Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Facultad de Ciencias
Instituto de Matemáticas

Estudio socioepistemológico de la integral definida a través de la categoría de modelación, un modelo de anidación de prácticas y un marco de referencia de los usos de la medida.

Tesis para optar al Grado de

Doctor en Didáctica de la Matemática

CLAUDIO ANDRÉS GAETE PERALTA

Tesis dirigida por:

Dr. Jaime Mena Lorca

Co-dirigida por:

Dr. Francisco Cordero Osorio

Valparaíso – CHILE

2019

ESTUDIO SOCIOEPISTEMOLÓGICO DE LA INTEGRAL DEFINIDA A TRAVÉS DE LA CATEGORÍA DE MODELACIÓN, UN MODELO DE ANIDACIÓN DE PRÁCTICAS Y UN MARCO DE REFERENCIA DE LOS USOS DE LA MEDIDA.

de

CLAUDIO ANDRÉS GAETE PERALTA

TESIS DOCTORAL

presentada a la

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE VALPARAÍSO

Defendida públicamente el día 01 de Julio de 2019 ante la Comisión de Tesis integrada por:

- Dr. Arturo Mena Lorca, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. Profesor interno.
- Dra. Astrid Morales Soto, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Profesora interna.
- Dr. Francisco Cordero Osorio, Centro de Investigación y Estudios Avanzados, México. Codirector de tesis.
- Dr. Jaime Huincahue Arcos, Universidad Católica del Maule, Chile. Profesor externo.
- Dr. Jaime Mena Lorca, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. Director de tesis

2019

CHILE

Agradecimientos

La presente tesis doctoral se realizó gracias a muchas personas e instituciones que estuvieron en todo momento apoyando, de diferentes maneras, esta investigación. Sin dicho apoyo, esta investigación no habría sido posible:

1. Agradezo a la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (CONICYT) por el apoyo económico otorgado a través del concurso “Doctorado Nacional, Año Académico 2016” (CONICYT-PCHA/Doctorado Nacional: 2016-21161772).

2. Agradezco al Dr. Alain Kuzniak y al Dr. Laurent Vivier, por recibirme tan cordialmente, en el año 2018, en la Université Paris Diderot, Francia y ayudarme en todo lo que necesité durante la realización de mi pasantía doctoral. También agradezco al grupo de estudiantes de dicha universidad, quienes me recibieron de la mejor manera e hicieron de mi pasantía una experiencia académica y de vida espectacular.

3. Agradezo al Dr. Francisco Cordero Osorio y a su grupo de investigación, por recibirme tan cordialmente, en el año 2018, en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (CINVESTAV) del Instituto Politécnico Nacional, México, y ayudarme en todo lo que necesité durante el período en el que realicé mi estancia de investigación. Sin duda, fue una experiencia en la que aprendí mucho. ¡Muchas gracias!

4. Agradezco al programa de Doctorado en Didáctica de la Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso por la calidad académica y humana de su cuerpo docente. En especial, quisiera hacer una mención a las siguientes personas:

- A la Dra. Astrid Morales, quien, a pesar de no ser mi profesora guía, me ayudó a comprender algunos aspectos relacionados con la teoría socioepistemológica. También le agradezco todas sus críticas, opiniones y consejos que ayudaron, sin lugar a dudas, a robustecer esta investigación. ¡Muchas gracias!

- Al Dr. Jaime Mena, quien fue mi director de tesis. Agradezco las horas y horas de discusión teórica que realizamos en su oficina y el apoyo que me brindó durante todo este tiempo; principalmente en aquellos momentos de flaqueza en los que me fue difícil avanzar en tesis porque las ideas no fluían. Él siempre me apoyó y me motivó a seguir adelante. Muchas gracias por valorarme como estudiante y como persona, y por creer en mí desde un principio. Lo que he logrado ser como didacta de la matemática, en gran parte es gracias a usted. ¡Muchas gracias!

5. Agradezco a la Universidad Bernardo O´Higgins por brindarme los tiempos para la realización de este doctorado y la ayuda económica para poder asistir a diversos congresos de carácter nacional e internacional. ¡Muchas gracias!

6. Agradezco a mis padres, Mariela y Juan, y a mi hermano Felipe por su apoyo incondicional y comprensión durante todo este proceso. Específicamente, por apoyarme en la decisión que tomé de realizar un doctorado y por comprender que muchas veces no podría estar con ellos, debido a mis estudios. Quiero decirles que dicha decisión fue tomada pensando en darles una mejor calidad de vida a cada uno de ustedes. ¡Los amo!

7. Finalmente, agradezco a todas aquellas personas que se dieron el tiempo de escuchar mis ideas, ya sea en seminarios, coloquios o congresos, y aportar con sus ideas a mi trabajo de tesis doctoral. A todos ustedes, ¡muchas gracias!

Dedicatoria

De manera muy especial, dedico este trabajo de tesis doctoral a Blanca Alicia Sánchez Leal, “Mamá Blanquita”, quien lamentablemente falleció hace algunos años atrás. Tengo fe en que, desde algún lugar maravilloso, nos observas, ayudas y proteges tanto a mí como a mi familia.

Índice

Resumen

La presente investigación, enmarcada en la teoría socioepistemológica, abordó el estudio de la Construcción Social de Conocimiento Matemático (CSCM) asociado al concepto de integral definida, desde tres perspectivas teóricas distintas: *la categoría de modelación*, *el modelo anidación de prácticas* y un *marco de referencia de los usos de conocimiento matemático*. Para lograr dicho abordaje, este trabajo se dividió en dos partes, en donde la segunda parte nació a partir de lo realizado en la primera. La primera parte de esta investigación, abordó la CSCM desde la perspectiva teórica de la categoría de modelación, debido a que se evidencio, como problemática, que el discurso Matemático Escolar (dME) opaca los usos de la noción de acumulación y excluye a los actores del sistema didáctico de la construcción de la integral definida. Su objetivo general fue desarrollar dicha categoría como una resignificación de usos de la acumulación en dos situaciones específicas de variación. Específicamente, se desarrolló esta categoría como una resignificación de usos de la acumulación en dos situaciones específicas de variación, denominadas *cálculo teórico de los excedentes de los consumidores* y *cálculo teórico de la constante térmica*, propias de los dominios de conocimiento de la Economía y la Fenología, respectivamente.

La segunda parte de esta investigación nació de la primera, específicamente, a partir de lo observado en la situación denominada *cálculo teórico de los excedentes de los consumidores*, en donde se pudo dar cuenta que prácticas como *clasificar*, *medir* y *aproximar* estuvieron presentes en la construcción de la integral definida, y en donde además, se logró reconocer un uso específico de la medida, cuya argumentación vino dada por la necesidad de cuantificar el beneficio económico de los consumidores dispuestos a pagar un precio mayor al de mercado. A partir de lo anteriormente señalado, se encontraron elementos que permitieron aportar a la CSCM asociada al concepto de integral definida, desde otras dos perspectivas teóricas: *el modelo anidación de prácticas* y un *marco de referencia de los usos de conocimiento matemático*, motivo por el cual, esta segunda parte de investigación, el cual se basó en el esquema metodológico socioepistemológico (Montiel y Buendía, 2012), tuvo dos objetivos generales.

El primer objetivo general fue *modelar la CSCM por medio de un modelo*

preliminar de anidación de prácticas. Para abordar dicho objetivo, se establecieron dos objetivos específicos: 1) identificar las prácticas asociadas a la construcción de la integral de Lebesgue realizada en la obra *Integrale, Longueur, Aire* de 1902 y 2) identificar la práctica de referencia que orientó a las prácticas asociadas a la construcción de la integral definida en la obra *Integrale, Longueur, Aire, de 1902.*

Por medio de un análisis histórico-epistemológico, se logró identificar y dar cuenta de que las prácticas de *clasificar*, *medir* y *aproximar*, estuvieron presentes e interactuaron entre sí al momento de construir esta integral en la obra estudiada. Además, se logró identificar y dar cuenta de que dichas prácticas interactuaron orientadas por una práctica de referencia en donde comenzó a surgir una teorización del concepto de medida de un conjunto. La identificación de dichas prácticas y de la práctica de referencia, permitió el diseño de un modelo preliminar de anidación de prácticas, el cual contribuye a un modelado de su CSCM.

El segundo objetivo general, de esta segunda parte de investigación, fue formular una propuesta de marco de referencia de los usos de la medida ($\mathcal{U}(med)$), basado en una epistemología de usos. Para tal finalidad, se estudiaron y contrastaron dos escenarios: la obra de Lebesgue, titulada *Integrale, Longuer, Aire* de 1902 y lo realizado en Economía en la situación específica denominada *cálculo teórico de los excedentes de los consumidores*. Esto permitió identificar en cada una de estos escenarios un uso de la medida -por medio de un debate entre funcionamiento y forma-, e inferir significaciones, procedimientos, instrumento útil al humano y argumentación que resultaron transversales a ambas situaciones. De esta forma, se logró proponer un marco de referencia de los $\mathcal{U}(med)$, en donde una argumentación de cuantificación, dentro de una situación específica de medición, generó una epistemología del concepto de integral definida.

Introducción

En Chile, el estudio del concepto de integral definida forma parte de los cursos de matemática de diferentes carreras de pregrado y en donde, tradicionalmente, predominan los conocimientos acabados y la memorización de conceptos matemáticos para el estudio de contenidos relacionados a la integral definida, tales como el cálculo de áreas de regiones en el plano, el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución y el cálculo de longitudes de curvas, entre otros. Lo anterior, forma parte de una problemática global, propia de la socioepistemología: no existe una relación recíproca (en el sentido de que se afecten mutuamente) entre la matemática escolar (asociada, en nuestro caso, al concepto de integral definida), en donde predomina la justificación razonada, y el cotidiano de la gente, en donde prima la funcionalidad del conocimiento matemático.

Según la socioepistemología, una manera de lograr conseguir dicha relación recíproca, es considerando, en la matemática escolar, los usos de conocimiento matemático ($\mathcal{U}(CM)$) de la gente, así como sus resignificaciones, en situaciones específicas donde se desenvuelven. En el caso del concepto de integral definida, estudios socioepistemológicos han logrado dar cuenta de que el uso de la noción de acumulación (Cordero, 2003a), en situaciones específicas de variación, permite lograr una construcción de la integral definida, valorando las justificaciones funcionales. Por tal motivo, resulta de interés para esta investigación estudiar los usos de la acumulación ($\mathcal{U}(ac)$) en situaciones específicas de variación, caracterizando además las epistemologías del concepto de integral definida generadas en dichas situaciones. Es por este propósito, que esta primera parte de la investigación tiene como objetivo general desarrollar la categoría de modelación como una resignificación de $\mathcal{U}(ac)$ en situaciones específicas de variación. Esto, con la finalidad de dar pautas para futuras intervenciones didácticas que permitan lograr una construcción de la integral definida, en situaciones específicas de variación, considerando el uso de conocimiento matemático de la gente. De esta manera, se aportarán elementos que permitan contribuir al logro de la relación recíproca entre la matemática escolar y la matemática que ocurre en el cotidiano de la gente, en términos generales.

Esta investigación consta de siete capítulos.

En el capítulo 1, se presenta el marco teórico que sustentará esta investigación. Dicho marco proveerá los fundamentos teóricos que permiten construir la categoría de modelación, variedad teórica socioepistemológica del concepto de modelación matemática, la cual será utilizada para abordar el objetivo general de esta primera parte de investigación.

En el capítulo 2, se realizará una breve caracterización del dME, en cuanto a lo que señalan diversos autores en relación a cómo se llevan a cabo los procesos de enseñanza y aprendizaje de la integral definida, mostrando además algunas evidencias sobre cómo se construye este concepto en algunos textos universitarios. En este capítulo también se explica en qué consiste la noción de acumulación y cuál es su rol en la construcción de la integral definida, dentro de situaciones específicas de variación. Además, se da evidencia del fenómeno de opacidad, planteado por la socioepistemología, de los $\mathcal{U}(ac)$ por parte del dME, lo que permite plantear el objetivo general de investigación (mencionado en el resumen) y el específico, el cual consiste en desarrollar la categoría de modelación como una resignificación de $\mathcal{U}(ac)$ en dos situaciones de variación específicas: *el cálculo teórico de la constante térmica* y e*l cálculo teórico de los excedentes de los consumidores*, propias de los dominios de conocimiento de la Fenología y la Economía, respectivamente. Finalmente, en este capítulo se lleva a cabo el desarrollo de dicha categoría, acorde al objetivo específico planteado.

En el capítulo 3, se realizará una discusión sobre el rol de tres prácticas que aparecieron e interactuaron entre sí en la construcción de la integral definida, realizada en la situación específica de Economía mostrada en el capítulo 2: *clasificar, medir* y *aproximar*. Además, en este capítulo se muestra que es posible entender que dicha situación también está argumentada por la necesidad de *cuantificar* el beneficio económico de aquellos consumidores dispuestos a pagar, por determinado artículo, un precio mayor al de mercado, lo cual junto a un uso de la medida permitió generar una epistemología de la integral definida.

La discusión realizada en este capítulo, otorga elementos interesantes para abordar la CSCM asociado a la integral definida, desde otras dos perspectiva teóricas provenientes de la socioepistemología: *el modelo de anidación de prácticas* (Cantoral, 2013) y *un marco de referencia de* $\mathcal{U}(med)$. Es por este motivo que nace la segunda parte de esta investigación, en la cual se plantean, dentro de este capítulo, dos objetivos generales, derivados de cada una de las dos perspectivas teóricas anteriormente señaladas. El primero de ellos (y el segundo de la investigación, en términos globales) es modelar la CSCM por medio de un modelo preliminar de anidación de prácticas, del cual derivan dos objetivos específicos: 1) Identificar las prácticas asociadas a la construcción de la integral de Lebesgue realizada en la obra titulada *Integrale, Longueur, Aire* de 1902 y 2) Identificar la práctica de referencia que orientó a las prácticas asociadas a la construcción de la integral definida realizada por Lebesgue en la obra *Integrale, Longueur, Aire*, de 1902.

El segundo objetivo general de esta segunda parte de investigación (y el tercero de la investigación, en términos globales) es *formular una propuesta de marco de referencia de los* $\mathcal{U}(med)$, del cual derivan dos objetivos específicos: 1) Analizar los $\mathcal{U}(med)$en el escenario de la obra de Lebesgue (1902) y en el de la Economía, en la situación específica denominada *cálculo teórico de los excedentes de los consumidores* y 2) identificar una transversalidad entre ambos escenarios por medio de la formulación de una epistemología de $\mathcal{U}(med)$.

En el capítulo 4, se da a conocer el esquema metodológico, utilizado en esta segunda parte de la investigación, para responder a los objetivos planteados y detallados en el capítulo 3.

En el capítulo 5, se realiza un análisis histórico-epistemológico en relación al concepto de integral definida. En dicho análisis se hizo un recorrido desde lo realizado en la Grecia Antigua, pasando por los trabajos de Newton y Fourier, en donde la intuición geométrica era un factor común que predominaba en los procesos de construcción de la integral definida. Posterior a eso, surgió un cambio de paradigma en cuanto a la forma de llevar a cabo dichos procesos de construcción, denominado *Aritmetización del Análisis*, en donde por medio de una eliminación de la intuición geométrica, matemáticos como Cauchy, Dirichlet y Riemann, entre otros fueron realizaron una construcción de este concepto. Posteriormente, ante la necesidad de estudiar el "tamaño" del conjunto de discontinuidades de una función, surgió la necesidad de incorporar la noción de medida de conjuntos como una herramienta útil y necesaria para la construcción de la integral definida. El primero de los matemáticos que llevó a cabo, de manera incipiente, este tipo de construcción, fue C. Jordan. De ahí en adelante, el interés de los matemáticos estuvo en definir “una buena medida” para construir la integral definida. Basándose en lo realizado por Jordan y en los aportes de Borel, Lebesgue brinda una salida conceptual al problema de la medida, construyendo una integral que no sólo generalizó lo realizado por sus antecesores, sino que también solucionó diversos problemas matemáticos de la época.

Finalmente, en este capítulo se incluye un análisis de las obras de Lebesgue denominadas *Integrale, Longuer, Aire* de 1902, *Sur le développement de la notion d´integrale*, de 1927, *Leçons sur l´intégration. Recherche des fonctions primitive de 1928 y* de la construcción de esta integral, pero enmarcada en la actual teoría de la medida.

En el capítulo 6, se da cuenta de la presencia y manera en las que interactúan las prácticas de clasificar, medir y aproximar en la construcción de la integral definida realizada por Lebesgue en las obras *Integrale, Longuer, Aire* de 1902, *Sur le développement de la notion d´integrale*, de 1927, *Leçons sur l´intégration. Recherche des fonctions primitive de 1928 y* en la construcción de esta integral enmarcada en la actual teoría de la medida. Esto, junto con la identificación, en la obra de 1902, de la práctica de referencia denominada *surgimiento de la medida de conjuntos como teoría*, permitió construir un modelo preliminar de anidación de prácticas.

Además, en este capítulo se analizaron los $\mathcal{U}(med)$ en el escenario de la obra de Lebesgue (1902) y en el de Economía, en la situación específica denominada *cálculo teórico de los excedentes de los consumidores*, junto con identificar una transversalidad entre ambos escenarios, lo que permitió formular una propuesta de marco de referencia de los $\mathcal{U}(med)$.

Finalmente, en el capítulo 7 se presentan las conclusiones y discusiones generales de esta segunda parte de la investigación.

Primera parte.

La categoría de modelación como una resignificación de usos de la acumulación.

"En el cálculo diferencial e integral, estudios socioepistemológicos muestran que lo importante de él es entender la derivada asociada a la variación (variación instantánea), la segunda derivada (variación de la variación) y, en la integral, la acumulación. Entendiendo lo anterior como la construcción de la derivada y de la integral a través de la situación variación". (Morales, Mena, Vera y Rivera, 2012, p.243)

Capítulo 1.

Marco teórico y problemática de la primera parte de investigación

"Se ha puesto en evidencia que el dME está centrado en objetos matemáticos que se estudian a través de la incorporación de ciertos algoritmos, argumentaciones y procedimientos específicos, y sobre todo, que carece de un sentido humano, es decir, en este tipo de centración la matemática es preexistente a cualquier actividad humana". (Reyes-Gasperini y Cantoral, 2014, p. 364)

1.1 La socioepistemología

La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) nace en México, a fines de los años ochenta. La investigación titulada *Un estudio de la formación social de la analiticidad* (Cantoral, 1990), fue el punto de partida para el desarrollo de esta teoría, la cual se fue robusteciendo con los trabajos posteriores de Farfán (1993) y Cordero (1994).

El posicionamiento de la TSME es que “los conocimientos matemáticos son productos de la construcción social” (Reyes–Gasperini, 2016, p. 31). En otras palabras, para esta teoría el saber es considerado como una CSCM, la cual, según Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto (2015), es una noción que considera las interacciones y procesos de debate que viven las comunidades para llevar a cabo los procesos de institucionalización del conocimiento matemático, junto con su funcionalidad en contextos y situaciones específicas.

La socioepistemología es una teoría de naturaleza sistémica que estudia la CSCM mediante una articulación de cuatro dimensiones del saber: cognitiva, didáctica, epistemológica y social (ver Figura 1).

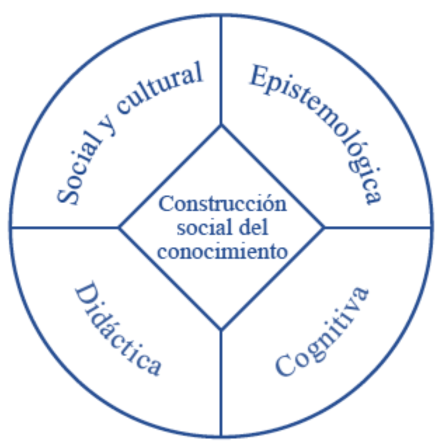


Figura 1: Las cuatro dimensiones del saber (Cantoral, 2013)

1.1.1 Principios de la socioepistemología

La TSME descansa sobre cuatro principios[1] fundamentales: el *principio de la racionalidad contextualizada*, el *principio del relativismo epistemológico*, el *principio de la resignificación progresiva* y el *principio normativo de la práctica social*.

- El *principio de la racionalidad contextualizada* establece que es el contexto el que determinará el tipo de racionalidad con la cual un grupo humano, perteneciente a una cultura, construye conocimiento, significándolo y poniéndolo en uso.

- El *principio del relativismo epistemológico* tiene relación con que la validez del saber es relativo al grupo humano que lo construye, dado que de ellos emergió dicha construcción y sus argumentaciones (Cantoral, Montiel y Reyes–Gasperini, 2015).

- El *principio de la resignificación progresiva* señala que los saberes se resignificarán progresivamente a causa de la propia evolución del grupo humano y de su interacción con diversos contextos, lo cual permite enriquecer estos saberes, construidos hasta el momento, con nuevos significados (Cantoral, Montiel y Reyes–Gasperini, 2015). Cabe señalar, que en esta investigación estamos entendiendo por resignificación de conocimiento matemático en el sentido de Cordero (2008), la cual se refiere a la construcción de conocimiento mismo acorde a la organización del grupo humano en cuestión.

- El *principio normativo de la práctica social* señala que las prácticas sociales son los cimientos de la construcción del conocimiento matemático, en donde el contexto influye en la racionalidad con la cual un grupo humano construye conocimiento en tanto lo signifique y lo ponga en uso. Las prácticas sociales resultan ser la base y orientación en los procesos de construcción de conocimiento, siendo así, las generadoras del conocimiento.

---

[1] La idea de principio de entiende como "aquello inherente a una disciplina como el reflejo de las características esenciales de un sistema, que los investigadores asumen y sin el cual no es posible trabajar, comprender o usar dicho sistema, considerado como el punto de partida y fundamento". (Cantoral, 2013, p.152)

Una visión sintética y articulada de estos cuatro principios, puede verse en la Figura 2.

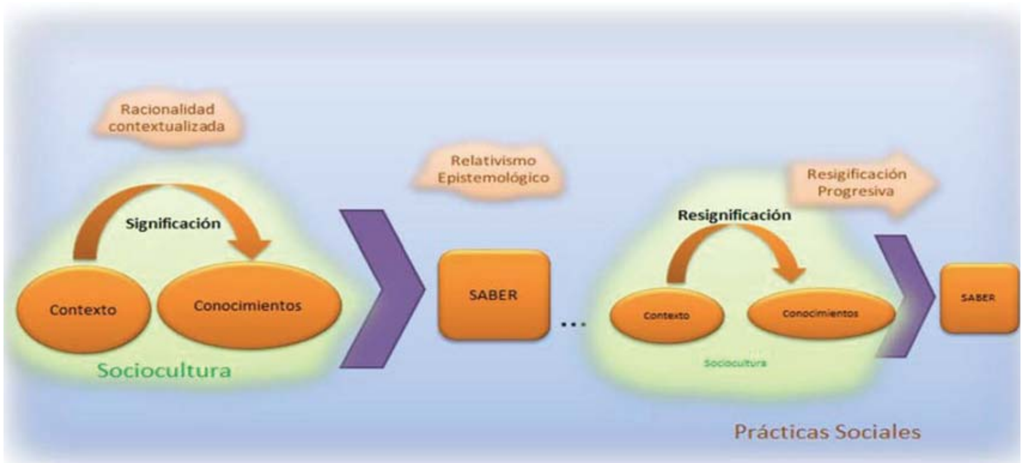


Figura 2: Síntesis del modelo, principios y funciones (Reyes-Gasperini, 2011)

1.1.2 El discurso Matemático Escolar

Para la TSME, en el dME la enseñanza de la matemática está centrada en objetos matemáticos, los cuales son concebidos bajo una visión platónica del conocimiento; es decir, preexisten a la acción del ser humano. Por lo tanto, para la socioepistemología, el mayor conflicto de la enseñanza y aprendizaje de la matemática no está en la búsqueda de mejores metodologías de enseñanza, sino que está en el propio dME.

La socioepistemología plantea que el dME enfoca los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática a conceptos, presentándolos de forma acabada y descontextualizada, dejando de lado los usos de conocimiento matemático ($\mathcal{U}(CM)$) de la gente, en términos generales. Esto es uno de los motivos que hacen que la CSCM quede rezagada por el dME, haciendo que el conocimiento matemático no logre alcanzar un nivel funcional.

Cordero et al (2015) señalan que:

> el dME es la expresión de una epistemología dominante que conlleva fenómenos como la exclusión y la opacidad. Es, por un lado, la imposibilidad de participar en la construcción del conocimiento matemático y por el otro, la negación de la pluralidad epistemológica. (p. 25)

Lo anterior lleva a reconocer al dME como un sistema de razón que delinea lo que queda dentro y fuera de la razón, “lo que queda dentro y fuera de lo normal, de lo exitoso o fracasado” (Cordero et al, 2015, p. 67). De esta manera, la socioepistemología plantea la necesidad de reconocer al dME como la problemática fundamental y proponer un rediseño de este, basado en la CSCM, que permita vincular la enseñanza de la matemática con el cotidiano de la gente y que responda a su vez a los tres fenómenos provocados por el dME: *adherencia, exclusión* y *opacidad*.

Los tres fenómenos mencionados en el párrafo anterior no son secuenciales y están enlazados de forma sistémica. El *fenómeno de adherencia* hace alusión a que docentes, y por tanto estudiantes, se adhieren al dME, sin atreverse a trastocarlo, lo cual es una condición necesaria para producir una dialéctica entre el conocimiento matemático y la vida. El *fenómeno de exclusión* tiene relación con que el dME impone argumentaciones[2], significados y procedimientos que provienen de una epistemología dominante que olvida al resto de contextos, comunidades y situaciones específicas que hacen emerger el conocimiento matemático. Para contraponer al fenómeno de exclusión, Soto (2014) propone incluir, en el rediseño del dME, la CSCM, centrado en prácticas sociales y en una pluralidad epistemológica donde se da la funcionalidad y transversalidad del conocimiento.

En término generales, el *fenómeno de opacidad* alude a una invisibilidad de *lo matemático*[3] en el dME. Dicho de otro modo, en este fenómeno, el dME no hace visible ni fomenta una pluralidad epistemológica, pues el dME actúa como una barrera que impide relacionar el cotidiano y la matemática escolar (Cordero, Gómez, Soto y Silva-Crocci, 2014). Todo esto es reflejado en la matemática escolar, al invisibilizar los $\mathcal{U}(CM)$ (Cordero et al, 2015).

[2] En Cordero et al (2015) se conciben las argumentaciones del conocimiento matemático “como el hilo conductor de la situación específica de donde emergen los conocimientos matemáticos” (p. 74)

[3] Cordero et al (2015) conciben *lo matemático* como una expresión de la pluralidad epistemológica, siendo este de carácter vivencial, pues se expresa en las cualidades de las relaciones.

La TSME ha construido cinco categorías, contrarias a las características del dME, las cuales representan la noción de CSCM y a su vez manifiestan una epistemología que se confronta con el dME (ver Tabla 1). Según Cantoral (2013), las características del dME - dadas en la Tabla 1 – hacen ver a este discurso como algo impositivo en donde el conocimiento matemático es rígido, sin posibilidad de que el aprendiz pueda modificar dicho conocimiento.

Tabla 1
Categorías del dME y de la CSCM (Cordero et al, 2015)

dME	CSCM
Hegemonía	Pluralidad epistemológica
Utilidad	Funcionalidad
Centración en objetos matemáticos	Centración en prácticas sociales
Sin marcos de referencia[4]	Transversalidad
Continuidad y linealidad del conocimiento matemático	Desarrollo de usos del conocimiento matemático

Para Cordero et al (2015), el carácter hegemónico del dME hace que sólo sean privilegiados ciertos tipos de argumentaciones, significados y procedimientos, estableciendo además que el dME no incorpora las experiencias del ser humano para la construcción de la matemática escolar, eludiendo el hecho de que la matemática responde a otras disciplinas en donde es posible encontrar significados naturales para la matemática. En palabras de Pezoa y Morales (2016), “el modelo de conocimiento basado en la centración en los conceptos no ha podido atender lo funcional y soslaya lo que organiza el humano para conocer, no crea situaciones específicas e intencionales que den significado al conocimiento” (p. 57).

[4] Según Gómez (2015):

> Entendemos un Marco de Referencia (MR) para la Matemática Escolar como un constructo desde la TSE que nos señala los elementos que comprenden las diferentes perspectivas y configuraciones posibles que indican pautas y trazan explicaciones sobre las maneras de construir y difundir, en este caso, la enseñanza y el aprendizaje del conocimiento matemático. (p. 51)

La pluralidad epistemológica, en contraposición a la hegemonía del dME, considera las diferentes argumentaciones, significados y procedimientos que se asocian al conocimiento matemático en situaciones y contextos específicos.

Lo utilitario del conocimiento matemático hace referencia a que el dME hace ver que la matemática está al servicio de la actividad matemática, es decir, el dME hace ver a la matemática como un saber útil para enfrentar ciertas problemáticas. Esto hace que el sujeto aprenda solamente cuando se vea enfrentado a estas problemáticas. Por ejemplo, si en una cierta tarea matemática los estudiantes ven un triángulo rectángulo, los estudiantes saben que tienen que usar el teorema de Pitágoras; o si ven una indeterminación de un límite, de la forma $\frac{0}{0}$, ellos saben que tienen que usar el teorema de L´Hopital. Probablemente no sepan el motivo, pero saben que deben hacerlo para poder calcular el límite.

La *funcionalidad del conocimiento matemático*, en contraposición al carácter utilitario del dME, hace ver al conocimiento como algo que "vive" y se transforma en una determinada situación y contexto (Cordero et al, 2015), reconociendo a las prácticas sociales como generadoras de conocimiento matemático.

La *centración en prácticas sociales*, en contraposición a la centración en objetos matemáticos, "permite dejar de poner en un altar a los objetos matemáticos y centrarnos en los usos del conocimiento matemático" (Cordero et al, 2015, p. 70). La descentración del objeto matemático no significa su anulación, "enuncia que no parte del propio objeto matemático y su relación con el individuo; sino que el origen se considera desde la anidación de prácticas." (Reyes–Gasperini, 2016, p.62)

La transversalidad del conocimiento matemático, en contraposición a la falta de marcos de referencia del dME, permite reconocer que la matemática "vive" en otros contextos en donde los $\mathcal{U}(CM)$ permiten reconocer nuevas argumentaciones, significados y procedimientos que contribuyan a resignificar el conocimiento matemático, enriqueciéndola a su vez con nuevos significados.

