinatizado. En eso estaría pensando... y ahí parece que es bien crucial la representación que uno tiene de él. Porque conjuntistamente es $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ nomás… pero uno podría calcular a ciegas en $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ Ahora cuando uno dice el cartesiano $\mathbf{R}^2$ yo entiendo eso como el plano cartesiano.

2.- ¿Qué elementos constituyen este cartesiano $\mathbf{R}^2$?... ¿por qué?

Si $\mathbf{R}^2$ es un conjunto, los elementos son los puntos, son los elementos del conjunto.
Me parece que la palabra elementos está tomada desde un punto de vista cognitivo. Como quien dice, los ingredientes...O las componentes. Ahora cuando dice que elementos constituyen está tomando una postura, una postura idealista y haciendo abstracción del observador…como que está $\mathbf{R}^2$ y hay elementos que lo constituyen y entonces o no hay observador

3.- Hay diferencias entre $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ y el cartesiano $\mathbf{R}^2$?

Algunos matemáticos dirían que $\mathbf{R}^2$ es simplemente $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$, pero que es lo que yo hago en $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ o $\mathbf{R}^2$ puede ser un poco distinto cuando uno dice el cartesiano $\mathbf{R}^2$ uno está pensando en el plano y las coordenadas cartesianas, creo yo...aunque también cartesiano $\mathbf{R}^2$ podría no aludir a Descartes como coordenadas cartesianas sino que al producto cartesiano o a la potencia cartesiana, entonces ahí cartesiano no quiere decir prácticamente nada salvo $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$…porque uno hace el producto cartesiano de dos conjuntos cualquiera sin ninguna intuición o representación geométrica…Entonces, ahora que me percato, yo haría una crítica lingüística...que la palabra cartesiano es ambigua. Puede querer decir simplemente producto cartesiano que es producto cruz o potencia cartesiana...O bien puede estar aludiendo a la geometría llamada analítica de Descartes. Yo lo tomé como que era una alusión a la geometría cartesiana.

4.- ¿El cartesiano $\mathbf{R}^2$ es concebido como una estructura matemática?...podría comentar al respecto.

Hay gente que lo concibe como un caso particular de una estructura matemática...
la estructura no está dada de antemano, no hay una visón estructuralista… mientras yo tengo un $\mathbf{R}^2$ yo estoy entretenido con el $\mathbf{R}^2$...pero cuando uno dice estructura uno está pensando en una abstracción en un concepto abstracto, por ejemplo un espacio vectorial de dimensión dos.
Pero mientras yo esté feliz con $\mathbf{R}^2$, no veo como yo accedo a la estructura...Yo calculo de manera intuitiva u operacional o heurística...o puede ser incluso rigurosa sin mucho problema...

5.- Qué distingue para Ud. lo sintético de lo analítico, desde un punto de vista geométrico….¿Es lo mismo?

Como nomenclatura...sintético es lo que uno hace intuitivamente con Figuras o con propiedades geométricas como básicas...en el fondo podrían ser incluso con geometría axiomática. Y lo analítico desde el punto de vista de Descartes. De lo que se llamaba geometría analítica. Una idea reduccionista. Lo sintético quiere decir que uno trabaja globalmente con rectas y puntos y... podríamos decir con sus propiedades... sin coordenadas.

6.- ¿Ve alguna relación entre el cartesiano $\mathbf{R}^2$ y la(s) geometría (s)?...nos puede comentar con algún detalle

En qué geometría están pensando. Bueno en cierto sentido el cartesiano $\mathbf{R}^2$ sirve como escenario lo único que para la geometría proyectiva hay que mirar para el infinito. Y la geometría vectorial equivale a otra manera de trabajar ahí, claro ahí en el fondo el cartesiano…$\mathbf{R}^2$ sirve como escenario. Pero en un escenario se pueden hacer mucha cosas...puede representar un drama o una comedia…No tanto como modelo, como simple escenario.

7.- ¿Cuál es el rol que se le asigna al cartesiano $\mathbf{R}^2$ para llegar a construir el espacio vectorial $\mathbf{R}^2$?

(Pregunta perversa) por qué me da la impresión que si uno está instalado en $\mathbf{R}^2$ no tiene prácticamente casi ninguna motivación de construir el espacio vectorial $\mathbf{R}^2$. El tránsito del plano cartesiano al plano vectorial no tiene un objeto concreto entre manos que es el plano y uno vivía en él... o como decir uno dialogaba con el plano en forma analítica, cartesiana con las coordenadas y estaba feliz ahí. yo creo que no tenía, en principio, una motivación para explorar algo más. Un problema en la matemática, ¿cómo ser creativo si se está contento?