La continuidad y linealidad del conocimiento matemático genera que la enseñanza de la matemática se reduzca a la mecanización de procesos y memorización de conceptos, en donde son presentados en orden y como si siempre hubiesen existido. El desarrollo de usos, en contraposición con lo anterior, se refiere a la resignificación progresiva del conocimiento matemático. Enfocar la atención en los $\mathcal{U}(CM)$ de la gente permite conocer aquella matemática que sucede en su realidad (y en particular, de quien aprende matemática) y que le es funcional.

1.1.3 La resignificación de usos del conocimiento matemático

En Cordero et al (2015) se plantea un doble estatus de la matemática: como objeto de estudio y como instrumento (ver Figura 3). Por un lado, existen carreras universitarias de pre y postgrado[5] en donde la matemática es objeto de estudio. En este tipo de carreras, el estudio de la matemática está dominado por una justificación razonada, en donde se "concibe la construcción de la matemática escolar instalada desde la misma estructura matemática" (Cordero et al 2015, p. 51).

Por otro lado, existe gente que no estudia matemática, que no pretende ser matemático o incluso no se siente atraída por la matemática, pero sí hace uso de ella como un instrumento de su quehacer en distintos escenarios. En este tipo de escenarios, domina la justificación funcional, en oposición a la justificación razonada. Son este tipo de justificaciones las que son de interés para la socioepistemología, pues les permite a los seres humano construir conocimiento matemático, que les es funcional, en contextos y situaciones específicas.

[5] Licenciatura en Matemáticas (pregrado) y Magíster o Doctorado en Matemáticas (postgrado), son ejemplos de carreras en Chile en donde la matemática es objeto de estudio.

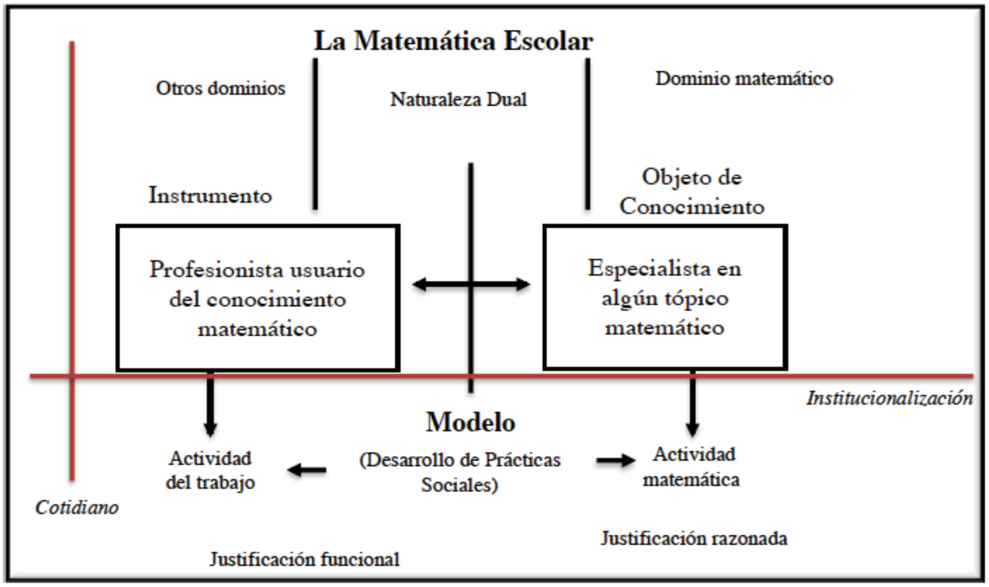


Figura 3: La dualidad de la matemática escolar (Cordero, 2016)

La socioepistemología busca generar un marco de referencia que valore la justificación funcional y en donde al conocimiento matemático institucional se le incorporen los $\mathcal{U}(CM)$ de la matemática escolar, de otros dominios de conocimiento y del cotidiano de la gente. En cada uno de estos escenarios, se busca estudiar la resignificación de los $\mathcal{U}(CM)$ ($Res(\mathcal{U}(CM))$). Para Mendoza y Cordero (2017) hablar de *resignificaciones de los usos del conocimiento matemático,* es hablar de un marco de referencia que caracteriza y estructura los $\mathcal{U}(CM)$ en situaciones específicas, el cual está compuesto “por la movilidad de los usos y significados del conocimiento matemático en las diferentes situaciones específicas propias de otros dominios de conocimiento y del cotidiano de la vida.“ (Mendoza y Cordero, 2018, p. 37). Las $Res(\mathcal{U}(CM))$ ocurren en situaciones específicas conformadas “por elementos secuenciales que construyen lo matemático: significación, procedimiento, e instrumento, que derivan la argumentación de la situación ($Arg(CM)$)”. (Codero, 2017, p.18). Por ejemplo, para la construcción de lo matemático en situaciones de variación, las significaciones están asociadas al flujo, al movimiento, a la acumulación o al estado permanente; el procedimiento viene dado por la comparación de dos estados y el instrumento son las cantidades de variación continua. Todo esto deriva en la predicción como argumentación de dicha situación (ver Tabla 2). En otras palabras, *la* *predicción es una resignificación de usos de la acumulación construida en situaciones específicas de variación*.

Para la socioepistemología, una manera de proponer el rediseño del dME es que su núcleo principal sea una matemática funcional con base en los $\mathcal{U}(CM)$, para así crear un vínculo entre la matemática del cotidiano y la matemática escolar.

1.1.4 La categoría de modelación

Concordando con Williams y Goos (2013), existe un enfoque tradicional de la modelación matemática en Educación Matemática, la cual consiste en reconocer a la práctica de modelación como un proceso cíclico (Blum y Leiß, 2005; Blum y Borromeo-Ferri, 2009), acuñando en muchas ocasiones a tránsitos y fases de la actividad individualizada (e.g. Blum et al., 2005; Maaß, 2006; Blomhøj, 2004; Lesh y Doerr, 2003). Tales propuestas conciben una aproximación individualizada de la actividad de modelación (Borromeo-Ferri, 2006), incluso privilegiando contextos específicos como la modelación matemática en la Ingeniería (Rodríguez y Quiroz, 2015). Ellos, son una influencia en currículos latinoamericanos (como han sido los casos de Chile, Perú, Colombia o Costa Rica, por mencionar algunos ejemplos) y demás latitudes. Tales trabajos respetan un principio, el que posiciona tanto a la realidad como a las matemáticas como unidades de conocimiento distanciadas, planteando una intención de ser relacionadas por medio de un proceso cíclico. Con la intención de sintetizar la manera en la que suele ser entendido, en términos generales, el concepto de modelación matemática, consideraremos un principio P que acuñan tales aproximaciones teóricas, como el *ciclo que conecta la realidad y las matemáticas*.

Desde un enfoque socioepistemológico, la matemática no es concebida como un conocimiento ajeno a la realidad del que aprende, sino que la CSCM propicia la transformación de la realidad, y viceversa. Por ello, al plantear la categoría de modelación ($\zeta(Mod)$), existe una necesidad por crear una variedad teórica en cuanto al principio que concilia el enfoque tradicional. Cabe señalar que cuando se utiliza el concepto “categoría”, significa hablar de un tipo de conocimiento que es diferente a aquel conocimiento centrado en objetos matemáticos y que promueve una descentración de estos (Mendoza y Cordero, 2018).

La $\zeta(Mod)$ se ha ido construyendo y robusteciendo a partir de lo realizado en diferentes investigaciones socioepistemológicas (Cordero, 2017, Huincahue, 2017 y Cordero, Mena-Lorca, Huincahue, Mendoza y Pérez-Oxté, 2019), en donde se considera una variación del principio P, digamos P', que considera la funcionalidad del conocimiento matemático en la práctica educativa. Específicamente, se concibe al principio P' como *lo funcional de las relaciones recíprocas entre la matemática y el cotidiano* (Cordero, 2017).

Plantear este principio como una variedad del enfoque tradicional, posiciona a la $\zeta(Mod)$ como un proceso descentrado del objeto matemático, más bien, cercano a un enfoque en el $\mathcal{U}(CM)$. Por ello, plantear la variedad P' permite romper con el modelo tradicional de islas entre la realidad y las matemáticas, posicionando a la $\zeta(Mod)$ como un modelo conceptual que privilegia la funcionalidad del conocimiento matemático, a partir del estudio de una $Res(\mathcal{U}(CM))$.

Dado a lo anterior, consideraremos como objeto de estudio las actividades humanas que evidencian ciertos $\mathcal{U}(CM)$. Ellas, son inicialmente reconocidas a partir de una i-ésima Situación Específica, S_{in}, proveniente de un n-ésimo Dominio del Saber, D_n.

La relación entre S_{in} y D_n, está afectada por un eje epistemológico, digamos E, el cual, singulariza epistémicamente la actividad matemática realizada en S_{in}, permitiendo destacar como foco de análisis la funcionalidad del conocimiento matemático. Este análisis, permite caracterizar los funcionamientos y formas del conocimiento matemático para una correcta descripción de los $\mathcal{U}(CM)$. En la Figura 5, se consideran, al menos, dos situaciones S_{in} y S_{jm}, reconociendo la pluralidad epistemológica del conocimiento matemático en distintos dominios (siendo n y m distintos o no) además, es importante indicar que i es distinto de j. Cabe destacar que la funcionalidad del saber matemático está afectada por la institucionalización que brinda el uso según la Comunidad de Conocimiento Matemático (Cordero, 2016; Pérez-Oxté, 2015) y la transversalidad del saber. Ambos componentes son ejes en donde suceden situaciones S_{in}, caracterizadas respecto a D_n y se crean oportunidades de alternancia de escenarios del tipo académico-escuela, la profesión-trabajo y el cotidiano-ciudad (Cordero, 2017).

El modelo de la Figura 4, representa los elementos que intervienen en la $\zeta(Mod)$, siendo ésta la $Res(\mathcal{U}(CM))$ cuando sucede un tránsito entre S_{in} y S_{jm}, incluso en alternancia de dominios. Este es el conocimiento que genera la $\zeta(Mod)$ (Cordero, 2017).

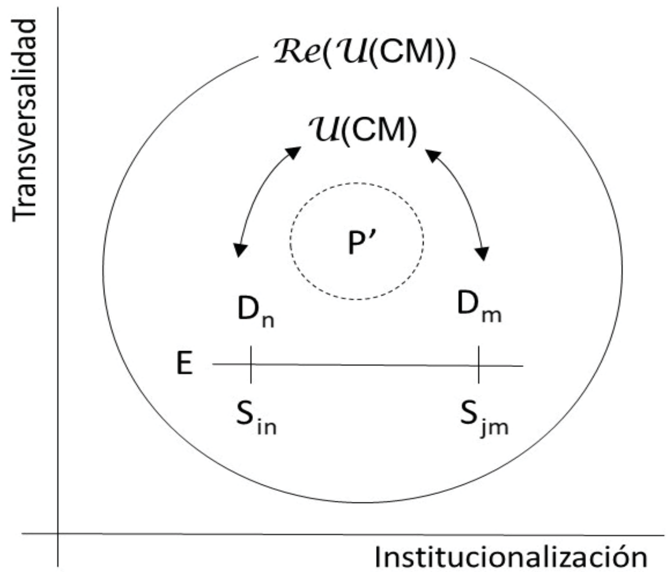


Figura 4: La Categoría de Modelación (Cordero, Mena-Lorca, Huincahue, Mendoza y Pérez-Oxté, 2019)

1.2 Problemática de la primera parte de investigación.

1.2.1 El concepto de integral definida y el dME

En relación a los procesos de enseñanza y aprendizaje del cálculo, Aranda y Callejo (2017a) dan cuenta de su *carácter utilitario*, indicando que “muchas veces su presentación se focaliza en aspectos procedimentales como el manejo de reglas para calcular límites, derivadas o integrales (p. 778). En el caso del concepto de integral definida, “uno de los conceptos fundamentales del cálculo” (Aranda y Callejo, 2017b, p.158), Cordero

(1992) señala que profesores y estudiantes solo conciben dicho concepto como una herramienta que los provee de algoritmos eficientes, a los cuales hay que buscarles una aplicación. Más aún, Cordero (2005) menciona que el teorema fundamental del cálculo, dado por la expresión $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, suele presentarse como un algoritmo eficiente para diversas aplicaciones matemáticas y el cálculo de integrales definidas. Para Contreras y Ordóñez (2006), una cierta exclusividad de la algoritmización en el uso de la integral definida ha conducido a un sentido algebraico de este concepto, lo cual aleja a este concepto de una interpretación ligada a procesos de cambio.

Una muestra del *carácter hegemónico* del dME, en el caso de la enseñanza del concepto de integral definida, se refleja en lo señalado por Cantoral (2003):

> La integral de f desde a hasta b puede entenderse de diferentes maneras según el programa teórico que se considere. Consideremos, a manera de ejemplo, tres de las versiones más conocidas de la integral. La primera, la más usada en la enseñanza contemporánea para definir a la integral se conoce como la integral de Cauchy-Riemann. Otra, la integral de Newton-Leibniz, es la más empleada al momento de resolver integrales por métodos elementales y finalmente, la menos conocida en la literatura escolar, la integral de Wallis. Esta integral fue tratada como parte de un programa tendiente a dar un tratamiento aritmético del infinito. (p.10)

A pesar de existir, al menos, tres formas distintas de entender el concepto de integral definida, Cantoral (2003) señala que se ha aceptado una especie de consenso escolar, donde la presentación de Cauchy-Riemann y la explicación mediante rectángulos inscritos y circunscritos (ver Figura 5), como medio de aproximación del área bajo la curva, es la que todos los profesores deben de enseñar en sus clases.

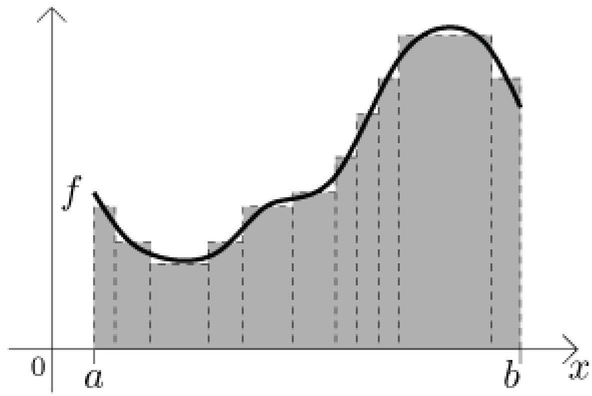


Figura 5: Presentación de la integral definida por rectángulos inscritos y circunscritos

Cordero (2005) indica que el concepto de integral es explicado a través de las concepciones de límite y función (*continuidad y linealidad del conocimiento matemático*), acompañado de su representación geométrica: el área bajo la curva de una función positiva en un intervalo, lo cual genera una cultura tanto para el profesor como para el estudiante, donde aprenden a decir lo que es la integral, sin tener, por ejemplo, “una comprensión que les permita estudiar fenómenos de variación continua”. (Cordero, 2005, p. 269)

Para continuar caracterizando al dME, en cuanto a la enseñanza del concepto de integral definida, mostraremos algunas evidencias sobre cómo es presentado dicho concepto en algunos textos de estudio que abordan la enseñanza de este concepto. La decisión de elegir estos textos se basó en el hecho que estos suelen estar presentes en la gran mayoría de las bibliografías que forman parte de los programas de estudio de los cursos de cálculo integral en las instituciones chilenas de educación superior.

Para comenzar con esta caracterización de textos, en el texto *Cálculo una variable* (Thomas, 2010) podemos apreciar que la presentación de este concepto es lineal, partiendo con la definición de integral como límite de sumas finitas para posteriormente hablar de integral definida. Además, el texto se enfoca en el estudio de diversas técnicas de integración y de aplicaciones de la integral en Geometría, Física y en la resolución de ecuaciones diferenciales (ver Figura 6).

Figura 6: Índice del texto Cálculo una variable (Thomas, 2010)

En particular, este texto presenta a la integral definida como un límite de sumas de Riemann:

> Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo cerrado $[a,b]$. Decimos que un número I es la **integral definida de** f **en** $[a,b]$, y que I es el límite de las sumas de Riemann $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ si se satisface la siguiente condición:

Dado cualquier $\epsilon > 0$ existe un número correspondiente $\delta > 0$ tal que para toda partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$ con $\|P\| < \delta$ y cualquier elección de c_k en $[x_{x-1}, x_k]$, tenemos que

$$|\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k - I < \epsilon|$$

(Thomas, 2010, p. 344)

En cuanto a la expresión $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, Thomas (2010) la presenta como un teorema, el cual demuestra (ver Figuras 7.a y 7.b).

Teorema fundamental parte 2 (El teorema de la evaluación)

Veamos ahora la segunda parte del teorema fundamental del cálculo. En ella se describe cómo evaluar integrales definidas sin usar el cálculo de límites de sumas de Riemann. En lugar de ello, encontramos una antiderivada y la evaluamos en los límites de integración superior e inferior.

TEOREMA 4 (Continuación) El teorema fundamental del cálculo, parte 2 Si f es continua en todos los puntos de $[a, b]$ y F es cualquier antiderivada de f en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Demostración La parte 1 del teorema fundamental nos dice que existe una antiderivada de f, a saber

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

En consecuencia, si F es *cualquier* antiderivada de f, entonces $F(x) = G(x) + C$ para alguna constante C en $a < x < b$ (de acuerdo con el corolario 2 del teorema del valor medio para derivadas, sección 4.2). Toda vez que tanto F como G son continuas en $[a, b]$, vemos que $F(x) = G(x) + C$ también se satisface cuando $x = a$ y $x = b$ tomando límites laterales (cuando $x \to a^+$ y $x \to b^-$).

Figura 7.a: Cálculo una variable (Thomas, 2010)

Evaluando $F(b) - F(a)$, tenemos

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= [G(b) + C] - [G(a) + C] \\ &= G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^a f(t)\,dt \\ &= \int_a^b f(t)\,dt - 0 \\ &= \int_a^b f(t)\,dt. \end{aligned}$$ ■

El teorema dice que para calcular la integral definida de f en $[a, b]$, todo lo que tenemos que hacer es:

1. Encontrar una antiderivada F de f, y
2. Calcular el número $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

La notación usual para $F(b) - F(a)$ es

$$F(x)\Big]_a^b \quad \text{o} \quad \Big[F(x)\Big]_a^b,$$

dependiendo de si F tiene uno o más términos.

EJEMPLO 5 Evaluación de integrales

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\Big]_0^{\pi} = \operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen} 0 = 0 - 0 = 0$

(b) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{0} \sec x \tan x\,dx = \sec x\Big]_{-\pi/4}^{0} = \sec 0 - \sec\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \sqrt{2}$

(c) $$\begin{aligned} \int_1^4 \left(\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{4}{x^2}\right) dx &= \left[x^{3/2} + \frac{4}{x}\right]_1^4 \\ &= \left[(4)^{3/2} + \frac{4}{4}\right] - \left[(1)^{3/2} + \frac{4}{1}\right] \\ &= [8 + 1] - [5] = 4. \end{aligned}$$

Figura 7.b: Cálculo una variable (Thomas, 2010)

En el texto *Cálculo trascendentes tempranas* (Stewart, 2008) la presentación de este concepto es lineal, partiendo con la definición del concepto de integral definida asociada la idea de “área bajo la curva”. Posteriormente define la integral definida para luego estudiar diversas aplicaciones en geometría y física. Finalmente, este texto se enfoca en el estudio de diversas técnicas de integración (ver Figura 8).

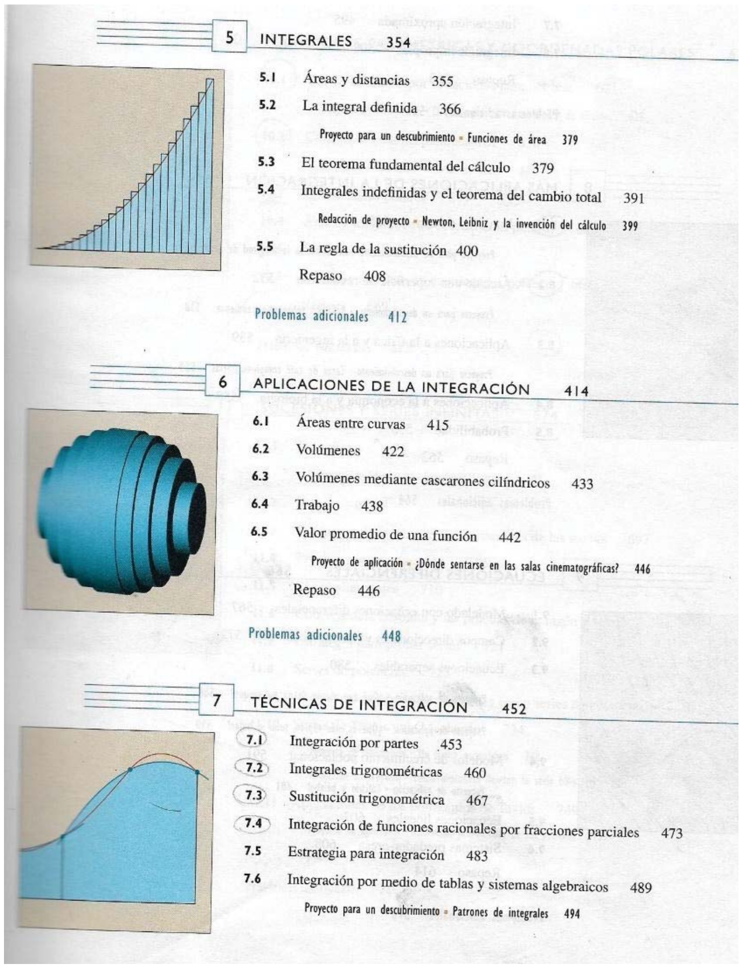
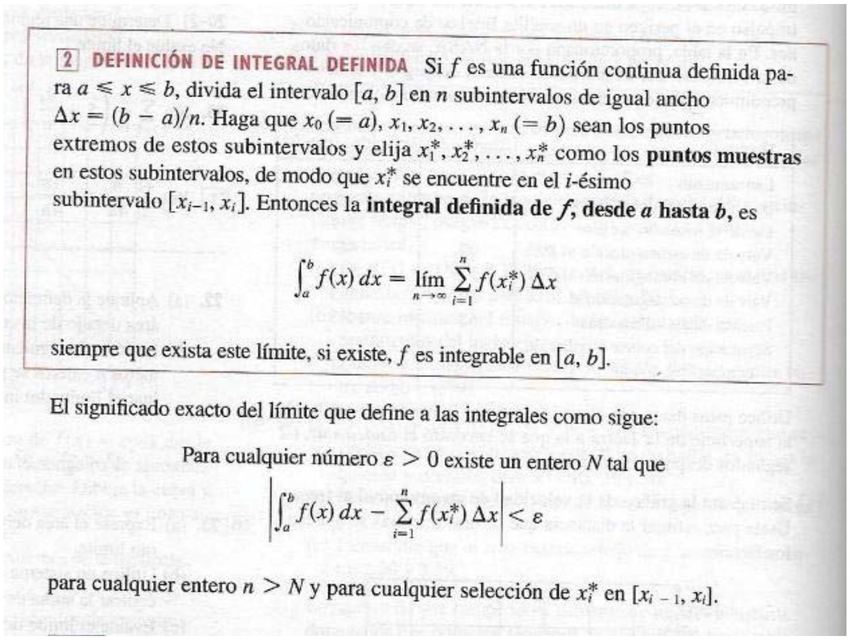


Figura 8: Cálculo trascendentes tempranas (Stewart, 2008)

En particular, este texto presenta a la integral definida como un límite de sumas de Riemann (ver Figura 9). En este caso, la partición del intervalo $[a, b]$ es regular:



2 DEFINICIÓN DE INTEGRAL DEFINIDA Si f es una función continua definida para $a \leqslant x \leqslant b$, divida el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual ancho $\Delta x = (b - a)/n$. Haga que $x_0\,(= a), x_1, x_2, \ldots, x_n\,(= b)$ sean los puntos extremos de estos subintervalos y elija $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ como los **puntos muestras** en estos subintervalos, de modo que x_i^* se encuentre en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la **integral definida de f, desde a hasta b,** es

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

siempre que exista este límite, si existe, f es integrable en $[a, b]$.

El significado exacto del límite que define a las integrales como sigue:

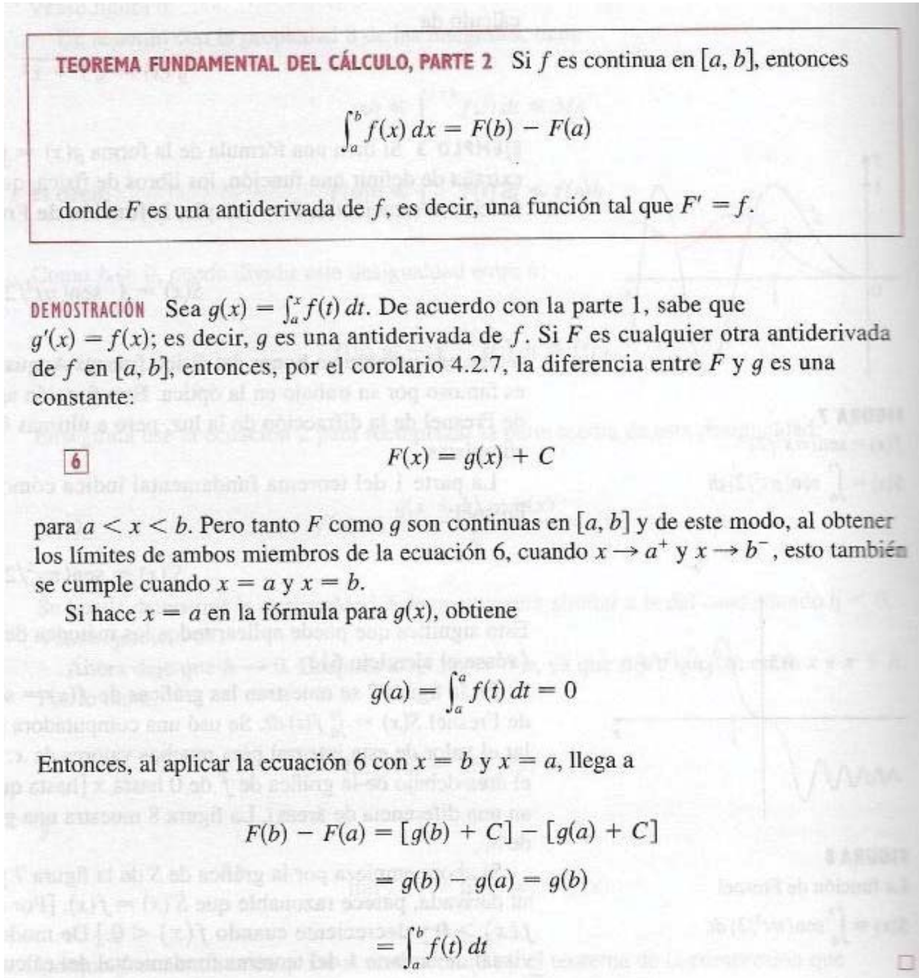
Para cualquier número $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x \right| < \varepsilon$$

para cualquier entero $n > N$ y para cualquier selección de x_i^* en $[x_{i-1}, x_i]$.

Figura 9: Cálculo trascendentes tempranas (Stewart, 2008)

En cuanto a la expresión $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, Stewart (2008) la presenta como un teorema, el cual se preocupa de demostrar (ver Figura 10).



TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO, PARTE 2 Si f es continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

donde F es una antiderivada de f, es decir, una función tal que $F' = f$.

DEMOSTRACIÓN Sea $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. De acuerdo con la parte 1, sabe que $g'(x) = f(x)$; es decir, g es una antiderivada de f. Si F es cualquier otra antiderivada de f en $[a, b]$, entonces, por el corolario 4.2.7, la diferencia entre F y g es una constante:

$$\boxed{6} \qquad F(x) = g(x) + C$$

para $a < x < b$. Pero tanto F como g son continuas en $[a, b]$ y de este modo, al obtener los límites de ambos miembros de la ecuación 6, cuando $x \to a^+$ y $x \to b^-$, esto también se cumple cuando $x = a$ y $x = b$.

Si hace $x = a$ en la fórmula para $g(x)$, obtiene

$$g(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$$

Entonces, al aplicar la ecuación 6 con $x = b$ y $x = a$, llega a

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= [g(b) + C] - [g(a) + C] \\ &= g(b) - g(a) = g(b) \\ &= \int_a^b f(t)\,dt \end{aligned}$$

Figura 10: Cálculo trascendentes tempranas (Stewart, 2008)

En el texto *Cálculo diferencial e integral* (Granville, 2009) la presentación de este concepto es lineal, partiendo con la definición del concepto de integral ligándola a la idea de antiderivada, llevando a este texto a la necesidad de explicar lo que es una constante de integración. Posteriormente el libro se enfoca en el estudio de diversas técnicas para el cálculo de antiderivadas. A continuación, se presenta el concepto de integral definida, junto con la idea de integral definida como límite de sumas finitas. Finalmente, se estudian algunas aplicaciones en Física y Matemática (ver Figuras 11.a y 11.b).

CALCULO INTEGRAL

CAPITULO XII

Integración de formas elementales ordinarias

CAPITULO XIII

Constante de integración

CAPITULO XIV

Integral definida

CAPITULO XV

La integración como suma

Figura 11.a: Cálculo diferencial e integral (Granville, 2009) planas; coordenadas polares, 319. Volúmenes de sólidos de revolución, 322. Longitud de un arco de curva, 330. Longitudes de arcos de curvas planas; coordenadas rectangulares, 331. Longitudes de arcos de curvas planas; coordenadas polares, 334. Areas de superficies de revolución, 337. Sólidos cuyas secciones transversales se conocen, 344.

CAPITULO XVI

Artificios de integración

Introducción, 352. Integración de fracciones racionales, 352. Integración por sustitución de una nueva variable; racionalización, 361. Diferenciales binomias, 365. Condiciones de racionalización de la diferencial binomia, 368. Transformación de las diferenciales trigonométricas, 369. Sustituciones diversas, 371.

CAPITULO XVII

Fórmulas de reducción. Uso de la tabla de integrales

Introducción, 374. Fórmulas de reducción para las diferenciales binomias, 374. Fórmulas de reducción para las diferenciales trigonométricas, 380. Empleo de una tabla de integrales, 384.

CAPITULO XVIII

Centros de gravedad. Presión de líquidos. Trabajo. Valor medio

Momento de superficie; centro de gravedad, 390. Centro de gravedad de un sólido de revolución, 394. Presión de liquidos, 396. Trabajo, 400. Valor medio de una función, 406.