En vez de espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ yo diría plano vectorial...Se podría ver como trabajo experimentalmente que hay gente que puede trabajar en el plano de manera cartesiana o vectorial.

Por ejemplo, la mediatrices o transversales de gravedad concurren a un mismo punto:
Eso es algo que uno puede conjeturar haciendo dibujitos...y uno después quiere demostrarlo, convencer a cualquier escéptico y uno lo podría verificar de manera cartesiana...lo cual no es lo más hábil quizás...Pero ese mismo problemas es posible abordarlo vectorialmente...uno toma los vectores posición de los vértices que se llaman u, v y w...y no necesita coordenadas...y el punto medio es $(u + v) / 2$...y uno puede describir ahí paramétricamente la ecuación vectorial de la recta y uno ve instantáneamente una solución común...y uno no usa coordenadas, usa la suma vectorial...Un plano vectorial se puede caracterizar operacionalmente, por ejemplo los puntos se ubican por los vectores posición

y construyen puntos haciendo operación con los vectores, con la suma vectorial...entonces por el camino descubren la suma vectorial...desde el otro caso estaban sumando pares de puntos...pares de componentes...ahora como la gente podría transitar de manera natural de una manera a otra...mirarlo como modo más que como estructura...un modus operandi cartesiano y un modus operandi vectorial...

8.- ¿Sin el cartesiano $\mathbf{R}^2$, se podría construir el concepto de espacio vectorial $\mathbf{R}^2$?...pensando en un curso inicial de álgebra lineal.

(El plano vectorial, avatares del plano)
Primer objetivo...aprender a trabajar vectorialmente en el plano...como descubrir trabajar vectorialmente para no ahogarse... Después se puede dar cuenta que puede trabajar de la misma manera en $\mathbf{R}^3$...y a lo mejor en otros ambiente y ahí podría emerger la idea de una estructura abstracta. Para ello basta tener una ciertas propiedades básicas…el plano cartesiano y plano vectorial son objetos relevantes pues ocurren cosas interesantes...pero se tiende a exagerar el rol de $\mathbf{R}^2$ para que emerja el álgebra lineal...por ejemplo vía estado de sistema…Superposición una idea clave...es como llaman los físicos a la suma vectorial...superposición lineal...

ANEXOS 17
Perfil Académico Estudiantes
Caso 1, 2 y 3

FICHA PERFIL ACADÉMICO ESTUDIANTES CASOS 1, 2 y 3

Observación: Para organizar el perfil académico de los estudiantes de los tres casos de estudio se ha considerado, dado que las universidades trabajan con distintas escalas de calificación, cuatro categorías para situar a cada uno de los estudiantes:

Categorías para distribuir el desempeño de los estudiantes		
Categoría	**Clave**	**Descriptor**
Insuficiente	**I**	Reprueba la asignatura
Suficiente	**S**	Aprueba con los requerimientos mínimos la asignatura
Bueno	**B**	Aprueba con un desempeño aceptable la asignatura
Muy Bueno	**MB**	Aprueba con un desempeño destacado la asignatura

Asignaturas del plan de estudios asociadas a los conceptos en estudio y los conceptos previos.

Asignatura	Clave	Asignatura	Clave
Álgebra y Geometría I	**1**	Física general I	**4**
Geometría y computación	**2**	Estructuras Algebraicas	**5**
Álgebra Lineal o álgebra y geometría II	**3**	Geometría Euclideana Plana	**6**

Perfil académico en función de asignatura y categoría de cada uno de los estudiantes del caso 1, 2 y 3.

	Asignatura																							
	1				2				3				4				5				6			
	Categoría																							
	I	S	B	MB	I	S	B	MB	I	S	B	MB	I	S	B	MB	I	S	B	MB	I	S	B	MB
Estudiante																								
E1			x				x					x								x				
E2			x				x					x								x				
E3				x			x					x						x						
E4				x				x				x								x				
E5			x				x					x							x					
E6										x							x	x					x	
E7										x							x					x		
E8										x			x	x			x	x						
E9										x				x										
E10										x												x		
E11									x	x											x			
E12									x	x												x		
E13										x							x					x		
E14									x												x	x		
E15									x												x	x		
E16									x												x	x		
E17									x												x	x		
E18																								
E19																								
E20									x	x								x			x	x		
E21										x											x	x		