Figura 11.b: Cálculo diferencial e integral (Granville, 2009)

En cuanto a la expresión $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, Granville (2009) la presenta como un teorema, el cual se preocupa de demostrar desde una perspectiva geométrica (ver Figura 12)

142. La integral definida. Del teorema del Artículo 141 se sigue que si la curva AB es el lugar geométrico de $y = \phi(x)$, entonces $du = y\,dx$, o sea,

$$(1) \qquad du = \phi(x)\,dx,$$

siendo du la diferencial del área entre la curva, el eje de las x y dos ordenadas. Integrando, obtenemos

$$u = \int \phi(x)dx.$$

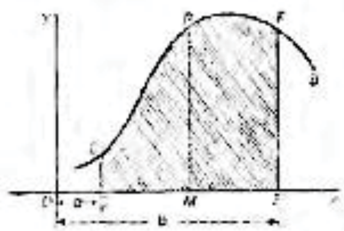


Fig. 107

Si designamos

$$\int \phi(x)dx \text{ por } f(x) + C,$$

resulta

$$(2) \qquad u = f(x) + C.$$

Para determinar C, observamos que $u = 0$ cuando $x = a$. Sustituyendo estos valores en (2) obtenemos

$$0 = f(a) + C,$$

de donde,

$$C = -f(a).$$

Luego (2) se convierte en

$$(3) \qquad u = f(x) - f(a).$$

El área $CEFD$ que se pide es el valor de u en (3) cuando $x = b$. Luego tenemos

$$(A) \qquad \text{Area } CEFD = f(b) - f(a).$$

Figura 12. Cálculo diferencial e integral (Granville, 2009)

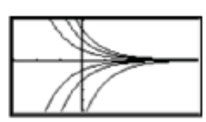
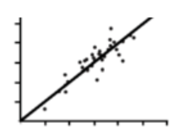
Se puede evidenciar que estos textos promueven argumentaciones, significados y procedimientos, asociados a la integral definida, que están más cercanas a la obra matemática. Con respecto a esto, Morales, Mena, Vera y Rivera (2012) señalan que existen estudios socioepistemológicos que muestran que lo importante para la construcción de la integral definida, dentro de situaciones de variación, es entender la noción de acumulación (Cordero, 2003a), en donde por medio de la práctica de predecir[6] emerge una matemática funcional, vía un pensamiento variacional. Este hecho se enmarca en la llamada *socioepistemología del cálculo y del análisis*[7] (ver

[6] Entenderemos por predicción a “la necesidad de conocer un estado futuro con base en el presente y las variaciones de su pasado” (Cantoral, 2013, p.292).

[7] La socioepistemología del cálculo y el análisis da cuenta de cuatro situaciones que formulan, individual y también conjuntamente, una epistemología del cálculo, en donde la

Tabla 2), la cual muestra que la noción de acumulación es una noción que permite, en situaciones de variación, construir el concepto de integral definida a partir de un procedimiento consistente en la comparación local de dos estados, en donde el instrumento útil al humano son las cantidades de variación continua y cuya argumentación es la predicción.

Tabla 2
Socioepistemología del Cálculo y el Análisis (Cordero, 2003b; Del Valle, 2015).

	Situaciones			
Construcción en las prácticas	Variación	Transformación	Aproximación	Selección
Significaciones	Flujo Movimiento Acumulación Estado Permanente	Patrones de comportamiento gráficos y analíticos	Límite Derivación Integración Convergencia	Patrón de adaptación
Procedimientos	Comparación de dos estados $f(x+h)-f(x)=\alpha h$ $\alpha = f'(x)$	Variación de parámetros $y = Af(Bx+C)+D$	Operaciones lógico formales (cociente) $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$	Distinción de cualidades $\nabla f(x) - \lambda\nabla g(x) = 0$
Instrumento útil al humano	Cantidad de variación continua	Instrucción que organiza comportamientos	Formas analíticas	Lo estable
Argumentación	Predicción $E_0 + variación = E_f$	Comportamiento tendencial 	Analiticidad de las funciones $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \cdots$	Optimización 

Morales et al (2012) señalan que la situación de variación presentada en la segunda columna de la Tabla 1 no está presente en el dME (lo cual además

cuarta columna caracteriza la manera usual que tiene el dME de abordar las temáticas relacionadas al cálculo, y en particular, del cálculo integral. Las significaciones corresponden a los elementos que le dan sentido a la situación específica, los procedimientos se entienden como una ejecución fundamental derivada de las significaciones y el instrumento útil al humano se entiende como la experiencia sobre la cual se trabaja.

ha sido evidenciado de una manera sintetizada en esta sección). De esta manera, presenciamos una problemática que apunta a que el dME opaca los $\mathcal{U}(ac)$ y excluye a los actores del sistema didáctico de la construcción del concepto de integral definida, al imponer argumentaciones, significados y procedimientos.

Antes de establecer los objetivos de esta investigación, y de este modo acotar y abordar de mejor manera esta problemática, es necesario explicar en qué consiste la noción de acumulación, así como el rol que dicha noción juega en la construcción de la integral definida. Esto, lo realizaremos en la siguiente sección.

1.2.2 La noción de acumulación

Cordero (2003a) realizó un estudio epistemológico del concepto integral, donde encontró un patrón de construcción de la teoría de integración, dada por la expresión $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, la cual llamó acumulación, donde la diferencia $F(x + dx) - F(x)$ y las condiciones de una función derivada $F^{`}$ juegan un papel definitivo en la constitución del patrón. La idea de patrón que consideramos en esta investigación, es acorde a lo que señala Cordero (2005):

> La manera como decidimos concebir a los patrones de construcción en este trabajo es que el patrón, de algún modo, representa una idea que prevalece independientemente del contexto de la situación y será considerado en la construcción, cuando el grupo humano logra desarrollar el uso de su conocimiento. (p. 271)

Pero es en el marco del estado de las situaciones de variación en donde Cordero (2003a) encontró que la resta $F(b) - F(a)$ otorga una significación de la integral ligado al contexto de cantidades que fluyen. Dicha resta es la representación de “la noción de acumulación en dos categorías: estática, en tanto que es “algo que se concentra” y se expresa como “$E_f - E_0 = A$” y dinámica en tanto que es “algo que se está agregando a una cantidad” y se expresa como “$E_f = E_0 + A$”. (Cordero, 2003a, p.84).

En base a la expresión $\int_a^b F^{'}(x)dx = F(b) - F(a)$, Cordero (2003a) reinterpretó las categorías anteriores como

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a) \text{ y } F(b) = F(a) + \int_a^b F'(x)dx$$

Que denominó *acumulación* y *valor acumulado*, respectivamente, donde "$\int_a^b F'(x)dx$ "es el algo" que se concentra y "el algo" que se está agregando" (Cordero, 2003a, p. 85)

La noción de acumulación permite "representar el cambio total del sistema sin describir las variaciones progresivas de los elementos que están interrelacionados y es configurado por la integral definida $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$" (Cordero, 2003a, p. 84). Esto lleva a considerar, a la acumulación y al valor acumulado, como resultado de un proceso que cumple con las siguientes fases (ver Cuadro 1), donde en cada una de ellas hay una encapsulación que subyace a la integral definida, la cual Cordero (2003a) llamó *toma del elemento diferencial.*

$F(t+dt) - F(t) = F'(t)dt$ ↓ $\sum F(t+dt) - F(t) = \sum F'(t)dt$ ↓ $F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)dt$ (Acumulación)	$F(t+dt) = F(t) + F'(t)dt$ ↓ $\sum F(t+dt) = \sum F(t) + F'(t)dt$ ↓ $F(b) = F(a) + \int_a^b F'(t)dt$ (Valor acumulado)

Cuadro 1: Fases del proceso de acumulación (Cordero, 2003a)

Al representar el cambio total de la situación de variación, la noción de acumulación permite describir "el cómo varía", permitiendo realizar una predicción dentro de la situación en cuestión.

Con respecto a la toma del elemento diferencial, Cordero (2003a) señala:

Ciertamente, la toma del elemento diferencial guarda un carácter algorítmico en el discurso matemático escolar, pero el aspecto significativo para la integral está en la acción que conlleva a la *"toma"*; es decir, el reconocimiento local de la situación de cambio y variación para reconocer el cambio total de la situación considerada en un sistema, al margen de cualquier definición de integración:

$$F(t+dt)-F(t) \rightarrow F(b)-F(a)$$

(p.85)

Para explicar mejor la idea que hay detrás de la noción de acumulación, demos algunos ejemplos de situaciones de variación discreta. Supongamos que una persona inicialmente tiene $\$1.000$ y luego de un mes, logra ahorrar dinero hasta tener $\$35.000$. La cantidad de dinero que ahorró, en ese transcurso de tiempo, fue de $\$35.000 - \$1.000 = \$34.000$. En otras palabras, la cantidad de dinero que dicha persona logró *acumular* fue de $\$34.000$. Sin embargo, no sabemos cuánto dinero ahorró cada día (si es que lo hizo), pero tampoco resultó de interés para determinar la cantidad de dinero ahorrada.

Otro ejemplo, lo podemos encontrar en el análisis de la siguiente sucesión finita:

$$1,3,5,7,11,15,24,29,31,35,44,50$$

La construcción de esta sucesión se obtuvo a partir del siguiente proceso de variación: a 1 se le suma 2 para llegar a 3, a 3 se le suma dos para llegar a 5, a 5 se le suma 2 para llegar a 7, a 7 se le suma 4 para llegar a 11, y así sucesivamente. A cada elemento se le suma una cierta diferencia d_i para llegar al siguiente número. De este modo, 50, el último valor de la sucesión, se calcula iniciando en 1 y bajo el proceso $\sum d_i$

$$1+\sum d_i = 50$$

Es decir, en este caso $\sum d_i$ representa el "algo" que se le está agregando a 1 para obtener 50. Si en este fenómeno de variación discreta, nos preguntásemos por la acumulación total, al haber iniciado en 1 y haber acabado en 50, se tendría como respuesta

$$\sum d_i = 50 - 1$$

Es decir, en este caso $\sum \; d_i$ representa el “algo” que se concentra.

De manera general, supongamos que tenemos una sucesión arbitraria, que comienza en a y que a través de variaciones progresivas termina en b. Para llegar de a a b, procedemos como sigue: El segundo término de la sucesión, será $a + d_1$; el tercer término de la sucesión, será $a + d_1 + d_2$ y así sucesivamente, hasta llegar al último número, $b = a + \sum \; d_n$. De esta forma, podemos establecer el valor acumulado y la acumulación, respectivamente, como:

$$a + \sum d_n = b$$

$$\sum d_n = b - a$$

1.3 Objetivos de investigación de la primera parte de investigación

En términos generales, la socioepistemología señala que el dME opaca los $\mathcal{U}(CM)$ propios de escenarios no escolares en los que la gente se desenvuelve, ya que su prioridad está en cuánto sabe un estudiante, pero no en cómo usa su conocimiento matemático (Mendoza y Cordero, 2018). En el caso particular de esta investigación, la problemática está relacionada con el hecho de que el dME opaca los $\mathcal{U}(ac)$ y excluye a los actores del sistema didáctico de la construcción de la integral definida, dado el carácter hegemónico del dME, actuando como una barrera que no permite lograr una relación recíproca y horizontal[8] entre la matemática escolar y la matemática

[8] En Mendoza y Cordero (2018) se señala que “la relación recíproca es el indicador de que la matemática escolar y la matemática de la vida deben afectarse mutuamente, mientras que la relación horizontal es el indicador de que deben conservar el mismo estatus y valor

de la vida.

Para confrontar la problemática mencionada en el párrafo anterior, es necesario formular marcos de referencia que permitan la $Res(\mathcal{U}(ac))$ en situaciones específicas de variación. Dado que la $\zeta(Mod)$ se enfoca en dichas resignificaciones, consideramos que es una categoría que resulta pertinente para el abordaje de esta problemática. Sin embargo, no es la intención de esta investigación abordar esta problemática en su totalidad, debido a la dificultad que esto significa y al tiempo que ello requiere, pero sí desarrollar la $\zeta(Mod)$ como una $Res(\mathcal{U}(ac))$ en algunas situaciones específicas de variación, con la finalidad de dar pautas para futuras intervenciones didácticas que permitan contribuir al abordaje de esta problemática.

De esta forma, los objetivos de esta primera parte de investigación serán los siguientes:

Objetivo general

- Desarrollar la $\zeta(Mod)$ como una $Res(\mathcal{U}(ac))$ en dos situaciones específicas de variación.

Objetivo específico

- Desarrollar la $\zeta(Mod)$ como una $Res(\mathcal{U}(ac))$ en dos situaciones de variación específicas, denominadas *cálculo teórico de la constante térmica* y e*l cálculo teórico de los excedentes de los consumidores*, propias de los dominios de conocimiento de la Fenología[9] y la Economía, respectivamente (Ver Figura 13).

Cabe señalar que cuando se habla de *desarrollar la $\zeta(Mod)$ como una $Res(\mathcal{U}(ac))$*, significa analizar $\mathcal{U}(ac)$ en las situaciones específicas de variación anteriormente mencionadas, junto con los significaciones, procedimientos, instrumento y argumentación de cada una de estas situaciones.

---

epistemológico" (p.44)

[9] Según la Real Academia de la Lengua Española, la Fenología es entendida como el "estudio de los fenómenos biológicos en relación con el clima, particularmente en los cambios estacionales".

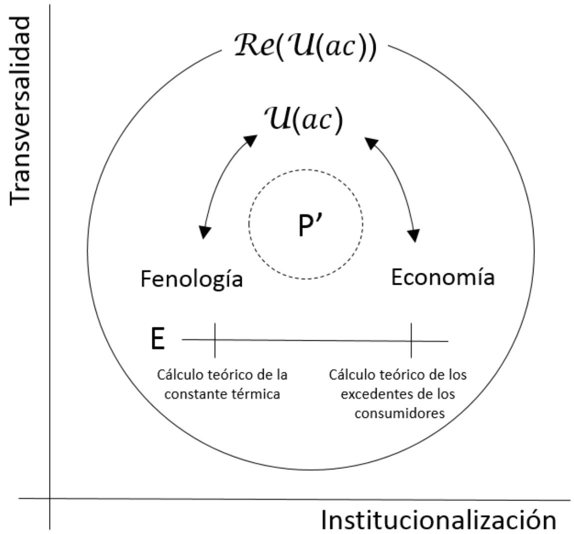


Figura 13: Síntesis del objetivo específico de investigación. Fuente: elaboración propia.

1.4 Aspectos metodológicos

Por medio de una técnica de análisis documental[10] (Rojas, 2011), se analizarán los $\mathcal{U}(ac)$ y las significaciones, procedimientos, instrumento y argumentación en las dos situaciones de variación continua denominadas *cálculo teórico de la constante térmica* y *cálculo teórico de los excedentes de los consumidores*, propias de los dominios de la Fenología y la Economía, respectivamente (Ver Capítulo 2).

Nuestra manera de analizar los $\mathcal{U}(ac)$ en estas situaciones específicas de variación, será acorde al análisis de $\mathcal{U}(CM)$ realizado en distintos trabajos socioepistemológicos (e.g., Del Valle, 2015; Morales y Cordero, 2014; Mendoza, Cordero, Solís y Gómez, 2018), los cuales analizan los $\mathcal{U}(CM)$ por medio de un debate entre funcionamiento y forma. Además, en cada una de estas situaciones se dará cuenta de la significación, el procedimiento, el instrumento útil al humano y la argumentación, las cuales en conjunto estructuran una epistemología de $\mathcal{U}(ac)$.

[10] Esta investigación entenderá al análisis documental como un "proceso de "inferencia" donde la información es estudiada, interpretada y sintetizada minuciosamente para dar lugar a una formulación que subyace al documento original" (Cordero, Del Valle y Morales, 2019, p.193)

Capítulo 2.

Desarrollo de la $\zeta(Mod)$ como una $Res(U(CM))$

"La categoría de modelación es conocimiento matemático expresado en un proceso que trasciende y se resignifica; que valora los elementos en el entorno del objeto que le dan sentido." (Mendoza y Cordero, 2018, p. 41)

2.1 Desarrollo de la $\zeta(Mod)$ como una $Res(\mathcal{U}(ac))$ en Fenología y Economía.

2.1.1 $Res(\mathcal{U}(ac))$ en Fenología: El cálculo teórico de la constante térmica.

Según Heuveldop, Pardo, Quirós y Espinoza (1986), “la Fenología trata del estudio de los fenómenos o eventos biológicos periódicos en relación con los factores ambientales, principalmente las variaciones estacionales de las condiciones climáticas” (p.171). Es sabido que la temperatura tiene incidencia en el desarrollo de muchos organismos. Parra-Coronado, Fischer y Chaves-Cordoba (2015) indican que “la temperatura es una de las principales fuerzas impulsoras para el crecimiento y el desarrollo de los cultivos y varios estados fenológicos se manifiestan a través de su desarrollo” (p.164). Para el caso específico de insectos y ácaros, el trabajo de Barrientos, Apablaza, Norero y Estay (1998) destaca la sensibilidad de su desarrollo respecto a la temperatura en la que habita y su consecuente dependencia.

Al respecto, se hace necesario una unidad de medida que sea capaz de relacionar el desarrollo temporal de los ácaros y la temperatura en la cual ellos habitan, esto permitiría generar estudios con mayor precisión sobre los ciclos de vida de los animales. Tal unidad es llamada grados-días (Zalom, Godell, Wilson, Barnett y Bentley 1983), descrita como una unidad combinada de tiempo y temperatura, utilizada para medir el desarrollo o progreso de un organismo desde un punto a otro en su ciclo de vida (Huincahue, 2011). Al número de grados–días que han de ser acumulados para que ocurra un determinado evento fenológico, se le denomina constante térmica.

El concepto de grados-días ha sido ampliamente utilizado en la agricultura, especialmente para cuantificar y predecir eventos fenológicos. Según Rodríguez, Cotes y Cure (2012), este concepto se ha utilizado en el análisis fenológico aplicado a diferentes tipos de cultivos, tanto en zonas templadas como en zonas tropicales, ya sea para insectos o ácaros. Urra y Apablaza (2005) señalan que, en el caso del estudio de insectos, “el conocimiento de los grados-días provee una valiosa herramienta para el manejo de plagas, tanto para predecir infestaciones, programar medidas de manejo o realizar monitoreo" (p.19). Sin embargo, no es una regla que se cumple para todos los ciclos de vida. Un caso de interés es el del *Brevipalpus chilensis* (*B. chilensis*), ya que es un ácaro sensible a débiles variaciones de temperaturas (Huincahue, 2011), por lo tanto, es de relevancia la precisión del cálculo de grados - días.

En Castillo y Santibáñez (1987), se encuentra una manera teórica de calcular la constante térmica:

$$L = \int_{t_0}^{t_f} (T - T_h)\, dt$$

en donde T es la temperatura media; T_h es la temperatura umbral inferior; t_0 es la fecha de inicio de la etapa de desarrollo y t_f es la fecha de término de la etapa de desarrollo. En este caso, podemos establecer que $(T - T_h)dt$ representa la cantidad de grados-días acumulados en un determinado intervalo de tiempo $[t, t + dt]$, con $T - T_h = 0$ si $T < T_h$. La temperatura umbral inferior es la temperatura en la cual el desarrollo del organismo en cuestión se detiene por el frío. A medida que la temperatura aumenta por encima de la temperatura umbral, el desarrollo se acelera hasta alcanzar una temperatura óptima, la cual se entiende como aquella en la cual el desarrollo ocurre lo más rápidamente posible. Este fenómeno es descrito en la Figura 14.

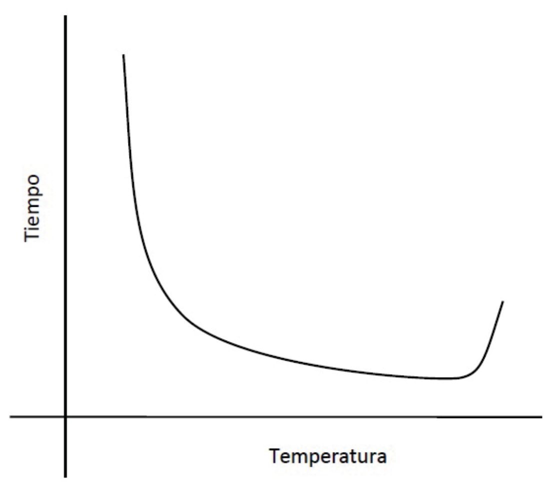


Figura 14. Curva de temperatura versus tiempo de un organismo que depende de la temperatura (Zalom et al., 1983).

A partir de lo analizado en esta situación específica de variación, que denominamos *cálculo teórico de la constante térmica*, hemos logrado dar cuenta de una $Res(\mathcal{U}(ac))$ al inferir tanto el $\mathcal{U}(ac)$ como su respectiva epistemología de $\mathcal{U}(ac)$.

En cuanto al $\mathcal{U}(ac)$, su funcionamiento es para determinar la cantidad de grados-días acumulados en un cierto intervalo de tiempo y su forma es por medio de la resta $A(t+dt)-A(t)$, donde $A(t)$ corresponde a los grados-días acumulados en el tiempo t. Con respecto a la epistemología de $\mathcal{U}(ac)$, esta se conforma por las significaciones, procedimientos, instrumentos y argumentación, basadas en la segunda columna de la Tabla 1: la significación asociada es la de constante térmica, el procedimiento corresponde a la comparación de dos estados: $A(t+dt)-A(t)=(T-T_h)dt$, donde $T-T_h=0$ si $T<T_h$, comparación que es posible de realizar sólo si T varía de forma continua con respecto al tiempo (instrumento útil al humano), lo cual ocurre en esta situación, permitiendo predecir, como argumentación de esta situación, cuándo ocurrirá un determinado evento fenológico. En la Tabla 3 se resume la epistemología de $\mathcal{U}(ac)$ obtenida a partir de lo analizado en esta situación específica.

Tabla 3

Epistemología de $\mathcal{U}(ac)$ en la situación específica de variación en Fenología.

	Situación Núcleo	Situación específica
Construcción de lo matemático	Variación	Cálculo teórico de la constante térmica
Significaciones	Flujo Movimiento Acumulación Estado Permanente	Constante térmica
Procedimientos	Comparación de dos estados $f(x+h)-f(x)=\alpha h$ $\alpha = f^{\prime}(x)$	Comparación de dos estados $A(t+dt)-A(t)=$ $(T-T_h)dt$ donde $T-T_h=0$ si $T<T_h$.
Instrumento útil al humano	Cantidad de variación continua	Cantidad de variación continua
Argumentación	Predicción $E_0 + variación = E_f$	Predecir cuando ocurrirá un determinado evento fenológico

En base a esta $Res(\mathcal{U}(ac))$, es posible otorgar algunas directrices para el diseño de situaciones escolares de socialización que permitan construir el concepto de integral definida, como finalidad didáctica. En primer lugar, es necesario señalar la imposibilidad de llevar a cabo, en la práctica, el cálculo teórico de esta constante; sin embargo, es posible encontrar investigaciones tales como las realizadas por Gómez (2003); Rodríguez, Cotes y Cure (2012), entre otros, quienes realizan distintas estimaciones de esta constante. A pesar de ser estimaciones, se destaca que de todas formas es posible encontrar un $\mathcal{U}(ac)$ en el cálculo de dicha estimación. Como ejemplo, tenemos lo realizado por Huincahue (2011), quien crea un modelo matemático que permite estimar el valor de la constante térmica del

Brevipalpus chilensis. A partir de un análisis de este ejemplo en particular, el cual será realizado en la siguiente sección, se dará a conocer el $\mathcal{U}(ac)$, así como la significación, el procedimiento y la argumentación. Todo esto, permitirá otorgar algunas directrices para diseñar situaciones escolares que tengan como objetivo una construcción del concepto de integral definida dentro de situaciones de variación.

2.1.1.2 La noción de acumulación y el caso del cálculo de la constante térmica del *B. chilensis*.

El *B. chilensis*, forma parte de una plaga endémica de importancia cuarentenaria, que representa un problema económico en vid de mesa y vinífera, kiwi y cítricos. El daño es causado por su condición cuarentenaria en fruta destinada a exportación. Cuando atacan a los brotes, hojas y sarmientos de la planta, afecta seriamente la capacidad fotosintética de ella, llegando a disminuir hasta en un 40% el rendimiento (Vargas y Olivares, 2007). El manejo sustentable de las plagas, debe estar basado en el conocimiento biológico de ellas y de su interacción con el cultivo, es decir, el manejo integrado de plagas. Bajo esta perspectiva, la dinámica de una población constituye una herramienta que permite predecir el desarrollo de una especie.

Descripción morfológica y ciclo biológico del B. chilensis

La hembra adulta tiene un cuerpo de forma ovalada y muy aplanada dorsoventralmente, de tamaño cercano a 0,5 mm. de longitud. Es de color rojo oscuro con manchas negras. Los huevos son ovoides, brillantes y de color rojo. El macho es de menor tamaño que la hembra y su cuerpo es algo más triangular.

El ciclo de *B. chilensis* incluye los estados de huevo, larva, protoninfa, deutoninfa y adulto (ver Figura 15). La duración del desarrollo depende de manera directa con la temperatura ambiente. Además, en condiciones de laboratorio a una temperatura constante de 25◦C completa su desarrollo en 19 días. En condiciones de laboratorio, la mayor mortalidad de *B. chilensis* se expresa al estado de larvas, alcanzando una superficie mayor a 45 días desde huevo a adulto.

En los cítricos la *B. chilensis* se encuentra preferentemente sobre la superficie del fruto. Cuando existe ausencia de frutos, permanece en las ramillas de los árboles. En general es un ácaro de movimientos lentos. Del huevo eclosiona una larva cuya característica más notoria es la presencia de solo tres pares de patas, luego le suceden dos estados ninfales y posteriormente los adultos.

La densidad del *B. chilensis* aumenta en los frutos junto con el desarrollo de estos, llegando a niveles máximos durante el periodo de cosecha. En cítricos, en la región de Valparaíso se ha observado la presencia de todos los estados de desarrollos del ácaro durante el año, con una moderada disminución de la densidad de huevos en periodos de invierno, pero sin dejar de reproducirse.

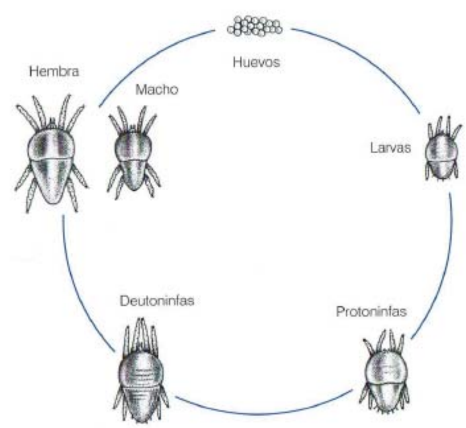


Figura 15. Ciclo biológico del *B. chilensis*

Desarrollo biológico del B. chilensis. Constante térmica.

A mediados del siglo XVIII, ya se sospechaba que el crecimiento y desarrollo de algunos organismos dependían de la temperatura, lo que actualmente es un referente para la agricultura moderna. Existen muchos ejemplos, y bastante documentados, en donde se ejemplifica el desarrollo de organismos a altas temperaturas y bajas temperaturas. El crecimiento de los organismos no siempre depende de la temperatura, esto ocurre principalmente en plantas y animales invertebrados. Nuestro principal ejemplo de un organismo que es dependiente de la temperatura para poder llevar a cabo su desarrollo, es el *B. chilensis*.

Para el caso de organismos cuyo desarrollo depende de la temperatura, si observamos la curva entre temperatura versus tasa de desarrollo (ver Figura 16) podemos observar que existe una relación entre estas variables, la cual indica que si la temperatura aumenta, entonces aumenta la tasa de desarrollo hasta una temperatura óptima. Posteriormente, al seguir aumentando la temperatura, esta comienza a afectar negativamente al desarrollo del organismo, cayendo abruptamente a cero. Note que en la Figura 16 el umbral de desarrollo inferior está antes de que comience la curva, lo que puede significar que no existe una temperatura necesaria para que el organismo se desarrolle, lo cual no significa necesariamente que el organismo muera. Sin embargo, estos organismos no se pueden mantener por mucho tiempo vivos a temperaturas bajo su desarrollo de crecimiento.

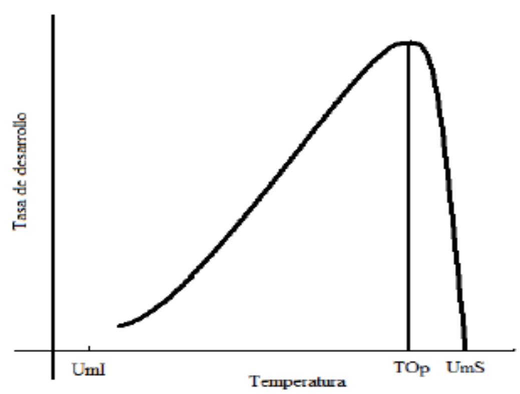


Figura 16. Curva de temperatura versus tiempo de desarrollo de un organismo que depende de la temperatura (Huincahue, 2011).

Para calcular la constante térmica del *B. chilensis,* Huincahue (2011) consideró una constante térmica por cada estado del insecto, por lo que para determinar la constante térmica del estado adulto, bastará sumar todas las constantes térmicas de cada una de las etapas, desde el estado huevo hasta el estado adulto. Entonces, sin pérdida de generalidad, se presentará dicho cálculo sólo para la primera etapa, E_1, de su desarrollo.

Para poder llevar a cabo la estimación de la constante térmica, Huincahue (2011) señala que es necesario conocer la temperatura base (dato que puede otorgarlo un especialista en el área), la temperatura promedio histórica de la localidad en el período en el cual se pretende hacer dicha estimación y finalmente, información de laboratorio que permita conocer la cantidad de días $\alpha_i, i = 1,\ldots,s$ necesarios para alcanzar el estado E_1, si la temperatura promedio histórica es $t_i, i = 1,\ldots,s$ (ver Tabla 4).

Tabla 4

Cantidad de días $\alpha_i, i = 1,\ldots,s$ *necesarios para alcanzar el estado* E_1*, si la temperatura promedio histórica es* $t_i, i = 1,\ldots,s$ (Huincahue, 2011)

$T^{\text{º}}C$	E_1
t_1	α_1
t_2	α_2
$\vdots$	$\vdots$
t_{s-1}	α_{s-1}
t_s	α_s

Para describir la acumulación de grados-días por cada hora, Huincahue (2011) describe *la acumulación de grados-días desde la hora* $i-1$ *hasta la hora* i *como*

$$\frac{máx\{(g_{i1} - T_b),0\}}{24}$$

con $i = 1,\ldots,24$, y g_{ij} definido como la temperatura promedio a la hora i el día j, considerando los días (24 horas) como la unidad de medida. Dicho de otro modo, se tiene que

$$A(i) - A(i-1) = \frac{máx\{(g_{i1} - T_b),0\}}{24}$$

donde $A(t)$ corresponde a la acumulación de grados-días en el tiempo t, en horas. Entonces, la acumulación de grados días en el día 1 es

$$K_1 = \sum_{i=1}^{24} \frac{máx\{(g_{i1} - T_b),0\}}{24}$$

O bien,

$$K_1 = \sum_{i=1}^{24} (A(i) - A(i-1))$$

Cabe señalar que cuando la temperatura g_{i1} sea menor a la temperatura base, se dirá que en esa hora no se acumularon grados-días. Para conocer cuantos días se deben sumar, Huincahue (2011) utiliza los datos de la Tabla 3. Si por ejemplo, la temperatura promedio histórica es $T_h = t_j$, para algún $j = 1, \dots, s$, entonces por la tabla de datos a $t_j$le corresponden α_j días para que complete el desarrollo de la etapa E_1. Entonces los grados-días utilizados para el desarrollo de la etapa E_1 son:

$$K = \sum_{j=1}^{n=\alpha_j} K_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{24} \frac{máx\{(g_{ij} - T_b),0\}}{24}$$

En esta situación de estimación de la constante térmica del *B. chilensis*, hemos logrado identificar el $\mathcal{U}(ac)$ a través de un funcionamiento y una forma. El funcionamiento de la acumulación es para determinar la cantidad de grados-días acumulados desde la hora $i-1$ hasta la hora i, con $i = 1, \dots, 24$ y la forma de la acumulación es por medio de la expresión $\frac{máx\{(g_{i1} - T_b),0\}}{24}$. La significación asociada es la de constante térmica del *B. chilensis*, el procedimiento viene dado por la comparación de estados: $A(i) - A(i-1) = \frac{máx\{(g_{i1} - T_b),0\}}{24}$ y la argumentación viene dada por la necesidad de predecir cuando el *B. chilensis* completará su desarrollo para determinada etapa de crecimiento (ver Tabla 5).

Tabla 5

Significaciones, procedimientos y argumentación en la estimación de la constante térmica del B. chilensis.

	Estimación constante térmica del *B. chilensis*
Significaciones	Constante térmica del *B. chilensis*
Procedimientos	Comparación de dos estados $$A(i) - A(i-1) = \frac{máx\{(g_{i1} - T_b),0\}}{24}$$ donde $A(t)$ corresponde a la acumulación de grados-días en el tiempo t, en horas.
Argumentación	Predecir cuando el *B. chilensis* completará su desarrollo para determinada etapa de crecimiento.

2.1.2 $Res(\mathcal{U}(ac))$ en Economía: El cálculo teórico de los Excedentes de los Consumidores.

En Krugman y Wells (2007) se define el excedente individual de un consumidor como la ganancia neta obtenida por este al comprar un cierto producto. Dicha ganancia, corresponde a la diferencia entre lo que dicho consumidor estaba dispuesto a pagar y el precio que realmente desembolsó por dicho producto. A partir de esto, estos autores señalan que los Excedente de los Consumidores (EC) corresponden a la suma de todos los excedentes individuales.

Los EC representan la ganancia monetaria de aquellos consumidores que son capaces de comprar un producto a un precio mayor al de mercado.

Según Escribano (2001), el EC mide “el bienestar que se queda en manos del consumidor (excedente) por pagar un precio uniforme por todas las unidades consumidas, cuando en realidad el consumidor estaría dispuesto a pagar precios más altos por las primeras unidades consumidas” (p.16). Para Mankiw (2004), el EC mide el beneficio de los compradores de un determinado producto tal como ellos lo perciben, siendo estos excedentes “una buena medida del bienestar económico si los responsables de la política económica quieren respetar las preferencias de los compradores” (Mankiw, 2004, p.90). La medición de los EC es un elemento clave para el análisis costo–beneficio, transformándose en una técnica formal que permite ponderar los beneficios de un determinado proyecto público frente a sus costos. Según Frank (2009), los EC pueden ser utilizados para medir el impacto de políticas públicas.

En Economía, la ley de demanda establece que la cantidad demandada de un bien disminuye cuando su precio sube (Mankiw, 2004). Esto implica que la curva de demanda debe ser decreciente. Por otro lado, la ley de oferta establece que la cantidad ofrecida de un bien aumenta cuando su precio sube (Mankiw, 2004). Esto implica que la curva de oferta debe ser creciente. En la Figura 17, podemos notar que la franja vertical tiene área $p\Delta q$, siendo interpretado como la cantidad total de dinero que los consumidores gastarán comprando Δq unidades del producto cuando el precio unitario es $p = p(q)$. Si el punto de equilibrio (punto en donde la oferta coincide con la demanda) es (p_0, q_0), se tiene que dichos consumidores solo gastan $p_0\Delta q$ por estas Δq unidades. Por lo tanto, se benefician en la cantidad $B_C(q + \Delta q) - B_C(q) = B_C(\Delta q) \approx p\Delta q - p_0\Delta q = (p - p_0)\Delta q$, donde $B_C(q)$ representa la suma de los excedentes individuales de todos los consumidores dispuestos a pagar un precio mayor a p_0, cuando la demanda es de q unidades. Sumando las áreas de todos estos rectángulos desde $q = 0$ hasta $q = q_0$, se tiene que el EC será:

$$EC = \int_0^{q_0} (p - p_0)dq$$

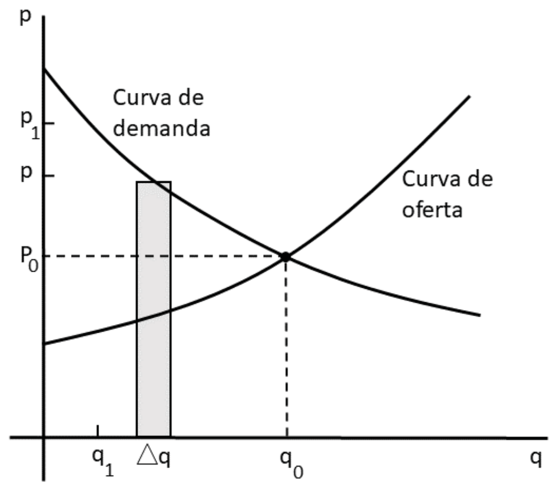


Figura 17: Representación de la curva de oferta y demanda de un determinado producto.

A partir de lo analizado en esta situación específica de variación, que denominamos *cálculo teórico de los excedentes de los consumidores*, se ha logrado dar cuenta de una $Res(\mathcal{U}(ac))$ al inferir tanto el $\mathcal{U}(ac)$ como su respectiva epistemología de $\mathcal{U}(ac)$.

En cuanto al $\mathcal{U}(ac)$, su funcionamiento es para estimar el beneficio, por la compra de las Δq unidades comprendidas en el intervalo $[q, q + \Delta q]$, de aquellos consumidores dispuestos a pagar un precio mayor al de mercado y la forma de la acumulación, es por medio de la diferencia entre $B_C(q + \Delta q)$ y $B_C(q)$. Con respecto a la epistemología de $\mathcal{U}(ac)$, esta se conforma por las significaciones, procedimientos, instrumentos y argumentación, basadas en la segunda columna de la Tabla 1: la significación asociada es la de EC, el procedimiento corresponde a la comparación de dos estados: $B_C(x + dx) - B_C(x) = (p(x) - p_0)dx$, comparación que es posible de realizar sólo si $B_C(x)$ varía de forma continua (instrumento útil al humano), lo cual ocurre en esta situación, permitiendo predecir cuál será el excedente de aquellos consumidores que están dispuestos a pagar, por la compra de cierto producto, un precio mayor al que se fije en el mercado. En la Tabla 6 se resume la epistemología de $\mathcal{U}(ac)$ obtenida a partir de lo analizado en esta situación específica.

Tabla 6

Epistemología de $\mathcal{U}(ac)$ en la situación específica de variación en Economía.

	Situación Núcleo	Situación específica
Construcción de lo matemático	Variación	Cálculo teórico de los Excedentes de los Consumidores
Significaciones	Flujo Movimiento Acumulación Estado Permanente	Excedentes de los consumidores
Procedimientos	Comparación de dos estados $f(x+h)-f(x)=\alpha h$ $\alpha = f'(x)$	Comparación de dos estados $B_C(x+dx)-B_C(x)=(p(x)-p_0)dx$
Instrumento útil al humano	Cantidad de variación continua	Cantidad de variación continua
Argumentación	Predicción $E_0 + variación = E_f$	Predecir el beneficio total de aquellos consumidores dispuestos a pagar un precio mayor al de mercado.

Capítulo 3.

Surgimiento de la segunda parte de investigación

"Es preciso rescatar argumentaciones que sean intrínsecas a la actividad humana, a las prácticas sociales, por ejemplo, la graficación o predicción de fenómenos situados." (Cordero et al, 2015, p.84)

3.1 Clasificar, medir y aproximar: Prácticas asociadas a la construcción de la integral definida.

Desde una postura socioepistemológica, el conocimiento matemático es construido por los seres humanos por medio de una gran cantidad de prácticas, normadas por muy pocas prácticas sociales. En palabras de Cantoral (2013) “los conceptos, aún los más avanzados, se constituyen de prácticas” (p. 116). Es por esto que esta teoría centra su atención en aquellas prácticas que acompañan y dan origen a los objetos matemáticos. En el caso de la situación específica denominada *cálculo teórico de los excedentes de los consumidores*, es posible dar cuenta de la existencia de tres prácticas en la construcción de la integral definida; a saber, las prácticas de *clasificar*, *medir y aproximar*. Esto, se explicará a continuación.

Como la demanda por un cierto producto dependerá de cuál sea su precio unitario p, tenemos que la variable independiente es p y la variable dependiente es q. Por lo tanto, si el precio unitario de un determinado producto está comprendido en un intervalo $[p_1, p_2]$, existirá un conjunto de consumidores que estarán dispuestos a pagar, por la compra del producto en cuestión, una cantidad de dinero p, con $p_1 \leq p \leq p_2$. Así, una división del conjunto de posibles precios unitarios de un producto permite *clasificar* al conjunto de unidades demandadas en los conjuntos E_i, $i = 0, \ldots, n-1$ donde E_i corresponde al conjunto de unidades que se demandarán cuando el precio p dispuesto a pagar, por la compra del producto en cuestión, cumple con $p_i \leq p \leq p_{i+1}$ (ver Figura 18).

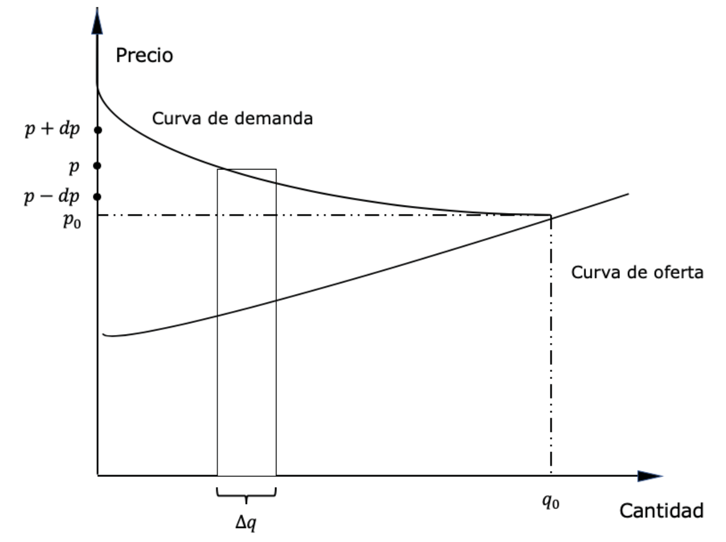


Figura 18. Representación geométrica de la clasificación en el caso del cálculo teórico de los EC.

Para $dp > 0$ suficientemente pequeño, la resta $p\Delta q - p_0\Delta q = (p - p_0)\Delta q$ es una *aproximación* del excedente de los consumidores que están dispuestos a pagar un precio comprendido entre $p - dp$ y $p + dp$ (ver Figura 18) por la compra de Δq unidades de un producto cuyo precio de mercado es p_0 (aquí, $p > p_0$). Cabe señalar que, en este caso, Δq es la *medida* del conjunto de unidades demandadas, en donde se está dispuesto a pagar un precio comprendido entre $p - dp$ y $p + dp$. Por lo tanto, si el punto de equilibrio (punto donde la oferta es igual a la demanda) es q_0, sumando las áreas de todos estos rectángulos desde $q = 0$ hasta $q = q_0$, se tiene que el beneficio total o excedente de los consumidores, será

$$EC = \int_0^q (p - p_0)\, dq$$

De esta manera, en esta situación específica podemos ver que prácticas como *clasificar*, *medir* y *aproximar* están presentes en la construcción de la integral definida. Esto motiva a estudiar la CSCM, asociada a la integral definida, a través de un análisis de las prácticas que están asociadas a dicha construcción. Esta información permitiría proponer pautas para la escritura de diseños de intervención en el aula que permitan contribuir a una descentración de la integral definida, como objeto matemático. Desde otra perspectiva, esta situación específica también está argumentada por la necesidad de cuantificar el beneficio económico de aquellos consumidores que están dispuestos a pagar, por determinado artículo, un precio mayor al de mercado. Este hecho, junto a la presencia de un uso de la medida de conjuntos (cuando se calcula Δq), permite generar una epistemología de la integral definida. Esto motiva a estudiar la CSCM, asociada a la integral definida, a través de la formulación de un marco de referencia de los $\mathcal{U}(med)$, el cual amplíe la socioespistemología del cálculo y el análisis (Ver Tabla 1)

A partir de lo señalado en el párrafo anterior, la segunda parte de esta investigación, estudiará la CSCM desde dos perspectivas teóricas, provenientes de la socioepistemología, las cuales son diferentes a la perspectiva dada por la categoría de modelación. Nos referimos al *modelo de anidación de prácticas* (Cantoral, 2013) y a *un marco de referencia de usos de conocimiento matemático*.

Para el desarrollo de esta segunda parte de investigación, se realizará un análisis histórico-epistemológico asociado al concepto de integral definida, en donde se incluirá un estudio de la obra del matemático francés Henri Lebesgue, denominada *Integrale, Longueur, Aire*, de 1902. La decisión de estudiar dicha obra, se debe a que este matemático marcó un antes y un después en la construcción del concepto de integral definida, al ser el primero en hacer uso de la medida de conjuntos para la construcción de dicho concepto.

Segunda parte.

Construcción social de la integral de Lebesgue

"Nuestro posicionamiento es el siguiente: los conocimientos matemáticos son producto de la construcción social." (Reyes-Gasperini, 2015, p.31)

Capítulo 4.

Aspectos metodológicos de la segunda parte de investigación

"Este fenómeno de centración en el objeto tiene una consecuencia bien documentada. Es factor principal del abandono escolar de una gran cantidad de estudiantes desde la educación secundaria (estudiantes entre 13 y 15 años de edad) y se continúa hasta el bachillerato (estudiantes entre 16 y 18 años de edad). Para la mejora educativa se precisa de un rediseño de dicho discurso, el rediseño afecta el qué, el cómo, el cuándo y el porqué aprender, superando ampliamente la consigna genérica de "aprender a aprender"". (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015, p. 7)

4.1 Esquema Metodológico socioepistemológico

La segunda parte de investigación estará guiada por el *esquema metodológico para la investigación socioepistemológica* (Montiel y Buendía 2012). Dicho esquema, está construido en base a las investigaciones realizadas por Buendía (2011) y Montiel (2011), el cual ha sido retroalimentado por diferentes investigaciones (e.g. Cordero, 2001; Castañeda, 2004; Molfino, 2010), junto con diversas discusiones dentro de la comunidad científica.

En términos estructurales, este esquema (ver Figura 19) está compuesto de *nodos*, los cuales se conforman de un conjunto de tareas propias. Dichos nodos están, a su vez, unidos por medio de *acciones relacionantes* (representadas por flechas). Es importante señalar que una investigación que utilice este tipo de esquema metodológico puede estar compuesta de un nodo o una combinación de estos unidos por medio de ciertas acciones relacionantes.

Debido a la discusión generada en la sección 3.2, esta segunda parte de investigación tiene como propósito estudiar la CSCM, asociado al concepto de integral definida, desde las perspectivas teóricas dadas por el *modelo de anidación de prácticas* (Cantoral, 2013) y por un *marco de referencia de usos de conocimiento matemático*. Por tal motivo, esta segunda parte de investigación no se guiará por la totalidad de dicho esquema, sino por una parte de este, la cual considerará los nodos *Problemática/Fenómeno Didáctico* y *Epistemología de prácticas*, ambos unidos por la acción relacionante denominada *Análisis Socioepistemológico*. Estos nodos y esta acción serán detallados a continuación.

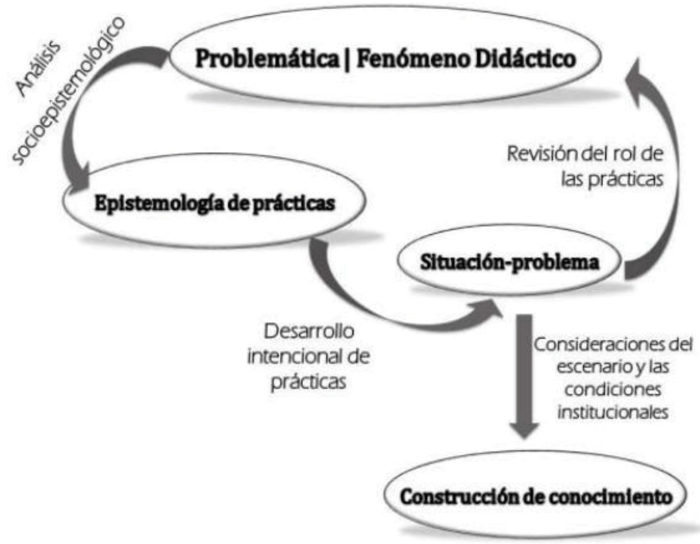


Figura 19: Esquema metodológico socioepistemológico (Montiel y Buendía 2012).

4.1.1 Problemática /Fenómeno Didáctico

En el caso del concepto de integral de Lebesgue, tradicionalmente su estudio se presenta en cursos de teoría de la medida, en donde el estudio previo de conceptos, tales como $\sigma-$álgebra, medida y función medible, entre otros, son necesarios para poder realizar una construcción de esta integral (Ver, por ejemplo, Gordon, 1994; Mira, 2010 y Morales, 2005). Desde un punto de vista filosófico, consideramos que la enseñanza de la integral de Lebesgue está basada en una postura realista del conocimiento; es decir, que en la enseñanza de este concepto la existencia de los objetos matemáticos no dependen de la acción del ser humano, por lo que “el acto de conocer se limita a descubrir las verdades eternas, rígidas e independientes” (Cordero et al, 2015, p.89). A modo de ejemplo, el concepto $\sigma-$álgebra no existió en la época en la que Lebesgue (1902) construyó su integral, debido a su incertidumbre respecto a la existencia de conjuntos no medibles. En 1904, Lebesgue se refirió a dichos conjuntos del siguiente modo:

> es solamente para estos conjuntos [L-medibles] que nosotros estudiaremos el problema de la medida. Yo no sé si se pueda definir, ni siquiera sé si existen otros conjuntos que los conjuntos medibles; si existen, sé que lo dicho en el texto no es suficiente para armar o no que

> el problema de la medida es posible, ni que se imposible para estos conjuntos. (Recalde, 2007, p.125)

Cabe señalar que la incertidumbre de Lebesgue quedó zanjada en 1905, cuando Vitali, en su artículo denominado *Sul problema della misura dei gruppi de punti de una retta*, logró demostrar que no existe ninguna función m definida sobre el conjunto potencia de $\mathbb{R}$, que tome valores en el intervalo $[0,\infty]$, sea invariante bajo traslaciones y tal que $m([0,1]) = 1$. A pesar de todo esto, la necesidad del por qué introducir el concepto de σ –álgebra en la construcción de la integral de Lebesgue no suele aparecer en el dME. En relación con esto, Recalde (2007) señala lo siguiente:

> Es un hecho que las formulaciones de los textos típicos esconden completamente el proceso histórico de constitución formal de la integral. Generalmente no se explica que una de las razones por las cuales la función medida se defina sobre una estructura tan fina como una σ –álgebra, se debe al hecho de que es imposible definir una medida, invariante bajo traslaciones, sobre la totalidad de los subconjuntos de $\mathbb{R}$. (p.124)

En resumen, se han presentado algunas evidencias que justifican el planteamiento de la siguiente problemática: *la construcción social de la integral de Lebesgue está rezagada por el dME* (ver Figura 20). Cabe señalar que el planteamiento de esta problemática es parte de la teoría socioepistemológica, la cual afirma que, en términos generales, la CSCM está rezagada por el dME.

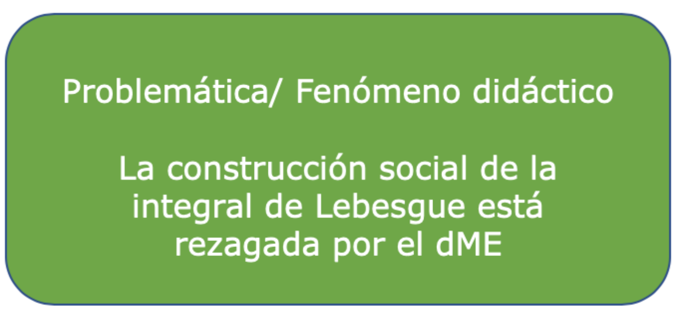


Figura 20: Problemática de la segunda parte de esta investigación.

Como se ha señalado anteriormente, la segunda parte de esta investigación abordará esta problemática por medio de un estudio de la CSCM desde dos perspectivas teóricas: el *modelo de anidación de prácticas* (Cantoral, 2013) y a *un marco de referencia de usos de conocimiento matemático*. En resumen, se plantean los siguientes objetivos de investigación:

Objetivo general 1:

- Modelar la CSCM por medio de un modelo preliminar de anidación de prácticas.

Objetivos específicos.

- Identificar las prácticas asociadas a la construcción de la integral de Lebesgue realizada en la obra titulada *Integrale, Longueur, Aire* de 1902.

- Identificar la práctica de referencia que orientó a las prácticas asociadas a la construcción de la integral definida realizada por Lebesgue en la obra *Integrale, Longueur, Aire, de 1902.*

Objetivo general 2:

- Formular una propuesta de marco de referencia de los $\mathcal{U}(med)$.

Objetivos específicos.

- Analizar los $\mathcal{U}(med)$ en el escenario de la obra de Lebesgue (1902) y en la situación específica de Economía denominada *cálculo teórico de los excedentes de los consumidores.*

- Identificar una transversalidad entre ambos escenarios por medio de la formulación de una epistemología de $\mathcal{U}(med)$.

4.1.2 Acción relacionante: Análisis socioepistemológico

Una vez planteada la problemática, así como los objetivos de investigación que permitan abordar dicha problemática, se procede a estudiar y caracterizar la naturaleza del saber matemático, cómo se logra su adquisición a través de sus significaciones contextualizadas y, finalmente, de su transmisión (ver Figura 21). Una investigación puede abordar una o varias de estas dimensiones, las cuales pueden articularse entre sí, en caso de ser necesario. Montiel y Buendía (2012) señalan que cada una de estas dimensiones corresponde a un tipo de investigación y, en consecuencia, se utilizan métodos específicos para la obtención de datos.

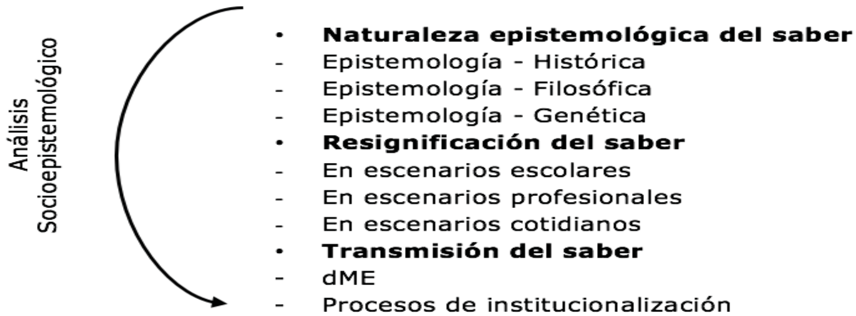


Figura 21: Análisis socioepistemológico (Montiel y Buendía 2012).

Cabe señalar que nuestro análisis socioepistemológico se realizará por medio de una técnica de análisis documental (Rojas, 2011). A continuación, se detallará cada una de estas dimensiones.

Naturaleza epistemológica del saber

En esta dimensión, se realiza un estudio histórico–epistemológico en donde se da cuenta, no sólo de hechos históricos, sino también de las circunstancias socioculturales que permitieron la construcción de determinado conocimiento matemático.

En esta segunda parte de investigación, el análisis histórico-epistemológico, que será realizado en el capítulo 5, permitirá mostrar que la construcción de la integral de Lebesgue, en su obra denominada *Integrale, Longueur, Aire* de 1902, “no está formada por conceptos aislados, ni es producto de una estructuración conceptual, sino que es producto del desarrollo de ciertas prácticas” (Montiel y Buendía, 2012, p.69).

Resignificación del saber

En esta dimensión se realizará un estudio de los $\mathcal{U}(med)$ en los escenarios de la Economía (en la situación específica denominada *cálculo teórico de los EC*) y de la matemática (en la obra denominada *Integrale, Longueur, Aire*, de 1902) donde se dará cuenta de una transversalidad, infiriendo los significados, procedimientos, el instrumento útil al humano y la argumentación.

Nuestra manera de analizar los $\mathcal{U}(med)$ será acorde al análisis de $\mathcal{U}(CM)$ realizado en distintos trabajos socioepistemológicos (e.g., Del Valle, 2015; Morales y Cordero, 2014; Mendoza, Cordero, Solís y Gómez, 2018), los cuales analizan los $\mathcal{U}(CM)$ por medio de un debate entre funcionamiento y forma.

Transmisión del saber

Esta dimensión busca dar cuenta de los $\mathcal{U}(CM)$ en el dME. En esta investigación, un breve análisis de dichos usos fueron realizados al momento de plantear la segunda parte de esta investigación, realizado principalmente para poder justificar nuestra problemática.

4.1.3 Epistemología de prácticas

Este nodo es el que da cuenta de la CSCM; en nuestro caso, de la construcción social asociada a la integral de Lebesgue. Con respecto a este nodo, Montiel y Buendía (2012) señalan lo siguiente:

> Como resultado de un análisis socioepistemológico, se propone una epistemología de prácticas que pretende formular una explicación acerca de la problemática educativa en cuestión o dar una visión alternativa con relación al fenómeno didáctico que se estudia; pero además, será la base para cualquier intervención didáctica. (p. 72)

Dado a que en esta segunda parte de investigación, tenemos dos objetivos generales, este nodo contará con dos epistemología de prácticas, una por cada objetivo: el *modelo de anidación de prácticas* (Cantoral, 2013) y un MR que caracterice los $\mathcal{U}(med)$) a la luz de una epistemología de usos.

El *modelo de anidación de prácticas* permite explicar empírica y teóricamente la CSCM del sujeto (individual, colectivo o histórico) por medio de la articulación de principios, uno detrás de otro (ver Figura 22): se parte de *acciones*, las que se organizan como actividades humanas situadas socioculturalmente, para perfilar una *práctica*[11] (*práctica socialmente compartida*), intencionada y regulada por el contexto, la cual organiza la actividad. La práctica, a su vez, está regulada por una práctica de referencia -entendida como “la expresión material e ideológica de un paradigma” (Cantoral, Reyes–Gasperini y Montiel, 2014, p. 99)- la cual significa y orienta a las prácticas, dándole, además, sentido a la racionalidad contextualizada. Para Reyes–Gasperini (2016), la práctica de referencia surge como un elemento explicativo de la situación en la cual los actores construyen objetos matemáticos que no son preexistentes ni preestablecidos. Finalmente, la(s) práctica(s) social(es), de carácter invariante, está(n) ubicada(s) en el máximo nivel de esta relación jerárquica y es la que norma a las acciones, actividades, prácticas y prácticas de referencia.

Figura 22: Modelo de anidación de prácticas (Cantoral, 2013)

El MR de los usos de conocimiento matemático es un marco conformado por significaciones, procedimientos, instrumento útil al humano y la argumentación. La socioepistemología del cálculo y del análisis (ver Tabla 1) ha logrado formular, hasta ahora, cuatro situaciones (variación, transformación, aproximación y selección) que individualmente conforman un MR de los usos de conocimiento matemático.

[11] En Cantoral (2013), la práctica es entendida como un “conjunto organizado de actividades o acciones intencionales para resolver un problema dado” (p.320)

En el caso de esta segunda parte de investigación, la formulación de una propuesta de MR de los $\mathcal{U}(med)$ permitirá dar cuenta de una transversalidad entre dos escenarios: la obra de Lebesgue titulada *Integrale, Longeur, Aire* de 1902 y la situación en Economía en la que se calcula teóricamente los EC.

La manera de responder a los objetivos planteados en esta segunda parte de investigación, será en base a los resultados arrojados por el análisis histórico-epistemológico que será realizado, más adelante, en esta investigación. Es por este motivo, que sólo se trabajará con una parte del esquema metodológico propuesto por Montiel y Buendía (2012). La estructura metodológica que guiará la segunda parte de esta investigación se resume en la Figura 23.

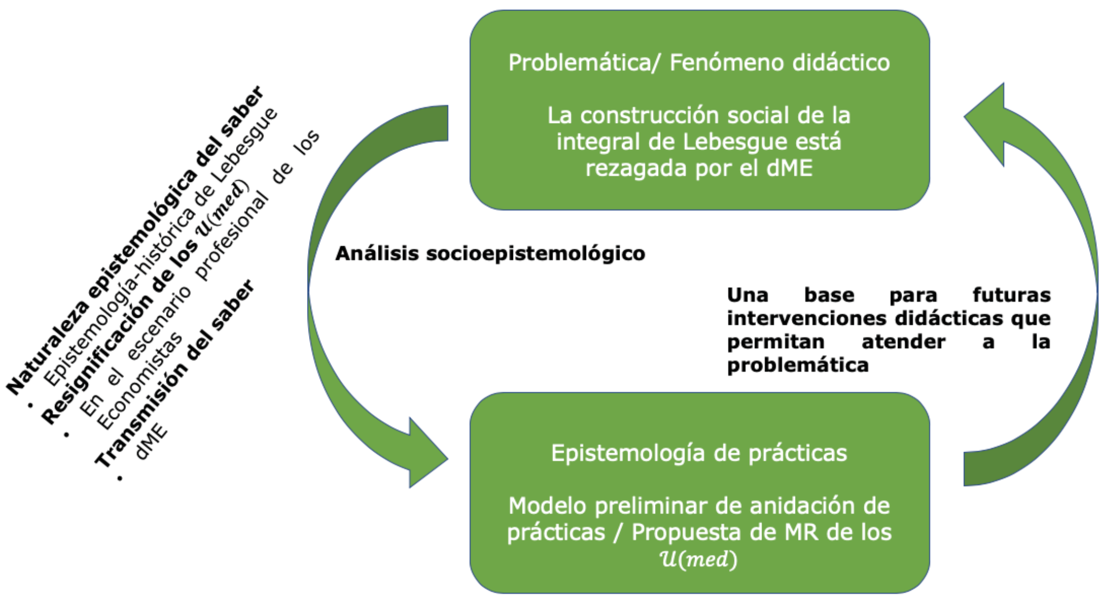


Figura 23: Esquema metodológico para la segunda parte de esta investigación

Capítulo 5.

Antecedentes históricos–epistemológicos del concepto de integral definida.

"Uno de los propósitos que se persigue a través de un análisis histórico-epistemológico con fines didácticos, es desmitificar las matemáticas. Se hace necesario bajar las matemáticas de ese pódium que la tradición racionalista les ha creado, pero evitando caer en la "banalización" de los conceptos. Necesitamos mostrar a nuestros estudiantes que se puede tener acceso a los conceptos y teorías matemáticas, que incluso ellos pueden construir nuevas teorías matemáticas." (Bobadilla, 2012, p 223).

5.1 El cálculo de áreas y la cuadratura del círculo en Grecia

Bárcenas (2006) señala que la noción de medida ya había sido estudiada por los griegos, quienes establecieron la idea de que si M son los conjuntos medibles del plano (es decir, toda figura geométrica que tiene área), se tiene una función de área

$$\alpha: M \to [0, \infty]$$
$$A \to \alpha(A)$$

que satisface $\alpha(A \cup B) \leq \alpha(A) + \alpha(B)$; α es invariante por movimientos y si A es un rectángulo de lados a y b, entonces $\alpha(A) = ab$, quedando pendiente el problema de si todo conjunto del plano es medible.

En términos modernos, con los griegos se introduce la necesidad de una medida finitamente aditiva e invariante por movimientos. Más adelante, se brindó una respuesta sistemática a la siguiente pregunta: ¿a cuáles subconjuntos de $\mathbb{R}$ se les puede asociar una "longitud"? Como se comprobó al desarrollar la teoría de conjuntos, realmente es imposible asociar una longitud a cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$, de tal manera que se cumplan algunas propiedades de invariancia por traslación y aditividad de conjuntos.

En la antigua Grecia, el problema de la cuadratura consistía en construir un cuadrado de área igual al de una figura dada. Es sabido que el problema de la cuadratura del círculo fue el más complejo. Ante la creencia de los griegos de la imposibilidad de cuadrar el círculo, Arquímedes tuvo la idea preliminar de aproximar el área del círculo por polígonos regulares inscritos de más y más lados. Sin embargo, esta idea de aproximación implicó trabajar con la noción de infinito. Esto representó una dificultad no menor, pues para los griegos, la noción de infinito estaba vinculada al mundo físico, lo cual los llevó a enfrentar diferentes paradojas, como las establecidas por Zenón, que no lograban ser contestadas debido a que la idea de infinito estaba muy ligada a la intuición humana. Sin embargo, el llamado método exhaustivo de Arquímedes apareció como una forma de solucionar este conflicto. Este método, como se mencionó anteriormente, consistía en inscribir una sucesión de polígonos en la figura que se quiere cuadrar, de tal suerte que la sucesión de diferencias entre el área de la figura inicial y el área de cada polígono, cumpla con la hipótesis de la proposición X.1 que aparece en el libro Elementos de Euclides: "si se tienen dos magnitudes desiguales, y se va dividiendo la mayor en partes desiguales y la menor de estas partes se continúa dividiendo, en algún momento se obtendrá una magnitud menor que la menor de las magnitudes dadas[12]." (Recalde, 2007, p.109).

Podemos señalar, que este método fue el punto referencia para el cálculo de áreas en forma general y para el desarrollo de lo que sería la teoría de integración de Cauchy y Riemann, durante el siglo XIX. Sin embargo, ya Arquímedes, en su trabajo denominado *La cuadratura de la parábola* había establecido que el área de la región total de la parábola corresponde a tres cuartas partes del área del triángulo inscrito que pasa por el vértice de dicha parábola (ver Figura 24).

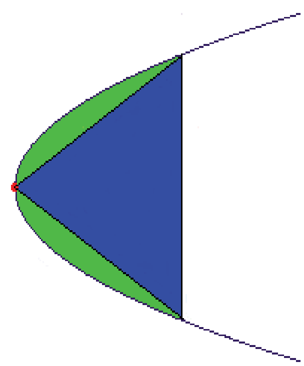


Figura 24: Cuadratura de la parábola

5.1.1 El método de los indivisibles

El método de los indivisibles[13] se le atribuye a Bonaventura Cavalieri (1598-1647). Para Cavalieri, el área de una región plana y acotada se puede determinar a partir de la suma de todas sus líneas. En su obra titulada *Geometria Indivisibilibus Continuorum Nova quadam Ratione Promot* (1635), estableció que si se tiene un cuadrado de lado a, la suma de todos

---

[12] Actualmente, podríamos decir que esta proposición equivale a decir que una sucesión decreciente de números positivos converge a cero.

[13] Los indivisibles para objetos de dimensión n , serán los objetos de dimensión $n-1$

sus lados –que Cavallieri denotó por $omn(a)$– es igual a a^2. Otro ejemplo que apreció en dicha obra es cuando se traza la diagonal de este cuadrado y se designa por x a la medida (variable, desde $x = 0$ hasta $x = a$) de cada línea paralela a uno de los lados y que conforman uno de los dos triángulos, se tiene que $omn(x) = \frac{a^2}{2}$. Otro caso que Cavalieri trabajó, es cuando quiso calcular el área de un cubo. En este caso, los indivisibles pueden ser considerados como cuadrados de lado a y la suma de las áreas de cada uno de estos cuadrados es a^3, es decir, $omn(a^2) = a^3$.

En el caso de una pirámide, los indivisibles son cuadrados de lado x (variable, desde $x = 0$ hasta $x = a$) (ver Figura 25), en donde Cavalieri estableció que $omn(x^2) = \frac{a^3}{3}$.

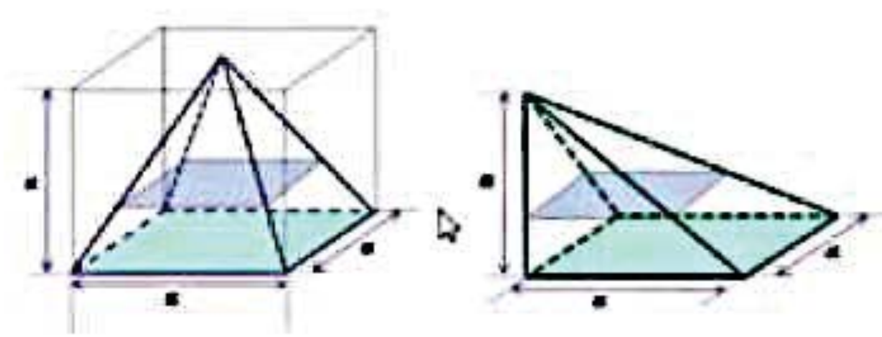


Figura 25: Indivisibles en una pirámide.

Recalde (2007) señala que Cavalieri, en su segunda obra titulada *Seis ejercicios Geométricos*, aborda el estudio del cálculo de $omn(x^n), n = 3,4,5,6,9$, en donde llegó a que $omn(x^n) = \frac{a^{n+1}}{n+1}$. Podemos ver que, en términos modernos, Cavalieri estuvo enfocado en calcular $\int_0^a x^n dx$. Con respecto a la obra de Cavalieri, Bobadilla (2012) señala lo siguiente:

> La obra de Cavalieri es fuertemente criticada en dos sentidos: por un lado están los aspectos relacionados con el continuo y el infinito y, por otro lado, su forma de exposición retórica y los extensos e intrincados razonamientos geométricos, que hacen difícil su lectura y comprensión. Además, a pesar de que los indivisibles son el elemento fundamental de su teoría, en ninguna parte de la Geometría de los Indivisibles aparece una definición explícita de indivisible. Sin embargo, su aporte desde el punto de vista conceptual y metodológico influenció notoriamente los trabajos de sus contemporáneos y sucesores, trazando un

> camino fructífero hacia la solución general del problema del cálculo de cuadraturas y curbaturas (p. 44).

A partir de estas críticas, los trabajos de Fermat, Roberval, Wallis y Pascal permitieron ir poco a poco hacia una progresiva aritmetización de las cuadraturas de curvas, en donde se comenzó a hacer uso implícito de la idea de límite.

Los trabajos de Newton y Leibniz permitieron la implementación de algoritmos generales, "en términos algebraicos y no geométricos lo que permitió resolver los más diversos problemas; y así reconocer los conceptos y métodos propios del nuevo cálculo infinitesimal" (Bobadilla, 2012, p. 52). El segundo hecho nace a partir de los trabajos realizados por Cauchy y sus sucesores.

5.2 Integración en los trabajos de Newton y Leibniz

Newton, estuvo enfocado en hallar la ecuación correspondiente a la cuadratura de otra ecuación. Así, en su obra titulada *De analysi* demuestra que la cuadratura bajo la curva $y = \frac{na}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ es la ecuación $y = ax^{\frac{m}{n}}$. Esta fue la regla I de su obra. Las reglas II y III permiten obtener cuadraturas de curvas que están compuestas a partir de las simples.

Según Recalde (2007) "Newton establece la operación inversa de la cuadratura, estableciendo largas tablas de lo que podríamos denominar cuadraturas y anticuadraturas o, de manera sugestiva, antiderivadas y derivadas" (p.114).

Leibniz establece la relación inversa entre el problema de trazado de tangentes y el del cálculo de cuadraturas. A partir de esto, como lo señala Grattan–Guinness (1980), Leibniz prefiere utilizar el símbolo $\int l$ en lugar de $omn()$ (notación propia de Cavalieri), de tal forma que $\int l$ representa la idea de $omn(l)$.

5.3 Hacia una aritmetización de la integral

Para Canela (2016), durante el siglo XIX se vivió un proceso de *aritmetización del análisis matemático* (y en particular, del concepto de integral), el cual buscó dejar atrás la intuición geométrica, propia del siglo XVIII, que, aunque era eficaz, prestaba muy poca atención al fundamento y estructura del análisis mismo. Es más, Boyer (2013) señala que "sólo en el siglo XIX se liberó la matemática pura de las limitaciones que implican las observaciones de la naturaleza” (p.19)

> Sin embargo, a finales del siglo XVIII y principios del XIX la búsqueda de los fundamentos del análisis conduce a los matemáticos al abandono de la intuición geométrica que había predominado en el cálculo del siglo XVIII, se lleva a cabo una separación de las nociones de la geometría intuitiva ligadas al movimiento físico, requiriendo del establecimiento de los conceptos de función, variable, límite, con un carácter esencialmente aritmético y lógico. Esto condujo a la creación de una nueva rama de las matemáticas: el análisis matemático (Bobadilla, 2012, p.212).

Con respecto a la aritmetización del análisis, es importante señalar lo siguiente:

> La aritmetización del análisis que no fue simplemente una cuestión de des-geometrizar el cálculo y apuntar hacia las mejores condiciones lógicas en sus fundamentos: fue, más bien, una reducción de las diferentes nociones conceptuales (en referencia a distintos objetos) a las nociones aritméticas. (Segura y Sepulcre, 2015, p.6)

En el análisis epistemológico realizado en este trabajo, se dará cuenta que Cauchy, en su obra *Lecciones sobre el cálculo infinitesimal*de 1823, fue el primero en darle un fundamento aritmético a la construcción de la integral (antes de esto, la intuición y la geometría eran predominantes para la construcción del concepto de integral). A partir de este trabajo, diferentes matemáticos fueron aritmetizando la construcción de una integral cuya generalización se fue dando sucesivamente, hasta llegar a lo realizado Lebesgue, en su trabajo titulado *Integrale, Longueur, Aire* de 1902, quien construye su integral a partir de una definición del concepto de medida de un conjunto.

5.3.1 El problema de Fourier

Según Bombal (1991) la noción de integral, hasta inicios del siglo XIX, era considerada como la operación inversa a la derivación, conectada con la conocida regla de Barrow y el problema de calcular el área limitada por una curva. En particular, la idea de integral estaba relacionada con el área de conjunto de la forma $\{(x,y): x \in [a,b], 0 \leq y \leq f(x)\}$, donde f era una función "arbitraria" y positiva en $[a,b]$. En esa época, por funciones "arbitarias" se entendía a una expresión analítica o un número finito de ellas definidas por intervalos, pero de ninguna manera se podían considerar funciones discontinuas en más de un número finito de puntos.

Fourier, en sus trabajos sobre ecuaciones de onda y calor, se enfrentó al problema de resolver ecuaciones diferenciales del tipo

$$\frac{d^2T(x,t)}{dx^2} = k^2 \frac{dT(x,t)}{dt}, x \in [-\pi, \pi]$$

$$T(0,t) = T(x,t) = 0, T(x,0) = f(x), 0 \leq x \leq \pi$$

En 1807, en un artículo presentado a la Academia de Ciencias de París (publicado en 1822 en *Théorie analytique de la chaleur*), Fourier llegó a la conclusión de que $T(x,0) = f(x)$ debe tener la forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

Sin embargo, al buscar los coeficientes de esta serie, Fourier debe calcular las integrales

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nt) dt, b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nt) dt, n \in N$$

Turégano (1993) señala las dificultades que implicó para la época, y en particular para Fourier, establecer el significado de la integral de una función:

> Si se pueden considerar funciones arbitrarias, y estas no se pueden expresar como ecuaciones, ¿tiene sentido preguntarse por el significado de la integral sobre estas funciones? Inevitablemente, tiene que haber una nueva concepción de la integral, rompiendo con la del siglo XVIII, en que, como ya hemos dicho anteriormente, se definía a través de la función primitiva. (p.67)

Recalde (2007) explica que Fourier entendió que no era posible seguir caracterizando a la integral como una antiderivada, sino que se hacía necesario regresar a la interpretación geométrica de la integral. Esto implicó tratar de definir $\int_a^b f(x)dx$ como un área, cuando f era una función arbitraria.

Este fue el inicio de las investigaciones de Cauchy, quien realizó una definición rigurosa de los conceptos de función, límite, continuidad, derivada e integral tal y como los entendemos actualmente (Cañada, 2006).

5.3.2 Integral de Cauchy

Cauchy fue uno de los primeros matemáticos en trabajar formalmente con el concepto de integral, dándole un fundamento aritmético de análisis. Fue en su obra *Lecciones sobre el cálculo infinitesimal* de 1823, donde se pudo apreciar la primera definición moderna de la integral para funciones continuas, la cual se basó en el concepto de límite. Lebesgue (1928) señala que "Pour Cauchy y est fonction de x quand, à chacun des états de grandeur de x, correspond un état de grandeur parfaitement determiné de y." (p.4)

Crisóstomo (2012), describió la construcción de la integral de Cauchy como sigue:

> En 1822, Cauchy introdujo dicha definición a través del *Resumé des leçons données à l´Ecole Royale Polytechnique sur les calcul infinitesimal.* Empezó con la suposición de que la función $y = f(x)$ es continua respecto la variable x entre dos límites finitos. En seguida, designó por $x_0, x_1, x_2 \ldots, x_{n-1}$ los nuevos valores de x situados entre los dos límites considerados; además supuso que los referidos valores siempre crecen o siempre decrecen entre el primero y el segundo límite. Así, la diferencia $X - x_0$ puede ser dividida en los elementos

$$x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, X - x_{n-1}$$

> los cuales son asociados a la suma aproximada $S = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$, que se obtiene a partir de la suma de las áreas de los rectángulos, cuyas bases son los elementos de la partición y la altura consiste en sus respectivas imágenes. En estas condiciones, definió la integral $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$ como el límite de la suma S, cuando la mayor de las longitudes $x_i - x_{i-1}$ tiende a cero. Por lo tanto, esta integral es determinada por un cierto límite que depende únicamente de la forma de la función $f(x)$ y de las extremidades (x_0, X) del intervalo. La justificación de la referida definición consistía en la demostración de la existencia y unicidad de dicho límite y en la constatación de que si los valores numéricos de los referidos elementos fueren muy pequeños y el número n muy grande, el modo de la división tendrá solamente una influencia imperceptible sobre el valor de la suma S. (p. 123)

Bobadilla (2012) señala que, a pesar de definir su integral de forma independiente a un referente geométrico, Cauchy no desconoce la interpretación geométrica de esta integral como el área bajo una curva. Sin embargo, la definición de integral planteada por Cauchy no resuelve por completo el problema general de la integral para funciones arbitrarias (discontinuas) planteado por Fourier.

En 1849, en su trabajo titulado *Memoire sur les fonctions discontinues*, Cauchy extiende su definición de integral para funciones acotadas y con un número finito de discontinuidades en un intervalo $[a,b]$: Si f es acotada en un intervalo $[a,b]$ y discontinua en $c \in [a,b]$, entonces $\lim_{z \to 0^+} \int_a^{c-z} f(x)dx$ y $\lim_{z \to 0^+} \int_{c+z}^{b} f(x)dx$ existen y se tiene que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{z \to 0^+} \int_a^{c-z} f(x)dx + \lim_{z \to 0^+} \int_{c+z}^{b} f(x)dx$$

En 1829, el matemático alemán Gustav Lejeune Dirichlet, en su trabajo titulado *Sur la convergence des séries trigonomètriques qui servent a représenter une fonction arbitraire entre des limites* données, logró extender la definición de integral, realizada por Cauchy, a funciones que tuviesen un número infinito de discontinuidades[14] en un intervalo $[a,b]$, preguntándose

[14] Para Dirichlet, una función con un número infinito de discontinuidades es integrable si el

si era posible extender esta definición a una función arbitraria (cuestionamiento hecho por Fourier). Fue el mismo Dirichlet quien dio una respuesta negativa a esta interrogante, demostrando que la función característica

$$f(x) = \begin{cases} 1, si\ x \in \mathbb{Q} \\ \\ 0, si\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

no era integrable bajo su definición.

A partir de lo realizado por Dirichlet comienzan a surgir interrogantes sobre las condiciones que debería cumplir una función arbitraria para que fuese integrable. Riemann aborda esta problemática y, además de construir una integral, otorga un criterio para determinar cuándo una función es Riemann integrable.

5.3.3 Integral de Riemann

Turégano (1993) describió lo realizado por Riemann, como sigue:

> Para establecer esto, tomamos una sucesión de valores $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ entre a y b, ordenados por tamaños; denotamos $x_1 - a = \delta_1, x_2 - x_1 = \delta_2, \ldots, b - x_{n-1} = \delta_n$ y las fracciones propias positivas por ε_i. Entonces el valor de la suma
>
> $$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2\delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \varepsilon_3\delta_3) + \ldots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n\delta_n)$$
>
> dependerá de la elección de los intervalos de las cantidades ε_i. Si ésta tiene la propiedad de que, de cualquier forma que sean elegidas δ_i y ε_i, tiende a un valor límite A fijo cuando δ_i se hace infinitamente pequeño, entonces este valor se llama $\int_a^b f(x)dx$. Si no tiene esta propiedad, entonces $\int_a^b f(x)dx$ no tiene significado. A partir de aquí, Riemann elige un punto arbitrario $x_i = x_{i-1} + \varepsilon_i\delta_i$ en el n-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de esta partición $i = 1, \ldots, n$ y define la integral por $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \to 0} \sum f(x_i)(x_i - x_{i-1})$ donde δ denota el máximo de las longitudes δ_i de los subintervalos de la partición $[a, b]$. (p. 90-91).

conjunto de puntos de discontinuidad es diseminado (lo que actualmente se conoce como denso en ninguna parte)

En su definición de integral, Riemann señaló que podían ser incluidas funciones que cuyo conjunto de discontinuidades fuese denso. En términos generales, el criterio de integrabilidad de Riemann fue el siguiente: una función f es integrable sí y sólo si $\forall \varepsilon > 0, \forall \sigma > 0, \exists d > 0$ tal que para toda partición P, con $\|P\| < d$, se tiene que $S(P,\sigma) = \sum_{i \in T} \Delta x_i < \varepsilon$, donde $T = \{i: D_i > \sigma\}$. En este caso, D_i(llamado oscilación máxima) corresponde a la diferencia entre el mayor y menor valor que la función f toma en el intervalo $[x_{i-1}, x_i], i = 1, \ldots n,$ donde $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$ es una partición del dominio $[a,b]$.

Como ejemplo, Riemann construyó la siguiente función:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2}$$

donde $(x) = x - m(x), x \neq \frac{2k+1}{2}; (\frac{2k+1}{2}) = 0$ y $m(x) =$entero más próximo a x. Riemann demostró que dicha función es discontinua en un conjunto infinito denso de puntos y es integrable.

Sin embargo, la función característica de Dirichlet tampoco resultaría integrable bajo el criterio de Riemann. Bobadilla (2012) señala que después de la publicación del trabajo de Riemann, continuaron las investigaciones que buscaron caracterizar a las funciones Riemann integrables, por medio del “tamaño topológico” del conjunto de discontinuidades. No es sino hasta los trabajos de Camille Jordan que la importancia de la noción de medida en la teoría de integración se reconoce, por primera vez, de forma explícita.

5.3.4 La teoría del contenido de Jordan

Recalde (2007) indica que la teoría de la medida, desarrollada por Lebesgue tiene sus antecedentes en las investigaciones sobre conjuntos infinitos de Cantor -quien en 1883 fue el primero en dar una definición de medida de un subconjunto acotado $A \subset \mathbb{R}^n$- y en la noción de contenido de Camille Jordan. En su artículo llamado Remarques sur les integrales définies, en 1882, Jordan introduce las definiciones de contenido interior ($C_i(E)$) y exterior ($C_e(E)$) de un subconjunto E de un intervalo $[a,b]$, como

$$C_i(E) = sup_P \sum_{l_K \subset int(E)} l(I_K)$$

$$C_e(E) = inf_P \sum_{l_K \cap E \neq \phi} l(I_K)$$

Donde $P = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ es una partición de $[a, b]$, $I_K = [x_{k-1}, x_k]$ y $l(I_K) = x_k - x_{k-1}$.

Para Jordan, un conjunto es J-medible, si $C_i(E) = C_e(E) = C(E)$. En pocas palabras, Jordan trabajó con aquellos conjuntos E que pudiesen ser "aproximados" por intervalos abiertos. En particular, podemos notar que todo intervalo abierto resulta ser J-medible, por lo que la idea de contenido generaliza el concepto de largo de un intervalo. En base a estas definiciones, Jordan redefinió la integral de Riemann, del siguiente modo: Sean $\{E_k\}$ una colección de subconjuntos de $[a, b]$ J-medible y que determinan una partición P de dicho intervalo. Para una determinada función acotada f, se define la suma inferior, como

$$L(P) = \sum_{k=1}^{n} m_k C(E_k)$$

y la suma superior, como

$$U(P) = \sum_{k=1}^{n} M_k C(E_k)$$

donde $m_k = ínf(f(x))_{x \in E_k}$ y $M_k = sup(f(x))_{x \in E_k}$. En base a esto, Jordan define las integrales por exceso y defecto, como

$$\underline{\int_a^b f(x)dx} = \sup L(P)$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \acute{\imath}nf\,U(P)$$

La función será Riemann integrable, en el sentido de Jordan, si

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

El contenido de Jordan no resulta ser numerablemente aditivo. Esta será una de las propiedades que Borel en 1898 estableció para definir una medida, aunque sin pensar en sus aplicaciones a la integración.

5.3.5 La teoría de la medida de Borel

Para Émilé Borel, la idea de medir reposó en la generalización del largo de un intervalo. Es por esto que, en 1898, con la intención de ampliar esta idea a una clase más amplia de conjuntos, en su trabajo titulado *Leçons sur la théorie des fonctions*, introdujo la noción de conjuntos borelianos o B – medibles. Según Borel (1898; citado en Recalde, 2007), una teoría de la medida útil debía cumplir con las siguientes propiedades:

> La medida de la suma de una infinidad numerable de conjuntos es igual a la suma de sus medidas; la medida de la diferencia de dos conjuntos es igual a la diferencia de sus medidas; la medida jamás es negativa; todo conjunto que no tiene medida nula no es numerable. Ello es entonces, expresamente entendido, lo que nosotros llamamos medida y declara los conjuntos que nosotros llamamos medibles. (p. 48)

Lo anterior, es reafirmado por Michel (1992):

> (1) la mesure de Somme d´une infinité dénombrable d´ensembles disjoints deaux a deaux est égale à la Somme de leurs mesures: $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n))$
>
> (2) la mesure de la différence de deux ensembles dont l´un est contenu dans l´autre est égale à la différence de leurs mesures: si $E^{'} \subset E$, alors $m(E - E^{'}) =$

$m(E) - m(E')$;

(3) la mesure n´est jamais négative. (p.58)

Borel dio cuenta que la colección de conjuntos borelianos podían ser generados a partir de los intervalos, por medio de operaciones de unión finita, unión numerable y sus complementos. Más aún, en este trabajo se demostró que todos los conjuntos perfectos y acotados son B - medibles. Además, es importante resaltar que Borel es consciente de que presentó una exposición axiomática de una teoría de la medida:

> Hemos reconocido que una definición de medida sólo puede ser útil si ésta verifica ciertas propiedades fundamentales, nosotros hemos impuesto estas propiedades a priori y las hemos empleado para definir la clase de los conjuntos que hemos considerado como medibles. Esta forma de proceder presenta grandes analogías con el método introducido por el Sr. Drach en álgebra y en la teoría de las ecuaciones diferenciales [...] En cualquier caso, procede de la misma idea fundamental: definir las nuevas propiedades, es decir, establecer qué propiedades son estrictamente indispensables para el razonamiento que se va a seguir [...] (Borel, 1898, pág. 48).

5.4 Integral de Lebesgue

5.4.1 Construcción de la integral de Lebesgue en *Integrale, Longueur, Aire* (1902)

Según Recalde (2007), Lebesgue, en su obra titulada *Integrale, Longueur, Aire*, de 1902, no sólo transcribió los desarrollos de Jordan y Borel, "sino que les da una forma más concreta con el objetivo de brindar una salida conceptual al problema de la medida en forma general" (p.119).

En el primer capítulo de esta obra, Lebesgue (1902) define, como lo hizo Borel, la medida de un conjunto por medio de sus propiedades esenciales. Posteriormente, indicó las relaciones existentes entre la medida así definida y la medida de Jordan (ver Figura 26).

> Dans le premier chapitre je définis, avec M.r Borel, la mesure d'un ensemble par ses propriétés essentielles. Après avoir complété et précisé les indications un peu rapides que donne M.r Borel (**), j'indique quelles relations il y a, entre la mesure ainsi définie et la mesure au sens de M.r Jordan.

Figura 26: Definición de la medida de un conjunto por medio de sus propiedades esenciales (Lebesgue, 1902, pág. 232)

Para Lebesgue (1902), la base de la construcción de su integral reposó en una idea geométrica (área bajo la curva de una función continua y acotada). La ventaja, es que su método de construcción podía ampliarse a funciones discontinuas y acotadas. A pesar de que la construcción de esta integral tuvo un sustento geométrico, Lebesgue logró darle a esta definición un carácter analítico, en donde utilizó sumas similares a las de Riemann para definir su integral como el límite de dichas sumas (ver Figura 27).

> Ces préliminaires posés, il n'y a plus d'inconvénients à définir l'intégrale d'une fonction continue comme l'aire d'un domaine plan; et même cette méthode a l'avantage de conduire à une définition de l'intégrale d'une fonction discontinue bornée comme mesure d'un certain ensemble de points. C'est cette définition géométrique que j'adopte au chapitre II; on peut d'ailleurs la remplacer par une définition analytique, l'intégrale se présente alors comme étant la limite d'une suite de sommes assez analogues à celles que l'on considère dans la définition de Riemann. Les fonctions auxquelles s'applique cette définition géométrique sont celles que j'appelle *sommables*.

Figura 27: Definición geométrica de funciones sumables (Lebesgue 1902, p.232)

En resumen, Lebesgue (1902) trató de definir una función medida m, que toma valores en el intervalo $[0, \infty]$, con las siguientes características:

L_1: $m(E) \neq 0$, para algún E.
L_2: Dos conjuntos iguales tienen la misma medida.
L_3: La medida de la unión de un número finito o infinito numerable de conjuntos disjuntos entre sí, es la suma de la medida de estos conjuntos.

En Recalde (2007) encontramos una explicación del sentido de cada una de estas propiedades. Para Lebesgue, estas propiedades resumen la actividad misma de medir. La primera propiedad evita trabajar con la función nula, la cual no estaría acorde con la actividad tradicional misma de medir, la cual asigna números no negativos (por ejemplo, cuando se miden áreas, volúmenes y largos). La segunda propiedad tiene relación con la invarianza de la medida bajo traslaciones. Cabe señalar que para Lebesgue la idea de que dos conjuntos sean iguales está relacionada con el hecho de poder desplazar uno de estos conjuntos para hacerlo coincidir con el otro. Por último, la tercera propiedad refleja un hecho natural en la forma de medir: la medida de un todo es igual a la suma de las medidas de sus partes.

En primera instancia, Lebesgue define la medida de un subconjunto del plano cartesiano. Si E es un subconjunto acotado del plano, define la medida exterior de E como sigue:

$$m_e(E) = \text{ínf}(B)$$

donde $B = \{\sum\ m(\Delta_i): E \subseteq \cup \Delta_i\}$, Δ_i son triángulos del plano y $m(\Delta_i)$ es la medida de un triángulo, el cual coincidía con su área. Además, Lebesgue define la *medida interior* de E, como

$$m_i(E) = m(ABC) - m_e(E^c_{ABC})$$

donde ABC es un triángulo que contiene a E y $m_e(E^c_{ABC})$ corresponde a la medida exterior del complemento de E con respecto al triángulo ABC. De esta manera, Lebesgue señala que E es medible si $m_e(E)$=$m_i(E)$ y el valor común es la medida de E, $m(E)$.

Lebesgue plantea el problema de la integral de una función $f \geq 0$ desde una perspectiva geométrica, en donde define $\int_a^b f(x)dx$ como la medida de la región E del plano, donde

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$$

en donde establece que una función $f \geq 0$ es Riemann integrable sí y sólo sí E es $\mathfrak{J}$ −medible[15], y $m(E) = \int_a^b f(x)dx$.

El caso de que la función f se de signo cualquiera, se le hace corresponder

[15] Para una definición de este concepto, ver Bobadilla (2012).

el conjunto

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq yf(x), 0 \leq y^2 \leq f(x)^2, a \leq x \leq b\} = E^+ \cup E^-$$

donde

$$E^+ = \{(x,y) \in E : y \geq 0\}$$

$$E^- = \{(x,y) \in E : y < 0\}$$

en donde Lebesgue establece que una función f con signo cualquiera es Riemann integrable sí y sólo sí E es $\mathfrak{J}$ −medible (y por tanto E^+ y E^- lo son) y

$$m(E^+) - m(E^+) = \int_a^b f(x)dx$$

En base a esto, Lebesgue definió las *funciones sumables* como todas aquellas que hacen que el conjunto E sea medible (y por tanto E^+ y E^-) y definió su integral como $\int_a^b f(x)dx = m(E^+) - m(E^+)$ (ver Figura 28)

17. Ces résultats suggèrent immédiatement la généralisation suivante: ***si l'ensemble E est mesurable, (auquel cas E_1 et E_2 le sont) nous appellerons intégrale définie de f, prise entre a et b, la quantité***

$$m(E_1) - m(E_2).$$

Les fonctions f correspondantes seront dites sommables.

Figura 28: Definición algebraica de funciones sumables (Lebesgue, 1902, p.250)

Para una construcción analítica de la integral, Lebesgue consideró un subconjunto acotado E de $\mathbb{R}$ y definió la medida exterior de E, como

$$m_e(E) = \acute{\imath}nf(B)$$

donde

$$B = \{\sum m(I_k) : E \subseteq \cup\, I_k, I_k es\ un\ intervalo\}$$

Para definir la medida interior, al ser E un conjunto acotado, podemos suponer que $E \subseteq [a,b]$ para algún intervalo $[a,b]$. Si denotamos por $C(E) =$

$[a,b] - E$, entonces la medida interior de E, se define como

$$m_i(E) = m([a,b]) - m_e$$

En base a esto, Lebesgue estableció que un conjunto $E \subseteq [a,b]$ es medible, si

$$m_i(E) = m_e(E)$$

Recalde (2007) señala que para Lebesgue esta definición es equivalente a decir que:

> Un conjunto E se dice medible si es posible encerrar sus puntos en intervalos α, y sus complementos en intervalos β de manera que la suma de longitudes de las partes comunes a los α y los β sea tan pequeña como se quiera. (p.121)

Una vez definida esta medida, Lebesgue (1902) demuestra que esta cumple con las propiedades L_1, L_2 y L_3. Es más, deduce que todos los conjuntos J-medibles son medibles (en el sentido de Lebesgue) y tienen la misma medida. Además, establece que E es medible sí y sólo si existen dos borelianos A_1, A_2 tales que $A_1 \subset E \subset A_2$ y que cumplen con $m(A_1) = m(E) = m(A_2)$.

Para la construcción de su integral, Lebesgue (1902) define los conjuntos

$$e_i = \{x \in [a,b]: f(x) = a_i, i = 0, \ldots, n\}$$

$$e_i^{'} = \{x \in [a,b]: a_i < f(x) < a_{i+1}, i = 0, \ldots, n\}$$

donde $f: [\alpha, \beta] \rightarrow [a,b]$ es una función continua y $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ es una partición del recorrido de f previamente realizada.

A partir de esto, se tiene que $\sigma \leq \int_\alpha^\beta f(x)dx \leq \Sigma$, y como σ y Σ tienen el mismo límite cuando n tiende a infinito, entonces dicho valor común corresponderá a $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ (ver Figura 29).

En cherchant à opérer de même, d'abord dans le cas simple des fonctions continues variables dans tout intervalle, et n'ayant qu'un nombre fini de maxima et minima, puis dans le cas d'une fonction continue quelconque on est facilement conduit à cette propriété. Soit une fonction continue $f(x)$ définie dans (α, β) et variant entre a et b, $(a < b)$. Choisissons arbitrairement

$$a = a_0 < a_1 < a_2 \dots < a_n = b;$$

$f(x) = a_i$ pour les points d'un ensemble fermé e_i, $(i = 0, 1 \dots n)$; $a_i < f(x) < a_{i+1}$ pour les points d'un ensemble, somme d'intervalles, e'_i. $(i = 0, 1, 2 \dots, n-1)$; les ensembles e_i et e'_i sont mesurables.

Les deux quantités

$$\sigma = \sum_0^n a_i\, m(e_i) + \sum_1^n a_i\, m(e'_i), \qquad \Sigma = \sum_0^n a_i\, m(e_i) + \sum_1^n a_{i+1}\, m(e'_i)$$

tendent vers $\int_a^b f(x)\, dx$ quand le nombre des a_i augmente de façon que le maximum de $a_i - a_{i-1}$ tende vers zéro.

Figura 29: Construcción analítica de la integral definida (Lebesgue, 1902, p.253)

Además, Lebesgue prueba que las sumas σ y Σ tienen sentido para las funciones sumables y de manera análoga a lo realizado para funciones continuas, Lebesgue definió la integral de una función sumable.

Una vez definida su integral, Lebesgue demuestra que toda función que es integrable, en el sentido de Riemann, lo es en el sentido de Lebesgue. Además, demuestra la superioridad de su integral con respecto a la de Riemann: *la integrabilidad se preserva con el paso al límite y toda derivada acotada es integrable*.

5.4.2 Construcción de la integral de Lebesgue en *Sur le développement de la notion d´integrale* (1927)

Lebesgue (1927) particionó el recorrido de una función f, definida en un intervalo $[a,b]$, medible y acotada. Los valores $f(x)$ a considerar cumplen con $y_i \leq f(x) \leq y_{i+1}, i = 1,\dots,n,$ y los correspondientes valores de x corresponden a conjuntos E_i (es decir, $E_i = f^{-1}([y_i, y_{i+1}])$ (ver Figura 30)

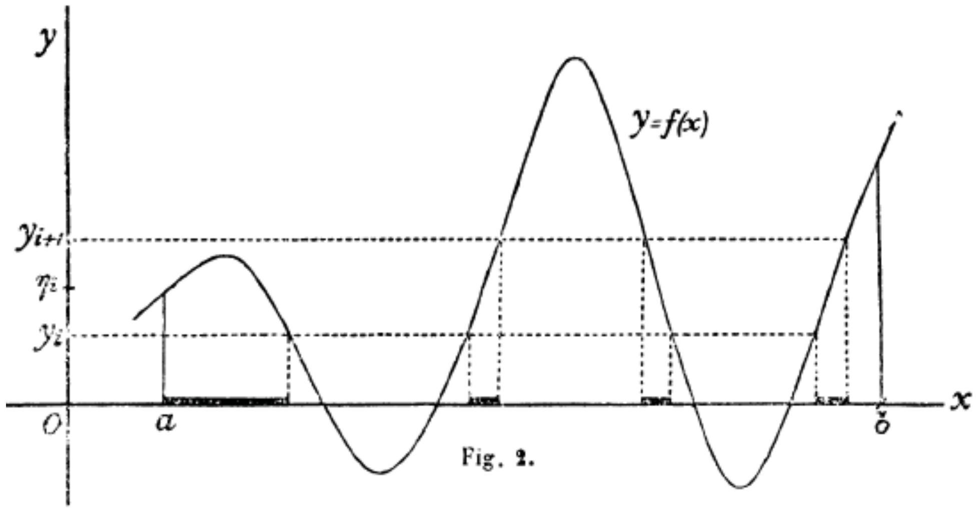


Figura 30: Construcción geométrica de la integral definida (Lebesgue, 1927, 152)

Si η_i es cualquier número tomado del intervalo $[y_i, y_{i+1}]$, entonces Lebesgue define la suma $S = \eta_1 m(E_1)+\ldots+\eta_n m(E_n)$, donde $m(E_k)$ representa la medida del conjunto E_k. Lebesgue probó que esta suma, bajo las condiciones establecidas por él, posee un límite cuando la norma de la partición tiende a cero. A dicho límite, Lebesgue lo denotó por $\int_a^b f(x)dx$.

5.4.3 Construcción de la integral de Lebesgue en *Leçons sur l´intégration. Recherche des fonctions primitives* (1928)

Para construir su integral, Lebesgue (1928), en su obra *Leçons sur L´intégration. Recherche des fonctions primitives,* considera una función f definida sobre un intervalo $[a,b]$ que cumpla con las siguientes condiciones:

1. Existen c y d tales que $c \leq f(x) \leq d, \forall x \in [a,b]$

2. $\forall\, y_1, y_2 \in [c,d]$, $\{y_1 < f(x) < y_2\}$ es medible

A partir de esto, tomó una división P de $[c,d]$, digamos $P = \{c = y_0, y_1, \ldots, y_n = d\}$, y definió los conjuntos D_i, E_i, y $F_i, i = 0, \ldots, n$, como:

$$D_i = \{x \in [a,b]: f(x) = y_i\}$$

$$E_i = \{x \in [a,b]: y_i < f(x) < y_{i+1}\}$$

$$F_i = \{x \in [a,b]: y_{i-1} < f(x) < y_i\}$$

Lebesgue (1928) consideró las siguientes funciones, definidas en $[a,b]$:

$$\phi(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \psi_i(x)$$

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \Psi_i(x)$$

donde ψ_i es la función característica en $D_i \cup E_i$ y Ψ_i es la función característica en $D_i \cup F_i$, y estableció que sus respectivas integrales correspondían a

$$\int_a^b \phi(x)dx = \sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} y_i m(D_i) + \sum_{i=0}^{n-1} y_i m(E_i)$$

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \delta_n = \sum_{i=1}^{n} y_i m(D_i) + \sum_{i=1}^{n} y_i m(F_i)$$

La desigualdad

$$\phi(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \psi_i(x) \leq f(x) \leq \sum_{i=0}^{n} y_i \Psi_i(x) = \varphi(x), \forall x \in [a,b]$$

llevó a Lebesgue a establecer que el valor de $\int_a^b f(x)dx$ debía ser el valor común de los siguientes límites, cuyo valor es independiente de la división P de $[c,d]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty, ||P||\to 0} \sigma_n = \lim_{n\to\infty, ||P||\to 0} \delta_n$$

5.4.4 Construcción de la integral de Lebesgue enmarcada en la actual teoría de la medida

En la actualidad, el concepto de medida de un conjunto ha alcanzado una mayor generalización, al igual que el concepto de función medible, con la introducción de la estructura de σ –álgebra, enmarcada dentro de la actual teoría de la medida. La construcción de la integral de Lebesgue, se resume en los siguientes puntos:

1. Una familia de subconjuntos de Ω, representada por A, es una σ –álgebra sobre Ω cuando se cumplen las siguientes condiciones:

   a) $\phi \in \Omega$
   b) $E \in A \Rightarrow E^c \in A$
   c) $E_n \in A, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in A$

2. Una función μ: $A \to [0,\infty]$ es una medida sobre la σ –álgebra A, si $\mu(\phi) = 0$ y $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$, para cualquier colección $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de A disjunta dos a dos.

3. Un trío (Ω, A, μ) se dice que es un espacio de medida si A es una σ –álgebra en Ω y μ es una medida. El par (Ω, A) es un espacio medible y los elementos de A se llamarán conjuntos medibles.

4. Si tenemos dos espacios medibles (Ω, A) y (Σ, B), diremos que una función $f: \Omega \to \Sigma$ es medible, si la imagen inversa de todo conjunto medible en Σ está en Ω. En otras palabras,

$$f \text{ medible} \Leftrightarrow f^{-1}(C) \in A, \forall C \in B$$

5. Sea (Ω, A, μ) un espacio de medida y s una función simple de la forma

$$s = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k}$$

donde $A_k = \{x \in \Omega : s(x) = \alpha_k\}$. Si $E \in A$, se define:

$$\int_E sd\mu = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(A_k \cap E)$$

La convención $0 \cdot \infty = 0$ debe ser considerada en esta definición. Podría suceder que $\alpha_k = 0$, para algún k y que justamente $\alpha_k \mu(A_k \cap E) = \infty$.

6. Si $f: (\Omega, A, \mu) \rightarrow [0, \infty]$ es una función medible y $E \in A$, se define

$$\int_E fd\mu = sup_{0 \leq s \leq f} \int_E sd\mu$$

Hasta este punto, se ha construido la integral de Lebesgue para funciones medibles y positivas. Si $f: (\Omega, A, \mu) \rightarrow [-\infty, \infty]$ es una función medible, es posible demostrar que las funciones

$$f^+ = máx\{f, 0\}$$

$$f^- = -mín\{f, 0\}$$

son medibles. Además, como $f = f^+ - f^-$, para $E \in A$, se define

$$\int_E fd\mu = \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu$$

siempre que al menos una de las integrales en el lado derecho de la igualdad sea finita.

5.5 Resumen del análisis histórico-epistemológico

Los orígenes de la integral definida los encontramos en la medida de magnitudes geométricas y la cuadratura de figuras planas, en donde Cavalieri, con la introducción de la noción de indivisibles realizó aportes significativos en el cálculo de áreas. Wallis aritmetiza la idea de indivisibles, transformando el problema de la cuadratura en el cálculo del área bajo la curva (Bobadilla, 2012). Bobadilla (2012) señala que “con Newton y Leibniz se le da un tratamiento algebraico a este nuevo problema, y con el establecimiento de las tablas de cuadraturas y anticuadraturas, aparece la integral como la operación inversa de la derivada” (p. 20).

A principios del siglo XVIII, el problema de la integración estaba ligado a encontrar una solución de una ecuación diferencial. Con la aparición de las series de Fourier reaparece la noción geométrica de la integral, en donde emerge un cuestionamiento sobre el cómo definir la integral cómo área cuando la función es arbitraria. Cauchy, desligándose de lo geométrico y dando un tratamiento analítico, construye el concepto de integral cuando la función es continua, y posteriormente amplió su definición para funciones con un número finito de discontinuidades. Dirichlet extendió la definición de Cauchy para funciones con un número infinito de discontinuidades. A partir de este punto, surge un cuestionamiento sobre las condiciones que debía cumplir el conjunto de puntos de discontinuidades de una función para que esta fuese integrable.

Riemann, logró ampliar la definición de integral a funciones que incluso eran discontinuas en un conjunto denso de puntos, además de establecer criterios para que una función fuese integrable. Jordan logra dar una respuesta a su pregunta por medio de la introducción del concepto de contenido de un conjunto, en donde además pudo relacionar la idea de contenido con la de integración, introduciendo la idea de medida de un conjunto por primera vez en la teoría de integración.

Finalmente, Lebesgue regresa a la concepción geométrica de la integral, construyendo una integral, en base a la idea de medida de un conjunto, que generalizó las definiciones de sus antecesores y que solucionó distintos problemas matemáticos de la época, como el problema de la medida, el cálculo de primitivas y la convergencia de series trigonométricas.

El análisis histórico-epistemológico realizado, se resume en la Tabla 7

Tabla 7

Resumen del análisis histórico-epistemológico de la integral definida.

AÑO	
1635	Bonaventura Cavalieri en su trabajo titulado *Geometria Indivisibilibus Continuorum Nova quadam Ratione Promota* desarrolló una técnica geométrica para calcular cuadraturas, llamada método de los indivisibles. En este método, un área de una región plana se considera formada por un número infinito de segmentos paralelos, cada uno de ellos se interpreta como un rectángulo infinitamente estrecho; un volumen se considera compuesto por un número infinito de áreas planas paralelas. A estos elementos los llama los indivisibles de área y volumen respectivamente.
1655	John Wallis, en su obra denominada *Arithmetica infinitorum* aritmetizó el método de los indivisibles de Cavalieri, para hallar el área bajo la curva $y = x^n$.
1669	Newton, en su obra titulada *De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, desarrolló el teorema fundamental del cálculo, reconociendo la relación inversa entre problemas de cuadraturas y de tangentes.
1675	Leibniz llamó *calculus diferentialis*, esto es "cálculo de diferencias", a la parte de su cálculo que se ocupa del estudio de tangentes, y *calculus summatorius*, o sea "cálculo de sumas", a la que se ocupa de problemas de cuadraturas. Para Leibniz una integral es una suma de infinitos rectángulos infinitesimales, el símbolo que ideó para representarlas, "$\int \quad l$", tiene forma de una "s" alargada como las que en aquel tiempo se usaban en la imprenta.
1690	Jacques Bernoulli (1654-1705) fue quien usó por primera vez la expresión "integral" en su obra sobre la isócrona en la *Acta Eruditorum* de 1690, anteriormente (en 1680) él ya había sugerido dicha expresión a Leibniz, que utilizó la expresión calculus integralis (en sustitución a calculus summatorius) para referirse al proceso inverso del calculus differentialis (Boyer, 1974, pp. 306-307, citado en Crisóstomo, 2012).
1742	Jean Bernoulli en su obra titulada *Opera omnia*, define la integral

	como la operación inversa a derivar, diferente a la concepción de Leibniz, que consideraba integrar como suma de cantidades infinitamente pequeñas
1822	Joseph Fourier, quien evidenció la necesidad de un tratamiento serio para las funciones discontinuas en sus investigaciones sobre la conducción del calor, necesitó indagar en $\int_a^b f(x)dx$ donde f es una función arbitraria, para poder determinar los coeficientes de la serie que lleva su nombre. Para esto, era necesario retomar la idea de integral como área y no como una antiderivada dada la arbitrariedad de la función.
1823	Cauchy, comienza con el estudio de $\int_a^b f(x)dx$, logrando dar una definición analítica, cuando f es una función continua en $[a,b]$
1882	Emille Jordan trabajó con el concepto de contenido de un conjunto, definiendo los conjuntos J-medibles y redefiniendo la integral de Riemann en base a esta teoría.
1898	Émilé Borel en su obra *Leçons sur la théorie des fonctions*, define la medida de Borel, mediante la cual introduce los llamados conjuntos borelianos o conjuntos B-medibles
1902	Lebesgue, basado en la teoría de contenido de Jordan y la noción de medida de Borel, construye su integral.

Capítulo 6.

Formulación de un modelo preliminar de anidación de prácticas y de una propuesta de marco de referencia de los $\mathcal{U}(med)$

"El dME se caracteriza por lo hegemónico y utilitario, desprovisto de marcos de referencia, con lo cual impone significados, argumentos y procedimientos centrados en los objetos matemáticos." (Soto y Cantoral, 2014, p.1525)

6.1 Sobre clasificar

Según la Real Academia Española (RAE), clasificar se define como *ordenar o disponer por clases algo*. Para Hernández y Soriano (1997) “clasificar es agrupar siguiendo algún criterio o distinguiendo atributos” (p. 33). Para Cardoso y Cerecedo (2008) “la clasificación se define como juntar por semejanzas y separar por diferencias con base en un criterio” (p.3). Según Bruno, Noda, Aguilar, González, Moreno y Muñoz (2006) “la clasificación significa percibir las cualidades de las cosas y distinguir sus semejanzas y diferencias, agrupándolas o separándolas de acuerdo con estas cualidades.” (p.215). En síntesis, podemos señalar, en términos generales, que cuando se habla de clasificar un determinado conjunto, se hace referencia a una agrupación de sus elementos por medio de algún criterio específico.

La clasificación está presente en diversas actividades del ser humano, dependiendo de la tarea o necesidad existente. Por mencionar sólo algunas, está presente cuando se clasifican objetos según su color; cuando se clasifican los animales dependiendo de si tienen vértebras o no, o según la temperatura de su sangre o de si poseen patas o no; cuando se clasifica la basura para poder llevar a cabo un proceso de reciclaje; cuando se clasifica a un grupo de personas según su nacionalidad, su sexo o su rango de edad, entre otras (Ver Figura 31).

Figura 31: Ejemplos de clasificación.

La clasificación aparece también en muchas situaciones propias de la matemática. Por ejemplo, los triángulos se clasifican según sus lados (equilátero, isósceles y escaleno) o según sus ángulos (acutángulo, rectángulo y obtusángulo); los números naturales se clasifican en pares e impares o primos y compuestos; los polígonos se clasifican según sus lados (regulares o irregulares), etc.

La clasificación juega un rol importante en la construcción de conocimiento matemático. Esto lo podemos ver en algunos ejemplos, tales como las relaciones de equivalencia que puedan definirse sobre un conjunto no vacío X. Una relación de equivalencia $\sim_R$, definida sobre X, es una relación binaria que cumple con las siguientes propiedades:

a. $\forall x \in X, x \sim_R x$ (reflexividad)
b. $\forall x, y \in X, x \sim_R y \Rightarrow y \sim_R x$ (simetría)
c. $\forall x, y, z \in X, x \sim_R y \wedge y \sim_R z \Rightarrow x \sim_R z$(transitividad)

Dicha relación es un criterio específico que *clasifica* a los elementos de X, en las llamadas *clases de equivalencia*, denotadas por $[a]$, donde

$$[a] = \{x \in X : x \sim_R a\}$$

y donde al elemento $a \in X$ se le llama representante de la clase. Al conjunto de clases de equivalencia, se le denomina espacio cociente y se le denota por

$$X/{\sim_R} = \{[a] : a \in X\}$$

Las relaciones de equivalencia son criterios de clasificación que permiten la construcción de diversas estructuras matemáticas, como sistemas numéricos específicos ($\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$), grupos, anillos y espacios vectoriales, por mencionar algunas. Por poner un ejemplo específico, una manera de construir el sistema numérico de los números racionales $\mathbb{Q}$, es a partir de un criterio específico de clasificación, dado por una relación de equivalencia:

Sobre el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\}$ se define la siguiente relación $\sim_R$

$$(a, b) \sim_R (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$$

verifiquemos que $\sim_R$ es una relación de equivalencia.

a. Reflexividad: $(a,b) \sim_R)$ pues $ab = ab$

b. Simetría: $(a,b) \sim_R (c,d) \Leftrightarrow ad = bc \Leftrightarrow cb = da$. Luego, $(c,d) \sim_R (a,b)$

c. Transitividad: Si $(a,b) \sim_R (c,d)$ y $(c,d) \sim_R (e,f)$, tenemos que $ad = dc$ y $cf = de$. De esta manera, si multiplicamos ambas expresiones, tenemos que $adcf = bcde$ y por lo tanto, tenemos que $af = be$. Luego, $(a,b) \sim_R (e,f)$.

En el espacio cociente $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\}/\sim_R$, se definen las operaciones suma y producto como

$$[(a,b)] + [(c,d)] = [(ad + bc, bd)]$$

$$[(a,b)] \cdot [(c,d)] = [(ac, bd)]$$

Se puede comprobar que ambas operaciones están bien definidas (con respecto a la relación de equivalencia). Luego, se define el sistema numérico de los números racionales como $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\}/\sim_R$, dotada de la suma y producto definidas anteriormente. En este caso, la relación de equivalencia definida anteriormente es un criterio de clasificación sobre el conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\}$, la cual fue una práctica que permitió la construcción de $\mathbb{Q}$.

Con los ejemplos dados hasta el momento, se podría pensar que la idea de clasificar un conjunto es equivalente a realizar una partición de este. Es más, Cofré y Tapia (2003) así lo entienden cuando señalan que “clasificar es formar subconjuntos o clases de acuerdo a un criterio. Las clases no tienen elementos comunes y todos los elementos pertenecen a alguna clase” (p.64).

Sin embargo, la idea de clasificar un conjunto no implica necesariamente que este sea particionado; es para nosotros una idea más amplia. Por ejemplo, si tenemos un conjunto de personas que estudian idiomas (ver Tabla 8) (digamos inglés, francés y alemán), podríamos clasificar este conjunto, bajo el criterio de que estudien alguno de estos idiomas: inglés, francés, alemán.

Tabla 8

Estudiante	**Idiomas que estudian**
Pedro	inglés
Juan	francés
Diego	alemán
José	inglés y francés
Fernanda	inglés, francés y alemán
Natalia	francés y alemán
Claudio	inglés, francés y alemán

I =Personas que estudian inglés: Pedro, José, Fernanda y Claudio
F =Personas que estudian francés: Juan, José, Fernanda, Natalia y Claudio
A =Personas que estudian alemán: Diego, Fernanda, Natalia y Claudio

Como podemos ver, este criterio permite clasificar al conjunto de estudiantes en los conjuntos I, F, A, los cuales no son disjuntos dos a dos. Por lo tanto, podemos hablar de clasificar un conjunto, sin necesariamente realizar una partición sobre este.

Por lo tanto, realizar una clasificación sobre un conjunto X es una idea que, para nosotros, amplía a la de particionar dicho conjunto. Esta idea ampliada de clasificación también permite construir conocimiento matemático en distintos contextos y situaciones, como veremos más adelante.

6.2 Sobre medir

Según la RAE, hablar de medir hace referencia a “tener determinada dimensión, ser de determinada altura, longitud, superficie, volumen, etc.”

Para Bobadilla (2012), muchos de los problemas matemáticos (y en particular, el estudio del problema de la medida) surgen en la antigüedad por la necesidad de resolver cuestiones concretas, provenientes del mundo fenomenológico. En la cultura mesopotámica (2000-500 a.C.), un tema de interés en el estudio de la medida, fue el cálculo del área del cuadrado y del círculo (con un valor aproximado de π cercano a 3) y el cálculo de volúmenes de diversos cuerpos. Mismo interés existió en la cultura egipcia (2000 - 500 a.C.) y en la griega (800 a.C.–400 d.C.), en donde se llega a compilar, en el estudio de la geometría, una colección de proposiciones abstractas acerca de formas ideales y pruebas de estas proposiciones. Además, los griegos realizan importantes aportes en la forma de medir el área de superficies limitadas por figuras curvas y el volumen de sólidos limitados por superficies curvas, donde destaca el método exhaustivo de Arquímedes. Sin embargo, hasta ese entonces, la idea de medir un conjunto no tenía una definición clara, pero estuvo siempre ligada a la idea de asignar a ángulos, segmentos, superficies y cuerpos, **un número no negativo**, con la finalidad de estimar sus “tamaños”[16] y poder así realizar, por ejemplo, procesos de comparación.

Durante el siglo XIX, la idea de medir un conjunto emerge ante la necesidad de estimar el “tamaño” de conjuntos de puntos. En particular, durante los procesos de construcción del concepto de integral, la necesidad de estudiar el conjunto de puntos de discontinuidad de una función, llevó, de manera incipiente, a que varios matemáticos de la época contribuyeran al desarrollo de una teoría de la medida, en donde destaca lo realizado por Lebesgue (1902), quien logró establecer las características que debe de cumplir una función de conjuntos, **que toma valores no negativos**, para llamarse una medida (es decir, que sea invariante ante traslaciones y **contablemente aditiva**), además de establecer la manera de medir determinados conjuntos. Actualmente, en teoría de la medida, el concepto de medida es definido como una función de conjuntos, definida sobre una sigma álgebra, **que toma valores no negativos y es contablemente aditiva.** Esta definición de medida generaliza, en particular, a la definición de medida realizada por Lebesgue (1902) y considera como medida de conjuntos, entre otras, al conteo, la probabilidad, el área, el volumen y la longitud.

Sin embargo, también debemos señalar que existen **medidas negativas**.

[16] En Boyer (2013), se muestran varios ejemplos de estudios relacionados al problema de la medida, realizados antes del siglo XIX, entre los que destacan el problema de calcular determinadas longitudes, calcular el área de un círculo, de un triángulo, de un segmento parabólico, de una región plana con lados curvos; el volumen de un segmento de paraboloide, de una esfera, de un cilindro, entre otros.

Ejemplo de esto, es la temperatura, la cual mide la energía térmica de un cuerpo. También en teoría de la medida se trabaja con este tipo de medidas, denominadas medidas signadas.

6.3 Sobre aproximar

Según la RAE, aproximar significa “obtener un resultado tan cercano al exacto como sea necesario para un propósito determinado”. La aproximación está presente en situaciones de la vida diaria, como por ejemplo, cuando una persona ve su reloj y aproxima la hora que es o cuando se aproxima el promedio de calificaciones que un estudiante tuvo en determinado curso. En matemática, esta práctica aparece en situaciones como aproximación numérica, aproximación de funciones y aproximación geométrica, entre otras.

En esta investigación, clasificar, medir y aproximar son consideradas como prácticas, dentro de la construcción de la integral de Lebesgue (1902), dada su naturaleza social y compartida y su carácter intencional, dentro de la construcción de esta integral.

6.4 Clasificar, medir y aproximar: prácticas presentes en la construcción de la integral de Lebesgue

Con respecto al proceso de construcción de la integral de Lebesgue, realizada en 1902, Galaz-García (2007) plantea lo siguiente:

> Lebesgue compara el proceso de integración con el de contar cuánto dinero tenemos en un conjunto de monedas de distintas denominaciones. Integrar a la manera de Riemann correspondería con ir sumando los valores de las monedas en el orden en que éstas se nos van presentando. Por otra parte, para integrar a la manera de Lebesgue, primero agrupamos las monedas por su denominación y contamos cuántas monedas de cada tipo tenemos, por ejemplo: n_1 monedas de 1 peso, $n_2$monedas de 2 pesos, y así hasta agrupar todas las denominaciones; después sumamos $1(n1) + 2(n_2)+\ldots$ hasta terminar. ¡La manera de Lebesgue parece más eficiente!
>
> (p. 88)

Mientras que Hoare y Lord (2002) añaden que:

> Lebesgue's construction of the integral was fundamentally different from those of all his predecessors and, as readers will probably know, his brilliant but simple idea was to partition the range of a function rather than its domain of definition as Riemann had done. In this regard Lebesgue was wont to quote a parable about a shopkeeper totalling the receipts at the end of the day. The Riemann integral corresponds to just adding up the receipts in order but the Lebesgue integral corresponds to first *sorting the receipts by denomination* [cursiva añadida], totalling the amount of each denomination, and then adding up the subtotals.
>
> (p.5)

Lo anteriormente planteado por estos autores, hace referencia a una metáfora que le permitió a Lebesgue explicar la manera en la que construyó su integral. En esta metáfora, podemos ver que existe una forma de *clasificar* el conjunto de monedas, la cual es por medio de una agrupación por igual denominación, mientras que la forma de *medir* cada uno de estos conjuntos es a través del conteo. Posteriormente, después de contar cuántas monedas de igual denominación hay, se procede a sumar cada una de estas medidas.

Por lo tanto, podemos ver que en esta metáfora están presentes las prácticas de *clasificar* y *medir.* A continuación, veremos cómo dichas prácticas, junto con la aproximación, están asociadas a la construcción del concepto de integral en la obra de Lebesgue titulada *Integrale, Longeur, Aire* de 1902.

6.4.1 Integrale, Longeur, Aire (1902)

Dada una división $a = a_0 < a_1 <\ldots< a_n = b$ del recorrido de una función acotada f, resulta evidente que, para cada $i = 0,\ldots,n$, los conjuntos definidos por Lebesgue:

$$e_i = \{x \in [a,b]: f(x) = a_i\}$$

$$e_i^{'} = \{x \in [a,b]: a_i < f(x) < a_{i+1}\}$$

son disjuntos dos a dos. De esta forma, esta división del recorrido permite clasificar los elementos del dominio en los conjuntos e_i y $e_i^{\prime}$, $i = 0, \ldots, n$, los cuales son medidos y dicha medida ponderada por un número real, para posteriormente sumarse entre sí. En otras palabras, la base para el proceso de construcción de esta integral, es realizar una suma ponderada de las medidas de aquellos conjuntos generados por un proceso previo de clasificación. Dicha suma, resulta ser una aproximación del valor de la integral.

En la Figura 32 podemos ver cómo aparecen e interactúan las prácticas de clasificar, medir y aproximar en lo realizado por Lebesgue (1902).

Clasificar	Medir	Aproximar
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
$e_i = \{x \in]\alpha, \beta[: f(x) = a_i\}$ $e'_i = \{x \in]\alpha, \beta[: a_i < f(x) < a_{i+1}\}$, $i = 0, \ldots, n$ e_i, e'_i son particiones de $]\alpha, \beta[$ y $f:]\alpha, \beta[\to [a, b]$ es una función sumable $(a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b)$.	$m(e_i), m(e'_i)$ $i = 0, \ldots n$ donde, $m(A) = m_i(A) = m_e(A)$	$\sigma = \sum_{i=0}^{n} a_i m(e_i) + \sum_{i=1}^{n} a_i m(e'_i)$ $\Sigma = \sum_{i=0}^{n} a_i m(e_i) + \sum_{i=1}^{n} a_{i+1} m(e'_i)$

Figura 32: Presencia e interacción de las prácticas de clasificar, medir y aproximar en la construcción de la integral definida de Lebesgue (1902)

6.5 Modelo preliminar de anidación de prácticas

A partir del análisis histórico-epistemológico, se ha encontrado una práctica de referencia de dotó de cierta racionalidad a Lebesgue para la construcción de la integral en su obra denominada *Integrale, Longueur, Aire*, de 1902, la cual denominamos *surgimiento de la medida de conjuntos como teoría*. Dicha práctica de referencia estuvo ligado con el paradigma en donde se comenzó a teorizar la noción de medida de un conjunto, junto con su utilización en los procesos de construcción del concepto de integral definida, en donde distintos matemáticos, tales como Jordan, Borel y Lebesgue, entre otros, centraron su interés en una manera de darle una salida conceptual a la noción medida, así como qué tipo de conjuntos resultaban ser o no medibles.

Dentro de esta práctica de referencia, identificamos la presencia e interacción de tres prácticas: *clasificar*, *medir* y *aproximar*. A continuación, daremos a conocer algunas acciones que podrían perfilar estas prácticas.

- *Relacionar*: Para llevar a cabo una clasificación sobre un conjunto, es necesario establecer una relación sobre sus elementos, para así agruparlos bajo determinadas características. Por lo tanto, relacionar es una acción necesaria para poder clasificar.

- *Comparar*: Según Reyes-Gasperini (2016), medir es una práctica y la acción de comparar es una estrategia emergente ante la imposibilidad de medir lo inconmensurable. En este caso, "la comparación se considera una acción que nos permite estimar medidas desconocidas, con base en medidas conocidas" (Reyes-Gasperini, 2016, p. 539). Para medir subconjuntos del plano, Lebesgue (1902) utilizó medidas conocidas como el área de triángulos y para medir subconjuntos de la recta utilizó medidas conocidas como la longitud de intervalos. En resumen, ante la característica inconmensurable de medir determinados conjuntos, Lebesgue tuvo que comparar para poder medir.

- *Agrupar*: Para aproximar el valor de $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ por medio de las sumas σ y Σ, Lebesgue (1902) primero construyó las expresiones $a_i m(e_i)$ y $a_i m(e_i^{'})$. Cada uno de estos términos representa una suma por agrupación de cantidades "similares". Por lo tanto, para aproximar el valor de dicha integral, Lebesgue primero tuvo que agrupar. En la Figura 33, es posible dar cuenta de un modelo preliminar de anidación de prácticas en relación a la integral de Lebesgue.

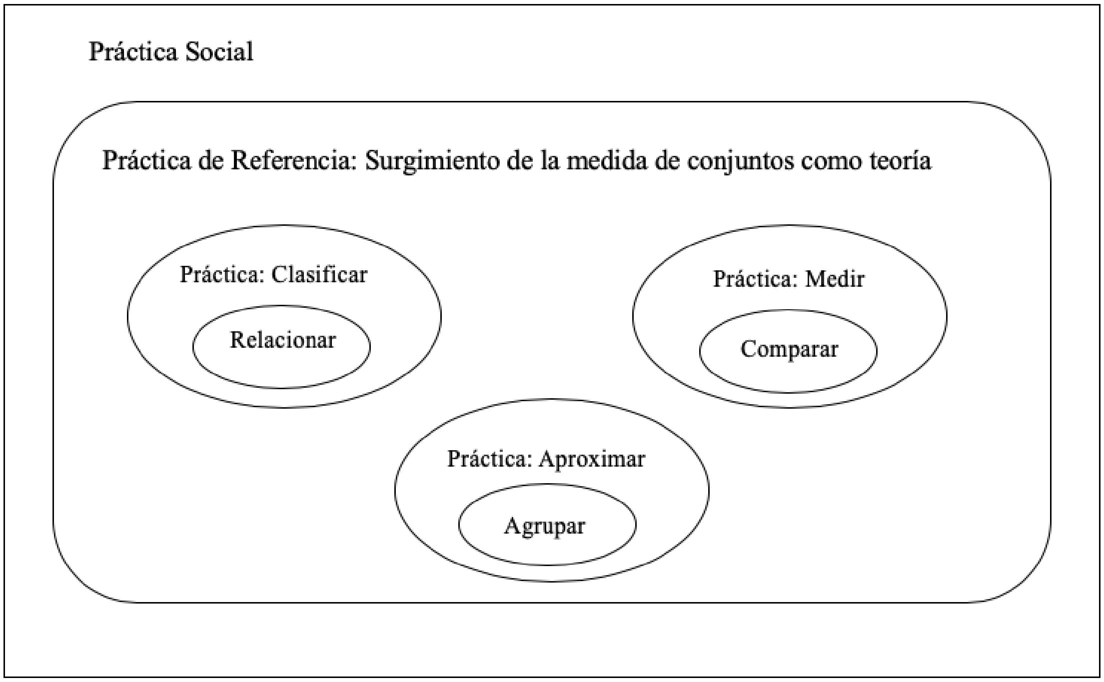


Figura 33. Modelo preliminar de anidación de prácticas en relación a la integral de Lebesgue

6.6 Propuesta de Marco de Referencia de los $\mathcal{U}(med)$

En el dME (ver, por ejemplo, Gordon, 1994; Mira, 2010 y Morales, 2005), podemos encontrar que la *significación* de la integral construida por Lebesgue (1902) está asociada a una generalización de la integral de Riemann a una clase más amplia de funciones. El *procedimiento* asociado a la integral de Lebesgue se encuentra en un proceso de aproximación de integrales de funciones simples. Finalmente, la *argumentación* viene dada por la necesidad de construir una integral que sea capaz de resolver diversos problemas matemáticos que la integral de Riemann no resuelve. En el análisis de la obra de Lebesgue (1902), hemos podido encontrar una argumentación distinta a la que plantea el dME, la cual proviene de una perspectiva geométrica. A partir de esta argumentación, nace un significado y un procedimiento también distinto a lo impuesto por el dME. En resumen, se evidencia el carácter hegemónico del dME.

Para confrontar dicha hegemonía, se formulará un MR que se enfoque en los $\mathcal{U}(med)$ y que de cuenta de argumentaciones, significados y procedimientos que no están presente en el dME.

Para formular dicho MR, comenzaremos presentando los funcionamientos y formas de los $\mathcal{U}(med)$, identificados en los escenarios de la obra de Lebesgue y de la Economía. Posteriormente, y en búsqueda de la transversalidad, se inferirán las significaciones, los procedimientos, el instrumento útil al humano y la argumentación.

En los escenarios de la obra de Lebesgue y de la Economía, hemos logrado identificar los $\mathcal{U}(med)$ a través de un funcionamiento y forma (ver Tabla 9)

Tabla 9

Los $\mathcal{U}(med)$ en la obra de Lebesgue y en el escenario de la Economía.

$\mathcal{U}(med)$	Funcionamiento (¿Para qué se usa?)	Forma (¿Cómo se usa?)
Obra de Lebesgue	Para medir los conjuntos $e_i = \{x \in [a,b]: f(x) = a_i, i = 0,\ldots,n\}$ $e_i^{\prime} = \{x \in [a,b]: a_i < f(x) < a_{i+1}\}$ $i = 0,\ldots,n$ donde f es una función sumable.	$m(E) = m_i(E) = m_e(E)$ donde E es medible, en el sentido de Lebesgue.
Economía	Para medir los conjuntos E_i= conjunto de unidades que serán demandadas si se está dispuesto a pagar, por la compra del producto en cuestión, un precio p, con $p_i \leq p \leq p_{i+1}$ $(i = 0,\ldots,n-1)$	$m(E_i) = q_{i+1} - q_i$ donde q_j representa las unidades demandadas si el precio unitario es p_j

Situación: Medición

Comenzaremos precisando cómo es que la *situación de medición* aparece tanto en la situación en la que Lebesgue (1902) construyó su integral como en la situación de Economía denominada *cálculo teórico de los EC*. Cabe señalar, que en esta investigación entenderemos por *situación de medición* a aquella situación en la que se busca medir un determinado fenómeno, magnitud, conjunto, etc.

- Para construir su integral, Lebesgue buscó medir subconjuntos del plano cartesiano (para una construcción geométrica de la integral) y de la recta real (para una construcción analítica de la integral). Para ello, construyó una función medida m -apoyándose en el concepto de contenido de Jordan y de medida de Borel- que tomase valores en el intervalo $[0,\infty]$, y que cumpliese con las siguientes tres propiedades:

1. $m(E) \neq 0$, para algún E.
2. Dos conjuntos iguales tienen la misma medida.
3. La medida de la unión de un número finito o infinito numerable de conjuntos disjuntos entre sí, es la suma de la medida de estos conjuntos.

Para Lebesgue, buscar una forma de medir subconjuntos del plano cartesiano se debió a una necesidad por generalizar la idea de integral definida como "área bajo la curva", buscando definir $\int_a^b f(x)dx$ como la medida de un cierto subconjunto del plano cartesiano. Por lo tanto, podemos decir que la construcción de la integral de Lebesgue se enmarca dentro de una *situación de medición*.

- En el caso de la Economía, los EC se enmarcan dentro de una situación en la que se busca medir el bienestar económico de los consumidores.

Argumentación: Cuantificación.

En primer lugar, daremos cuenta de que el hilo conductor, de donde emergen los conocimientos matemáticos, en ambas situaciones específicas, viene dado por la *cuantificación*.

- Ya establecida la forma en la que se pueden medir subconjuntos del plano cartesiano, la construcción de la integral de Lebesgue (1902) utilizó esta manera de medir para generalizar la idea de integral definida como "área bajo la curva", buscando medir el conjunto

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq yf(x), 0 \leq y^2 \leq f(x)^2, a \leq x \leq b\}$$

  En otras palabras, la búsqueda por *cuantificar* el "tamaño" del conjunto E fue la argumentación que permitió construir el concepto de integral de Lebesgue.

- En el caso de Economía, ya establecida la forma en la que se puede medir el bienestar económico de los consumidores, el cálculo teórico los EC se realiza para *cuantificar* dicho bienestar. Esta argumentación permite construir la expresión $EC = \int_0^q (p - p_0)\, dq$.

Significación: Medida de un conjunto.

En segundo lugar, daremos cuenta de que la significación en ambas situaciones específicas está asociada a la *medida de un conjunto*.

- En la obra de Lebesgue, un significado asociado a la integral definida es la de *medida* signada del conjunto

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq yf(x), 0 \leq y^2 \leq f(x)^2, a \leq x \leq b\} = E^+ \cup E^-$$

donde

$$E^+ = \{(x, y) \in E : y \geq 0\}$$

$$E^- = \{(x, y) \in E : y < 0\}$$

Lo cual podemos ver cuando Lebesgue define su integral como

$$m(E^+) - m(E^+) = \int_a^b f(x)dx$$

- En el caso de Economía, un significado asociado de los EC es el de *medida* (área) de la región del plano cartesiano comprendida entre la curva de demanda $p = p(x)$ y la recta $p = p_0$, donde p_0 corresponde al precio unitario de mercado de cierto producto.

Procedimiento: Clasificación.

En tercer lugar, daremos cuenta de que el procedimiento en ambas situaciones específicas viene dado por la práctica de *clasificación.*

- El procedimiento realizado por Lebesgue (1902), para la construcción analítica de su integral, consiste en *clasificar* los elementos del dominio de una función $f: [\alpha, \beta] \to [a, b]$, en los conjuntos

$$e_i = \{x \in [a, b]: f(x) = a_i, i = 0, \ldots, n\}$$

$$e_i' = \{x \in [a, b]: a_i < f(x) < a_{i+1}\}$$

con $i = 0, \ldots, n$ y donde $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$.

- El procedimiento realizado para el calcular teóricamente los EC, consiste en *clasificar* el conjunto de unidades demandadas, en los conjuntos E_i, donde

E_i = conjunto de unidades que serán demandadas si se está dispuesto a pagar, por la compra del producto en cuestión, un precio p, con $p_i \leq p \leq p_{i+1}$ $(i = 0, \ldots, n-1)$

Instrumento útil al humano: Lo medible.

Finalmente, daremos cuenta de que el instrumento útil al humano, en ambas situaciones específicas viene dado por lo que denominamos *lo medible*.

- Para la construcción analítica de su integral, Lebesgue necesita trabajar con funciones que garanticen que los conjuntos e_i y e_i' sean medibles. Como dimos cuenta anteriormente, a las funciones que cumplen esta propiedad, Lebesgue las denominó *sumables.* Por lo tanto, la construcción de esta integral depende de *lo medible* de los conjuntos e_i y e_i'.

- En el caso de Economía, para calcular teóricamente los EC es necesario que la función de demanda que se utiliza para dicho cálculo, garantice que los conjuntos E_i, $i = 0, \ldots, n-1$ existan y se puedan medir (en este caso, contar). Dicho de otra forma, la realización de este cálculo teórico depende de *lo medible* de E_i, lo cual es posible ya que en este caso se trabaja con una función continua y decreciente (debido a la ley de demanda).

Un resumen de lo señalado anteriormente se puede ver en la Tabla 10.

Tabla 10

Exhibición de lo transversal en la obra de Lebesgue y en el escenario de Economía.

	Obra de Lebesgue	**Economía**
Significaciones	Medida del conjunto $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq yf(x), 0 \leq y^2 \leq f(x)^2, a \leq x \leq b\}$	Área de la región del plano cartesiano comprendida entre la curva de demanda $p = p(x)$ y la recta $p = p_0$, donde p_0 corresponde al precio unitario de mercado de cierto producto
Procedimientos	Clasificación del dominio de la función $f: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$, en los conjuntos $e_i = \{x \in [a,b] : f(x) = a_i, i = 0, \ldots, n\}$ $e_i^{'} = \{x \in [a,b] : a_i < f(x) < a_{i+1}\}$	*Clasificar* el conjunto de unidades demandadas, en los conjuntos E_i, donde E_i=conjunto de unidades que serán demandadas si se está dispuesto a pagar, por la compra del producto en cuestión, un precio p, con $p_i \leq p \leq p_{i+1}$ $(i = 0, \ldots, n-1)$
Instrumento útil al humano	Lo medible de los conjuntos e_i y $e_i^{'}$, $i = 0, \ldots, n$	Lo medible de los conjuntos E_i, $i = 0, \ldots, n-1$
Argumentación	Cuantificar el “tamaño” del conjunto E	Cuantificar el bienestar económico de los consumidores

La propuesta

En base a todo lo señalado anteriormente, es posible generar una epistemología de $\mathcal{U}(med)$, en donde en una *situación de medición específica*, la significación asociada es la de *medida de un conjunto* y el procedimiento corresponde a la *clasificación*. Pero esta significación y procedimiento dependen de *lo medible* de los conjuntos resultantes de dicha clasificación, permitiendo así cuantificar determinado fenómeno, magnitud, conjunto, etc. En la Tabla 11 se resume la epistemología de $\mathcal{U}(med)$ en esta situación específica.

Tabla 11

Epistemología de $\mathcal{U}(med)$

	Situación Núcleo
Construcción de lo matemático	Medición
Significaciones	Medida de un conjunto
Procedimientos	Clasificación
Instrumento útil al humano	Lo medible
Argumentación	Cuantificación

Capítulo 7.

Conclusiones y discusiones generales de la investigación.

"Para entender las causas del fracaso escolar en matemáticas se debe considerar entonces, al mismo tiempo que al contenido, al conjunto de elementos institucionalizados que expresan una construcción social con sentido para el que aprende; estos saberes matemáticos deben su existencia, no a los motivos de su enseñanza, sino al hecho de haber estado al servicio de otros dominios científicos y de otras prácticas de referencia". (Tuyub y Cantoral, 2012, p. 312-313)

7.1 Sobre los objetivos de la primera parte de investigación

En la primera parte de esta investigación, la problemática evidenciada fue que el dME opaca los $\mathcal{U}(ac)$ y excluye a los actores del sistema didáctico de la construcción de la integral definida. Para confrontar dicha problemática, se planteó como objetivo general el desarrollar la $\zeta(Mod)$ como una $Res(\mathcal{U}(ac))$ en dos situaciones específicas de variación. La primera $Res(\mathcal{U}(ac))$ ocurrió en el escenario de la Fenología, en donde la situación específica se denominó *cálculo teórico de la constante térmica* y la segunda $Res(\mathcal{U}(ac))$ ocurrió en el escenario de la Economía, en donde la situación específica se denominó *cálculo teórico de los excedentes de los consumidores*.

En el escenario de la Fenología, se ofreció una $Res(\mathcal{U}(ac))$ al problematizar la predicción en la que ocurrirá determinado evento fenológico. En este caso, el $\mathcal{U}(ac)$ emergió al momento de determinar la acumulación de grados-días durante un intervalo de tiempo $[t, t + dt]$. Además, dicha categoría permitió darle un significado a la integral definida: como el de *constante térmica*. Con el propósito de dar directrices para el diseño de situaciones escolares de socialización, que permitan construir el concepto de integral definida, como finalidad didáctica, analizamos el $\mathcal{U}(ac)$ en un modelo matemático realizado por Huincahue (2011), el cual permite estimar la constante térmica del ácaro llamado *B. chilensis.* En este modelo de variación discreta, argumentada por la necesidad de predecir el momento en el que este ácaro completará su desarrollo para determinada etapa de crecimiento, la significación fue la de constante térmica y el procedimiento vino dado por la expresión $\frac{máx\{(g_{i1}-T_b),0\}}{24}$, lo que se interpretó como la *acumulación de grados-días* del ácaro, *desde la hora* $i-1$ *hasta la hora* i, con $i = 1, \ldots, 24$, y g_{ij} definido como la temperatura promedio a la hora i del día j.

En el escenario de la Economía, se ofreció una $Res(\mathcal{U}(ac))$ al problematizar la predicción del beneficio total que tendrían aquellos consumidores que están dispuestos a pagar, por la compra de cierto artículo, un precio mayor al precio de mercado. En este caso, el $\mathcal{U}(ac)$ emergió al momento de determinar cuánto fue el beneficio de este tipo de consumidores por la compra de las unidades comprendidas en el intervalo $[x, x + dx]$. Además, esta categoría permitió darle un significado a la integral definida: como *excedentes de los consumidores*, cuya interpretación geométrica corresponde al área comprendida entre la curva de demanda $p = p(x)$ y la recta $p = p_0$, donde p_0 corresponde al precio unitario de mercado de cierto producto.

Las epistemologías de $\mathcal{U}(ac)$ entregadas en esta investigación, además de ser de una naturaleza diferente a lo establecido en el dME, aportan a la socioepistemología nuevas epistemologías basadas en la segunda columna de la Tabla 1, las cuales, a su vez, otorgan bases para el diseño de situaciones escolares de socialización, contribuyendo a trastocar y transformar la matemática escolar con el propósito de generar una relación recíproca entre el cotidiano de la gente y la matemática escolar (Mendoza y Cordero, 2018), tomando en cuenta la funcionalidad del conocimiento matemático. Por lo tanto, la inclusión de la noción de acumulación en los procesos de enseñanza y aprendizaje del cálculo integral es una condición necesaria para contribuir al logro de la reciprocidad entre la matemática escolar y la matemática del cotidiano. Sin embargo, esto por sí solo no resulta suficiente; también es necesario que esta noción se acepte como un producto material social que debe de enseñarse y aprenderse.

Desarrollar la $\zeta(Mod)$ como una $Res(\mathcal{U}(ac))$ contribuye a favorecer el aprendizaje de significados del conocimiento matemático asociado a la integral definida, por medio de un enfoque en los $\mathcal{U}(ac)$, privilegiando la funcionalidad del conocimiento matemático, la pluralidad epistemológica y la transversalidad de saberes. Esto permite contribuir a la creación de un vínculo entre la matemática del cotidiano y la matemática escolar, lo que permite confrontar al fenómeno de exclusión.

Finalmente, debemos señalar que en esta investigación hemos encontrado otras situaciones de variación en donde la noción de acumulación juega un rol importante en la construcción de la integral definida. Dichas situaciones pueden encontrarse en el Anexo A de esta investigación.

7.2 Sobre los objetivos de la segunda parte de investigación

7.2.1 Sobre el primer objetivo general

La problemática planteada en esta segunda parte de investigación fue que *la construcción social de la integral de Lebesgue está rezagada por el dME.* Para abordar dicha problemática, desde dos perspectivas teóricas diferentes, se plantearon dos objetivos generales: *modelar la CSCM por medio de un modelo preliminar de anidación de prácticas* y *formular una propuesta de marco de referencia de los* $\mathcal{U}(med)$.

En cuanto al primer objetivo general, por medio de un análisis histórico-epistemológico se logró dar cuenta que las prácticas de clasificar, medir y aproximar estuvieron asociadas a la construcción de la integral de Lebesgue en la obra titulada *Integrale, Longeur, Aire* de 1902. Además, dichas prácticas interactuaron orientadas por una práctica de referencia, que denominamos *surgimiento de la medida de conjuntos como teoría*, en donde intervienen acciones como *relacionar*, *comparar* y *agrupar*. Cabe señalar que dicha práctica de referencia es distinta a la práctica de referencia que orienta el quehacer del matemático actual. Por poner un ejemplo, Lebesgue no necesitó el concepto de $\sigma-$álgebra para construir su integral y el concepto de medida utilizado por Lebesgue no fue tan amplio como el actualmente presentado en el dME. Más aún, la práctica de referencia encontrada dotó a Lebesgue de una racionalidad contextualizada distinta a la racionalidad que puede derivarse del dME, en donde se construye dicha integral enmarcada en la actual teoría de la medida.

Para la construcción del concepto de integral de Lebesgue, el dME suele estar organizado en una lógica de evolución de conceptos matemáticos, en función del objetivo al cual se quiera llegar (por ejemplo, construir la integral de Lebesgue). Por ejemplo, para construir esta integral, es necesario conocer el concepto de $\sigma-$álgebra, luego el concepto de medida, posteriormente el concepto de función simple y finalmente el de función medible. En otras palabras, la construcción de esta integral necesita de una cierta jerarquización en cuanto a la presentación de objetos matemáticos, en función de lograr la construcción de la integral en cuestión. En ese sentido, se habla de una centración en objetos matemáticos. Desde la TSME, se propone un rediseño del dME, en base a la CSCM, permitiendo descentrarse de los objetos matemáticos y centrarse en las prácticas que dieron origen y significado a esos objetos. Por lo tanto, esta investigación aporta elementos importantes para contribuir a dicho rediseño.

Cabe destacar el carácter preliminar del modelo de anidación de prácticas presentado en esta investigación. A medida que se profundice más, tanto en el análisis epistemológico como en las otras componentes (cognitiva, didáctica y social), éste puede modificarse y ampliarse. Además, según Beltrán y Montiel (2015), para validar y robustecer el modelo preliminar de prácticas anidadas presentado en esta investigación, resulta fundamental el diseño (en base a dicho modelo) de una situación-problema, junto con el respectivo análisis de su implementación. De esta manera, podremos propiciar de mejor manera la CSCM en relación a la integral de Lebesgue.

Por último, en el Anexo B se puede ver que las prácticas de clasificar, medir y aproximar aparecen e interactúan en las obras de Lebesgue denominadas *Sur le développement de la notion d´integrale*, de 1927 y *Leçons sur l´intégration. Recherche des fonctions primitive de 1928. Además, se da cuenta de la presencia e interacción de estas prácticas* en la construcción de esta integral, pero enmarcada en la actual teoría de la medida.

7.2.2 Sobre el segundo objetivo general

Para el abordaje del segundo objetivo general, se confrontó lo realizado por Lebesgue en la obra titulada *Integrale, Longeur, Aire* de 1902 y lo realizado en Economía, cuando se calcula de forma teórica los EC. Dicho análisis permitió inferir los $\mathcal{U}(med)$ de ambas situaciones e inferir una transversalidad entre ambos escenarios, lo cual nos permitió establecer que dentro una *situación de medición específica*, la significación asociada es la de *medida de un conjunto*, el procedimiento viene dado por la *clasificación*, el instrumento útil al humano es *lo medible* y la argumentación es la *cuantificación*.

La *medición*, el *medir conjuntos*, *clasificar* y buscar *lo medible* son prácticas del cotidiano de la gente y permiten generar una epistemología de $\mathcal{U}(med)$.

Estudiar los $\mathcal{U}(med)$, enfocándose en la transversalidad del conocimiento matemático, permitió dar cuenta de la pluralidad epistemológica en relación al concepto de integral definida, permitiendo construir un marco epistemológico que reconoce, a diferencia del dME, la matemática del cotidiano como conocimiento matemático. De este modo, destacamos la importancia de incorporar los $\mathcal{U}(med)$ al dME, con fin de contribuir a su rediseño por medio de la CSCM.

Cabe señalar, que resulta importante probar la viabilidad, desde una perspectiva empírica, del MR de los $\mathcal{U}(med)$ propuesto en esta investigación. Es decir, es necesario aplicar el diseño de una situación que esté basada en dicho MR y que permita dar cuenta de una construcción de conocimiento matemático, como finalidad didáctica. Una vez probada dicha viabilidad, la formulación de este MR permitiría ampliar la Socioepistemología del Cálculo y del Análisis (Tabla 1). A pesar de que la prueba de dicha viabilidad no fue parte de esta investigación, consideramos que es posible dar algunas directrices que apunten al diseño de una situación, que se base en el MR de los $\mathcal{U}(med)$ propuesto en esta investigación, que permita validar dicho marco de forma empírica. A continuación, se detallará este aspecto.

Suponga que se tiene una gran cantidad de monedas de la misma denominación. Con el propósito de contar cuántas monedas hay en total, un procedimiento posible es agruparlas en diferentes lotes, de modo que cada uno tenga la misma cantidad de monedas y que la vez, dicha cantidad sea fácil de contar (ver Figura 34). Luego, se cuenta el número de lotes construidos y se multiplica por el número de monedas que tiene cada lote. Esto permite, de una manera más eficiente y ordenada, determinar la cantidad total de monedas.

Figura 34: Clasificación de monedas por lotes.

En resumen, podemos notar que esta situación específica está dentro de una situación de medición, ya que se busca *medir* el conjunto de monedas de igual denominación, por medio del conteo. Más aún, la argumentación de esta situación viene dada por la necesidad de *cuantificar* la cantidad total de monedas. La significación asociada es la *cardinalidad* del conjunto de monedas, el procedimiento viene dado por una *clasificación* en lotes de monedas de la misma cardinalidad. Pero el conteo del total de monedas depende de *lo contable* de las monedas de cada lote, ya que para facilitar el conteo total, dicha cantidad debe ser posible de contar de forma rápida y sencilla. Todo esto, se resume en la Tabla 12.

Tabla 12.

Significación, procedimiento, instrumento y argumentación de la situación específica.

	Situación Núcleo	**Situación específica**
Construcción de lo matemático	Medición	Medir el conjunto de monedas de igual denominación, por medio del conteo
Significaciones	Medida de un conjunto	Cardinalidad del conjunto de monedas
Procedimientos	Clasificación	Clasificar las monedas en lotes de igual cardinalidad
Instrumento útil al humano	Lo medible	Lo contable de la cantidad de monedas de cada lote
Argumentación	Cuantificación	Cuantificar la cantidad total de monedas

Anexo A: Situaciones de variación en donde emerge la noción de acumulación.

A.1 La noción de acumulación en Química: reactores tubulares y ecuación general de balances de moles.

Los reactores tubulares son caños cilíndricos que operan normalmente en estado estacionario. Para modelar este reactor se asume que el flujo es turbulento de modo que pueda ser considerado como un flujo pistón, el cual a su vez, se entiende de la siguiente manera:

Un reactor tubular flujo pistón (Ver Figura 35) es un tubo donde el flujo del fluido avanza de manera ordenada a lo largo de la dirección del flujo, o sea, que los elementos del fluido avanzan en planos perpendiculares al flujo sin que exista mezcla en la dirección del flujo. La condición necesaria y suficiente para que exista un flujo pistón en un reactor es que el tiempo de residencia en el reactor sea el mismo para cada elemento del fluido. (González, 2005, p. 168)

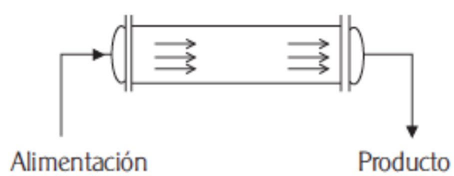


Figura 35: Reactor tubular flujo pistón (González, 2005)

En el reactor tubular la concentración varía en función de z (ver Figura 36). Sin embargo, si tomamos una pequeña rodaja del reactor de volumen, ΔV, podemos asumir que en ese pequeñísimo volumen la reacción es constante, planteemos entonces un balance en este volumen diferencial:

$$F_j(z+\Delta z) - F_j(z) = r_j \Delta V (*)$$

donde F_j representa el flujo molar.

donde r_j es la velocidad de generación de la especie j, la cual tiene unidades de mol/volumen tiempo (por ejemplo, mol/m^3 min). Además, se tiene que $\Delta V = A(z)\Delta z$, donde $A(z)$ es el área de la sección transversal entre z y $z + \Delta z$. Reemplazando en $(*)$, se tiene que

$$F_j(z + \Delta z) - F_j(z) = r_j A(z) \Delta z$$

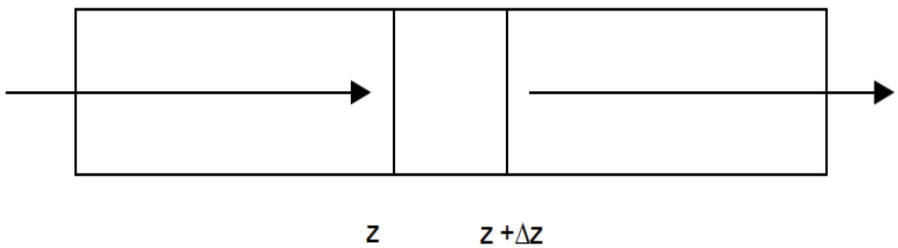


Figura 36: Variación de concentración en el reactor tubular

Siguiendo el patrón, tenemos que

$$F_j - F_{j_0} = \int_0^L r_j A(z) dz = \int_0^V r_j dV$$

La cual corresponde a una ecuación general de balance de moles. En el Cuadro 2 se presenta una estructura de significación de la integra definida, para esta situación.

Significación

↓

Ecuación general de balance de moles

↓

Estructura de la significación

Toma del elemento diferencial

$$F_j(z+\Delta z) - F_j(z) = r_j \Delta V$$

$$[F_j(z+\Delta z) - F_j(z) = r_j A(z)\Delta z]$$

(local)

↓

$$F_j - F_{j_0} = \int_0^V r_j dV$$

$$[F_j - F_{j_0} = \int_0^L r_j A(z)dz]$$

(total)

↓

Centración en los fenómenos de cambio:
Acumulación
Valor acumulado

Cuadro 2. Estructura de significación de la integral definida

A.2 La noción de acumulación en Probabilidad: la función de distribución acumulada.

La función de distribución, con respecto a una determinada variable aleatoria continua X, asocia a cada valor real $x \in [a, b]$ la probabilidad de que dicha variable tome valores menores o iguales a x. En otras palabras,

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Si $f(x)$ corresponde a la función de densidad de la función de distribución $F(x)$, y si $dx > 0$ es suficientemente pequeño, podemos interpretar a $f(x)dx$ como la probabilidad de que la variable aleatoria tome valores en el intervalo $[x, x + dx]$. Es decir,

$$F(x + dx) - F(x) = f(x)dx$$

Siguiendo el patrón, tenemos que

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

En el Cuadro 3 se presenta una estructura de significación de la integra definida, para esta situación.

Significación

↓

Probabilidad de que una variable aleatoria X tome valores en el intervalo $[a, b]$

↓

Estructura de la significación

Toma del elemento diferencial

$$F(x + dx) - F(x) = f(x)dx$$

(local)

↓

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

(total)

↓

Centración en los fenómenos de cambio:
Acumulación
Valor acumulado

Cuadro 3. Estructura de significación de la integral definida

A.3 La noción de acumulación en Geometría: volumen de un sólido de revolución.

Si consideramos una función continua $y = f(x), a \leq x \leq b$ y se hace girar la región $\{(x, y) \in R^2 : y = f(x), a \leq x \leq b\}$ en torno al eje Y, se obtiene un sólido de revolución (ver Figura 37). Para calcular el volumen V de dicho sólido, restamos el volumen del cilindro exterior de radio x_i con el volumen del cilindro interior de radio x_{i-1}(ambos cilindros con altura $f(x_i\ )$, con $x_i\ = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$). Luego,

$$V(x_i) - V(x_{i-1}) = \pi x_i^2 f(x_i\ ) - \pi x_i^2 f(x_{i-1})$$

$$\pi f(x_i\ )(x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

$$2\pi f(x_i\ )\frac{(x_i + x_{i-1})}{2}(x_i - x_{i-1})$$

$$2\pi f(x_i\ )x_i\ (x_i - x_{i-1})$$

$$2\pi f(x_i\ )x_i\ \Delta_i x$$

donde $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$. Así,

$$V(x_i) - V(x_{i-1}) = 2\pi f(x_i\ )x_i\ \Delta_i x$$

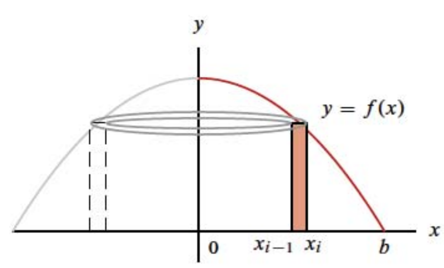


Figura 37. Sólido de revolución obtenido al hacer girar la curva $y = f(x)$ en torno al eje Y

Así, de forma general tenemos

$$V(x + dx) - V(x) = 2\pi x f(x) dx$$

Por lo tanto, continuando con el patrón, se tiene que

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

En el Cuadro 4 se presenta una estructura de significación de la integra definida, para esta situación.

Significación

Volumen de un sólido de revolución

Estructura de la significación

Toma del elemento diferencial

$$V(x + dx) - V(x) = 2\pi x f(x) dx$$

(local)

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

(total)

Centración en los fenómenos de cambio:
Acumulación
Valor acumulado

Cuadro 4. Estructura de significación de la integral definida

A.4 La noción de acumulación en Física: distancia recorrida.

Sea $y = f(x)$ la función que representa la rapidez de un cierto objeto en función del tiempo x y $A(x)$ el área acotada por la curva $y = f(x)$ y el eje X, desde el origen hasta $x > 0$ (ver Figura 38). Si $dx > 0$, es suficientemente pequeño, podemos interpretar a $f(x)dx$ como la distancia recorrida por el objeto en el intervalo de tiempo $[x, x + dx]$. Así, tenemos que

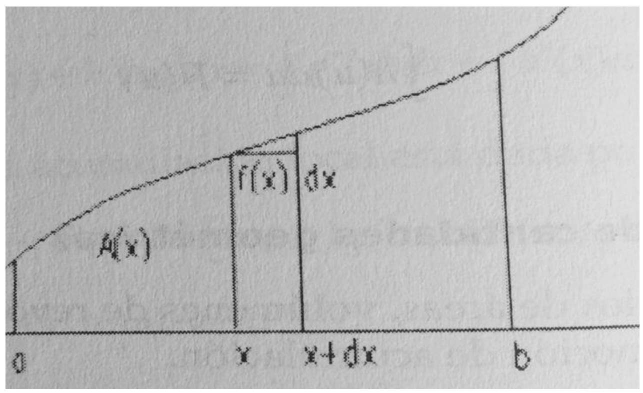


Figura 38: Representación geométrica de $A(x)$

$$A(x + dx) - A(x) = f(x)dx$$

Siguiendo el patrón, se tiene que

$$A(b) - A(a) = \int_a^b f(x)dx$$

donde $x = a$ representa el tiempo en el que se comenzó a medir la distancia recorrida por el objeto y $x = b$ el tiempo en el cual se dejó de medir la distancia recorrida.

En el Cuadro 5 se presenta una estructura de significación de la integra definida, para esta situación.

Significación

Distancia recorrida por un objeto en un intervalo de tiempo $[a, b]$

Estructura de la significación

Toma del elemento diferencial

$$A(x + dx) - A(x) = f(x)dx$$

(local)

$$A(b) - A(a) = \int_a^b f(x)dx$$

(total)

Centración en los fenómenos de cambio:
Acumulación
Valor acumulado

Cuadro 5. Estructura de significación de la integral definida

Anexo B: Clasificar, medir y aproximar: prácticas presentes en la construcción de la integral de Lebesgue

En base al análisis epistemológico, podemos señalar que clasificar, medir y aproximar, son prácticas que han permitido, independientemente del contexto de la situación, generar una construcción de la integral de Lebesgue (1927), Lebesgue (1928) y en la realizada en base a la actual teoría de la medida.

B.1 Sur le développement de la notion d´integrale (1927)

Dada una división $P = \{y_1, \ldots, y_n\}$ del recorrido de la función acotada y medible f, Lebesgue clasifica el dominio de la función por medio del criterio de la imagen inversa, formando los conjuntos $E_i = f^{-1}([y_i, y_{i+1}])$, los cuales se miden y ponderan por valores arbitrarios $\eta_i \in [y_i, y_{i+1}]$, para luego sumarse entre sí.

En la Figura 39 podemos ver cómo aparecen las prácticas de clasificar, medir y aproximar

Clasificar	Medir	Aproximar
Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ medible y acotada. $P = \{y_0, y_1, \dots y_n\}$ partición del recorrido de f. $E_i = f^{-1}([y_i, y_{i+1}])$	$m(E_i)$ $i = 0, \dots n-1$ donde, $m(A) = m_i(A) = m_e(A)$	$S = \sum \eta_i\, m(E_i)$

Figura 39: Presencia de las prácticas de clasificar, medir y aproximar en la construcción de la integral definida de Lebesgue (1927)

B.2 Leçons sur l´intégration. Recherche des fonctions primitives (1928)

Dada una división $P = \{m = y_0, \dots, y_n = M\}$ del recorrido de la función acotada y medible f, resulta evidente que, para cada $i = 0, \dots, n$, los conjuntos definidos por Lebesgue:

$$D_i = \{x \in [a,b] : f(x) = y_i\}$$

$$E_i = \{x \in [a,b] : y_i < f(x) < y_{i+1}\}$$

$$F_i = \{x \in [a,b] : y_{i-1} < f(x) < y_{i+1}\}$$

son disjuntos dos a dos. De esta forma, la división P del recorrido permite generar una clasificación del dominio de la función f, en los conjuntos D_i E_i y F_i en donde cada uno de estos conjuntos es medido y ponderado por un número real, para posteriormente sumarse entre sí.

En la Figura 40 podemos ver cómo aparecen las prácticas de clasificar, medir y aproximar

Clasificar | Medir | Aproximar

Clasificar $\Downarrow$

Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ medible y acotada.
$P = \{y_0, y_1, \dots y_n\}$ partición del recorrido de f.

o $D_i, E_i, F_i, i = 0, \dots n$, partición de $[a,b]$

donde,

$$D_i = \{x \in [a,b]: f(x) = y_i\}$$

$$E_i = \{x \in [a,b]:\ y_i < f(x) < y_{i+1}\}$$

$$F_i = \{x \in [a,b]:\ y_{i-1} < f(x) < y_i\}$$

Medir $\Downarrow$

$m(D_i), m(E_i), m(F_i)$,
$i = 0, \dots n$

donde,

$$m(A) = m_i(A) = m_e(A)$$

Aproximar $\Downarrow$

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} y_i m(D_i) + \sum_{i=0}^{n-1} y_i m(E_i)$$

$$\delta_n = \sum_{i=1}^{n} y_i m(D_i) + \sum_{i=1}^{n} y_i m(F_i)$$

Figura 40: Presencia de las prácticas de clasificar, medir y aproximar en la construcción de la integral definida de Lebesgue (1928)

B.3 Construcción de la integral de Lebesgue enmarcada en la actual teoría de la medida.

En el sentido moderno, la clasificación de los elementos de un dominio Ω, se da por medio de una partición de Ω, dada por los conjuntos $A_k = \{x \in \Omega: s(x) = \alpha_k, k = 1, \dots, n\}$. Si la región de integración es un conjunto medible $E \in A$, los conjuntos $A_k \cap E, k = 1, \dots, n$ particionan E (y por tanto, clasifican a los elementos de E), los cuales se miden ($\mu(A_k \cap E)$) y posteriormente se suman ponderadamente para tener la expresión

$$\int_E s d\mu = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(A_k \cap E)$$

y así construir la integral de Lebesgue de una función positiva y medible f

como

$$\int_E f d\mu = \quad {}_{0\leq s\leq f} \int_E s d\mu$$

En la Figura 41 podemos ver cómo aparecen las prácticas de clasificar, medir y aproximar

Clasificar	Medir	Aproximar
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
Sea $s: \Omega \to \mathbb{R}$ simple y medible. $A_k, k = 1, \ldots n$, partición de Ω, donde $A_k = \{x \in \Omega: s(x) = \alpha_k\}$. o$A_k \cap E$ es una partición de $E \in \mathcal{A}$.	$\mu(A_k \cap E), k = 1, \ldots n.$ donde, $\mu: \mathcal{A} \to [0, \infty]$ función de conjuntos tal que o $\mu(\sum_{i=1}^{\infty} A_k) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_k)$, $\forall A_k \in \mathcal{A}$.	$\int_E s\, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(A_k \cap E)$

Figura 41: Presencia de las prácticas de clasificar, medir y aproximar en la construcción de la integral definida de Lebesgue enmarcada en la actual teoría de la medida

Referencias

Aranda, C., y Callejo, M. (2017a). Construcción de la Función Integral y Razonamiento Covariacional: dos Estudios de Casos. *Bolema, Rio Claro (SP)*, 31 (18), 777-798. Recuperado de http://www.scielo.br/pdf/bolema/v31n58/0103-636X-bolema-31-58-0777.pdf

Aranda, C., y Callejo, M. (2017b). Formas de aproximar el área bajo una curva: un estudio con estudiantes de bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, 35(1), pp. 157-174. Recuperado de https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/319573/409800

Barrientos, R., Apablaza, J., Norero, H., y Estay, P. (1998). Temperatura base y constante térmica de desarrollo de la polilla del tomate, tuta absoluta (lepidoptera: gelechiidae). *Ciencia e Investigación Agraria*, 25(3), 133-137. doi: http://dx.doi.org/10.7764/rcia.v25i3.659

Blomhøj, M. (2004). Mathematical Modelling – A Theory for Practice. En B. Clarke et al. (Eds.), International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics (pp. 145-159). Göteborg: National Center for Mathematics Education.

Blum, W. y Leiß, D. (2005). “Filling up” – The Problem of Independence-Preserving Teacher Interventions in Lessons with Demanding Modelling Tasks. En Bosch, M. (Ed.), *CERME-4 – Proceedings of the Fourth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Guixol.

Blum, W., y Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45-58. Recuperado de http://gorila.furb.br/ojs/index.php/modelling/article/viewFile/1620/1087

Bruno, A., Noda, M., Aguilar, R., González, C., Moreno, L., y Muñoz, V. (2006). Análisis de un tutorial inteligente sobre conceptos lógico-matemáticos en alumnos con Síndrome de Down. *Relime*, 9(2), 211 - 226. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v9n2/v9n2a3.pdf

Bobadilla, M. (2012). *Desarrollo conceptual de la integral y la medida: un tránsito entre lo geométrico y lo analítico* (Tesis doctoral). Universidad del Valle, Colombia.

Bombal, F. (1991). *La teoría de la Medida: 1875 – 1925.* Recuperado de https://eprints.ucm.es/19959/1/bombal14.pdf

Borel, É. (1898). *Leçons sur la Théorie des Fonctions.* París: Gauthier-Villars.

Borromeo-Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 38(2), 86–95. Recuperado de http://www.cimm.ucr.ac.cr/ciaem/articulos/universitario/conocimiento/Theoretical%20and%20empirical%20%20differentiations%20of%20phases%20in%20the%20%20modelling%20process.*Borromeo%20Ferri,%20Rita.*Rita%20Borromeo%20Ferri%20(Germany).pdf

Boyer, C. (2013). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Buendía, G. (2011). *La construcción social del conocimiento matemático escolar. Un estudio socioepistemológico sobre la periodicidad de las funciones*. México: Ediciones Diaz de Santos.

Buendía, G., y Cordero, F. (2005). Prediction and the periodical aspecto as generators of knowledge in a social practice Framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics*, 58 (3), 299-333.

Canela, L. (2016). Aritmetización del análisis y construcción formal: Husserl como alumno de Weierstrass y Kronecker. *Eikasia Revista de filosofía, Volumen,* 135 – 152*. Recuperado de* http://revistadefilosofia.com/72-06.pdf

Cantoral, R. (1990). *Desequilibrio y Equilibración. Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones propias del pensamiento* *físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas* (Tesis doctoral). Cinvestav-IPN, México.

Cantoral, R. (2003). *La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa: una mirada emergente*. [CD-ROM]. Blumenau: XI Conferencia Interamericana de Educação Matemática.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. En L. Diaz (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1-9). Coacalco, México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C.

Cantoral, R., Molina, J., y Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la Predicción. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 463-468), México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa.* Barcelona: gedisa.

Cantoral, R., Montiel, G., Reyes-Gasperini, D. (2015). El Programa Socioepistemológico de Investigación en Matemática Educativa: El caso de Latinoamérica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18(1), 5-17. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v18n1/v18n1a1.pdf

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemátic*a, 7(3), 91-116. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/2740/274032530006.pdf

Cañada, A. (2006). Fourier y sus coeficientes. *Boletín de la Sociedad Espanola de Matematica Aplicada*, 36(), 125-148. Recuperado de https://www.ugr.es/~dpto_am/docencia/Apuntes/Fourier_y_sus_coeficientes_Canada.pdf

Cardoso, E., Cerecedo, M. (2008). El desarrollo de las competencias matemáticas en la primera infancia. *Revista Iberoamericana de Educación*, 47(número especial), 1-11. Recuperado de https://rieoei.org/RIE/article/view/2270

Castañeda, A. (2004). *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión* (Tesis doctoral). CICATA-IPN, México.

Castillo, H., Santibáñez, F. (1987). Efecto de la temperatura sobre la fenología del trigo. *Agricultura Técnica (Chile)*, 47 (1), 29 -34. Recuperado de http://www.chileanjar.cl/files/V47I1A05_es.pdf

Cofré, A., Tapia, L. (2003). *Cómo desarrollar el pensamiento lógico Matemático*. Santiago: Editorial Universitaria.

Contreras, Á., Ordóñez, L. (2006). Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. *Relime*, 9 (1), 65 -84. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v9n1/v9n1a4.pdf

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 4(2), 103-128. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/9618/1/Cordero2001La.pdf

Cordero, F. (1992). Una base de significados en la enseñanza de la matemática avanzada. En R. Cantoral, C. Imaz y R.M. Farfán (Eds), *Memorias de la Sexta Reunión Centroamericana y del Caribe Sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa* (pp. 267-296). Cuernavaca, México.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 4(2), 103-128.

Cordero, F. (1994). *Cognición de la integral y la construcción de sus significados: un estudio del Discurso Matemático Escolar*. (Tesis Doctoral). Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Cordero, F. (1998). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso de comportamiento tendencial de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación* *en Matemática Educativa*, 2(1), 56–74. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33510105

Cordero, F. (2003a). *Reconstrucción de significados del Cálculo Integral. La noción de acumulación como una argumentación.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F. (2003b). Lo social en el conocimiento matemático: los argumentos y la construcción de significados. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 16, 73-78.

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Relime*, 8(3), 265-286. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33508303

Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento apprendimento della matemática. *La Matemática e la sua Didattica*, *20*(1), 59-79.

Cordero, F. (2007). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds). *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte iberoamericano* (pp. 265 – 286). México DF, México: Díaz de Santos.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R.M. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.). *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 285-309). México DF, México: Díaz de Santos.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H. y Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad*. México: gedisa.

Cordero, F. (2016). Modelación, funcionalidad y multidisciplinaridad: el eslabón de la matemática y el cotidiano. En J. Arrieta y L. Díaz (Eds.), *Investigaciones latinoamericanas de modelación de la matemática educativa* (pp. 59-88). Barcelona, España: Gedisa.

Cordero, F (2017). *La matemática y lo matemático. Transversalidad y modelación: un programa socioepistemológico*. Manuscrito en preparación.

Cordero, F., Del Valle, T., Morales, A. (2019). Usos de la optimización de ingenieros en formación: el rol de la Ingeniería mecatrónica y de la obra de Lagrange. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 22(2), 185-212. Doi: https://doi.org/10.12802/relime.19.2223

Codero, F., Mena-Lorca, J., Huincahue, J., Mendoza, J. y Pérez-Oxté, I. (2019). A category of modeling: the uses of mathematical knowledge in different scenarios and the learning of mathematics. Enviado a su publicación.

Crisóstomo, E. (2012). *Idoneidad de procesos de estudio del cálculo integral en la formación de profesores de matemáticas: una aproximación desde la investigación en didáctica del cálculo y el conocimiento profesional* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

Escribano, A. (2001). El funcionamiento de los mercados y el comercio electrónico. Principios básicos para el análisis. *Economía Industrial*, 340 (4), 13-30. Recuperado de https://www.mincotur.gob.es/Publicaciones/Publicacionesperiodicas/EconomiaIndustrial/RevistaEconomiaIndustrial/340/1AlvaroEscribano.pdf

Espinoza, L. (2009). *Una evolución de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio socioepistemológico*. (Tesis de Maestría). Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Farfán, R. M. (1993). *Construcción de la noción de convergencia en ámbitos fenomenológicos vinculados a la ingeniería. Estudio de caso* (Tesis doctoral). Cinvestav-IPN, México.

Farfán, R. M. (1997). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Frank, R. (2009). *Microeconomía intermedia análisis y comportamiento económico*. México: Mc Graw Hill.

Galaz–García, F. (2007). Definiciones originales de la integral y medida de Lebesgue. *Miscelánea Matemática*, 44, 83 – 100. Recuperado de http://www.miscelaneamatematica.org/Misc44/Fernando_g.pdf

García, M. (2007). *Resignificando el concepto de función lineal en una experiencia a distancia*. (Tesis doctoral). Cinvestav-IPN, México.

Gómez, C. (2003). Relación entre la acumulación de días grado y el vuelo estacional de la mariposa europea del brote del pino en Esquel, Argentina. *Bosque,* 24(3), 57-63. Recuperado de https://scielo.conicyt.cl/pdf/bosque/v24n3/Art06.pdf

Gómez, K, Silva, H., Cordero, F., y Soto, D. (2014). Exclusión, Opacidad y Adherencia. Tres fenómenos del discurso Matemático Escolar. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp.1457-1464), México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Gonzalez, M. (2005). Una aplicación poco frecuente: teorema del valor medio para integrales aplicado a ingeniería química. *Educación Matemática*, 17(1), 163-177. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/405/40517108.pdf

Gordon, R. (1994). *The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock*. Rhode Island: American Mathematical Society.

Granville, W. (2009). *Cálculo diferencial e integral*. México: Limusa.

Grattan-Guinness, I. (1980). *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*. Madrid: Alianza editorial.

Hernández, F., y Soriano, E. (1997). *La enseñanza de las matemáticas en el primer ciclo de la educación primaria: Una experiencia didáctica*. España: Universidad de Murcia.

Hoare, G., y Lord, N. (2002). 'Intégrale, longueur, aire' the Centenary of the Lebesgue Integral. *The Mathematical Gaze*tte, 86(50), 3-27. doi: 10.2307/3621569

Huincahue, J. (2011). *Dinámicas de modelos de Depredación Continuos e Impulsivos y Estudio Fenológico del Brevipalpus Chilensis* (Tesis de Maestría). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Huincahue, J. (2017). *Propuesta de modelación matemática en la formación de profesores y bases para una variedad de modelación desde la teoría Socioepistemológica*. (Tesis doctoral). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

Kaiser, G., y Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM–The International Journal on Mathematics Education*, 38(3), 302-310.

Krugman, P., Wells, R. (2007). *Macroeconomía: introducción a la Economía*. Barcelona: Reverté

Lebesgue, H. (1902). Intégrale, longueur, aire. *Annali di Matematica*, 7, 231–359.

Lebesgue, H. (1904). *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*. Gauthier-Villars, 1904. 2a édition, 1928. Réédition: Chelsea publishing company Bronx, New York.

Lebesgue, H. (1927). Sur le Développement de la notion d`integrale. *Revue de Métaphysique et de Morale*, 34 (2), 149- 167.

Lebesgue, H. (1928). *Leçons sur L´intégration. Recherche des fonctions primitives. Segunda edición*. París: Gauthier – Villars

Lesh, R. y Doerr, H. (Eds.) (2003). *Beyond Constructivismen–Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning and Teaching*. Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Maaß K. (2006). What are modelling competences? *ZDM–The International Journal on Mathematics Education*, 38(2) 113-142.

Mankiw, N. (2004). *Principios de Economía*. *3ªedición*. México: McGraw Hill

Mankiw, N. (2012). *Principios de Economía*.*6ª edición.* México: CENGAGE

Learning.

Morales, A., y Cordero, F. (2014). La graficación - modelación y la Serie de Taylor. Una socioepistemología del cálculo. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *17*(3), 319-345. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v17n3/v17n3a4.pdf

Mendoza, J., y Cordero, F. (2018). La modelación en las comunidades de conocimiento matemático. El uso de las matemáticas en ingenieros biónicos. El caso de la estabilidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 11(1), 36-61.

Mira, J. (2010). *Lecciones sobre la teoría de la medida e integración*. Alicante: Universidad de Alicante.

Michel, A. (1992). *Constitution de la theorie moderne de l`integration*. París: Libraire Philosophique J. VRIN

Montiel, G. y Buendía, G. (2012). Un esquema metodológico para la investigación socioepistemológica: Ejemplos e ilustraciones. En A. Rosas y A. Romo (Eds.), Metodología en Matemática Educativa: Visiones y reflexiones (pp. 55-82). México: Lectorum.

Molfino, V. (2010). *Procesos de institucionalización del concepto de límite: un análisis socioepistemológico* (Tesis doctoral). CICATA-IPN, México.

Montiel, G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio socioepistemológico*. México: Ediciones Díaz de Santos.

Morales, A., Mena, J., Vera, F., Rivera, R. (2012). El rol del tiempo en un proceso de modelación utilizando vídeos de experimentos físicos. *Enseñanza de las Ciencias*, 30 (3), 237 – 256. Recuperado de https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/285692/373664

Parra-Coronado A., Fischer, G., y Chaves-Cordoba B. (2014). Tiempo térmico para estados fenológicos reproductivos de la feijoa (Acca sellowiana (O. Berg) Burret). *Acta biológica Colombiana,* 20(1), 163-

173. doi: http://dx.doi.org/10.15446/abc.v20n1.43390. Recuperado de http://www.scielo.org.co/pdf/abc/v20n1/v20n1a17.pdf

Pérez-Oxté, I. (2015). *Los usos de la gráfica en una Comunidad de Ingenieros Químicos Industriales en Formación. Una base para el diseño de una situación de aprendizaje* (Tesis de Maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.

Recalde, L. (2007). Las raíces históricas de la integral de Lebesgue. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria, diciembre*, 103-127. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/468/46815209.pdf

Reyes–Gasperini, D. (2011). *Empoderamiento docente desde una visión Socioepistemológica: Estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas* (Tesis de Maestría). Cinvestav-IPN, México.

Reyes–Gasperini, D., Cantoral, C. (2014). Socioepistemología y Empoderamiento: la profesionalización docente desde la problematización del saber matemático. *Bolema, Rio Claro*, 28(48), 360-382.

Reyes–Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente y Socioepistemología. Un estudio sobre la transformación educativa en Matemáticas*. México: gedisa.

Rodríguez, D., Cotes, J., y Cure, J. (2012). Comparison of eight degree-days estimation methods in four agroecological regions in Colombia. *Bragantía, Campinas*, 71(2), 299-307. Recuperado de http://www.scielo.br/pdf/brag/v71n2/aop_1309_12.pdf

Rodríguez, R., Quiroz, S. (2015). Developing modelling competencies through the use of technology. En Stillman, Blum & Biembengut (Eds.). Mathematical Modelling in Education Research and Practice. Springer International Publishing Switzerland.

Rojas, I. (2011). Elementos para el diseño de técnicas de investigación: Una propuesta de definiciones y procedimientos en la investigación científica. *Tiempo de Educar*, 12(24), 277-297.

Segura, L., y Sepulcre, J. (2015). Arithmetization and Rigor as Beliefs in the Development of Mathematics. *Foundations of Science*, 21(1), 207-214. doi: https://doi.org/10.1007/s10699-015-9414-2

Soto, D. (2014). *La dialéctica exclusión-inclusión entre el discurso matemático escolar y la construcción social del conocimiento matemático* (Tesis doctoral). Cinvestav-IPN, México.

Soto, D., Cantoral, R. (2014). Discurso Matemático Escolar y Exclusión. Una Visión Socioepistemológica. *Bolema*, 28(50), 1525-1544.

Stewart, J. (2008). *Cálculo trascendentes tempranas*. Boston: Cengage Learning.

Suárez, L., y Cordero, F. (2010). Modelación-graficación. Una categoría para la matemática escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13 (4-II), 319-333.

Thomas, G. (2010). *Cálculo una variable*. México: Pearson Education.

Turégano, P. (1993). *Los conceptos en torno a la medida y el aprendizaje del cálculo infinitesimal* (Tesis doctoral). Universidad de Valencia, España.

Tuyub, I. (2008). *Un estudio socioepistemológico de la práctica toxicológica. Un modelo sobre la construcción social del conocimiento* (Tesis de Maestría). Cinvestav-IPN, México.

Tuyub, I., Cantoral, R. (2012). Construcción Social del Conocimiento Matemático durante la Obtención de Genes en una Práctica Toxicológica. *Bolema, Río Claro (SP)*, 26(42), 311-328. Recuperado de http://www.scielo.br/pdf/bolema/v26n42a/14.pdf

Urra, F., Apablaza, J. (2004). Temperatura Base y Constante Térmica de Desarrollo de Copitarsia decolora (Lepidoptera: Noctuidae). *Ciencia e Investigación Agraria*, 32(1), 19-26

Vargas, R., Olivares, R. (2007). Control biológico de la falsa arañita de la vid en viñas, *Revista Tierra Adentro*, 76, 34-35.

Vitoriano, B. (2007). Teoría de la decisión: Decisión con Incertidumbre, Decisión Multicriterio y Teoría de Juegos [PDF]. Recuperado de http://www.mat.ucm.es/~bvitoria/Archivos/a_dt_UCM.pdf

Williams, J., y Goos, M. (2013). Modelling with mathematics and technologies. En M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick y F. K. S. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 549–569). Berlin, Alemania: Springer.

Zamora, S., Vázquez, G., Sánchez, L. (2007). *Matemáticas 2: Geometría y Trigonometría.* D.F., México: ST Editorial.